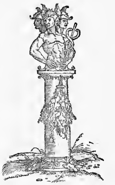
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ. ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-ΟΥΣΙΩΝ.

Εἰς τὸ αὐτοῦ τὸ πρῶτον, ἐξηγημάτων Πρόκλου βιβλ. δ´.

Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis Mathematicis nonnihil.



BASILEAE [illegible] ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

DE METHODO, ET QVONAM PACTO GEOMETRAE VTANTVR, TVM QVOMODO AD DISCIPLINAS CAETERAS SIT TRANSFERENDA, LOCVS GALENI DOCTISSIME REM EXPLICANS.

Τὸ τοίνυν μεθόδῳ τι ζητεῖν ἐξευρεῖν, ἀντίκειται μὲν τῷ κατὰ τύχην τε καὶ αὐτομάτως. ἔστι δὲ τὸ αὐτὸ μετά τινος ὁδοῦ καὶ τάξεως, ὡς εἶναί τι πρῶτον ἐν τῇ ζητήσει, καὶ δεύτερον, καὶ τρίτον, καὶ τέταρτον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς τἄλλα σύμπαντα, μέχρι περ ἂν ἀφίκηταί τις ἐπ' αὐτὸ τὸ προκείμενον ἐξ ἀρχῆς. οἱ μὲν οὖν ἀπὸ τῆς ἐμπειρίας καλῶς ποιοῦντες, ὁμολογοῦσιν ὡς οὔτε τῆς εὑρέσεως, οὔτε τῆς διδασκαλίας ἀναγκαία τάξις ἐστὶ παρ' αὐτοῖς. ἄτεχνον γάρ τι καὶ ἄλογον ἡ πεῖρα, καὶ τύχης ἀγαθῆς δεόμενον εἰς τὴν τῶν ζητουμένων εὕρεσιν. ὅσοι δὲ λόγον ἡγεμόνα τῆς εὑρέσεως ἐποιήσαντο καὶ τάξιν, ὁδόν τε μίαν, τὴν ἐπὶ τὸ τέλος ἄγουσαν ὑπέθεντο, τούτοις ἀναγκαῖον μὲν ἦν, ἀπὸ πρώτου τινὸς ἀρξαμένοις ὁμολογουμένου πᾶσιν ἀνθρώποις, οὕτως ἤδη μετιέναι πρὸς τὰ λοιπά. ποιοῦσί γε μὴν οὐχ οὕτως, ἀλλὰ καὶ τὰς ἀρχὰς οἱ πλεῖστοι διαπεφωνημένας λαμβάνουσιν. οὐκ ἀποδείξαντες δὲ, ἐπὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μετέρχονται, νομοθετοῦντες μᾶλλον, ἢ ἀποδεικνύντες. ἅπαντα δ' αὐτοῖς τὰ τοιαῦτα συμβαίνει, διὰ τὸ μηδὲν ὑπὲρ ἀποδείξεως ἐπεσκέφθαι πρότερον, ἀλλ' ἅμα τε τοῖς ζητουμένοις ἐφίστασθαι, καὶ τολμᾶν χρῆσθαι πρὸς τὴν πίστιν αὐτῶν ἀποδείξεσιν. ὅμοιόν τι ποιοῦσιν ἀνθρώπῳ μετρεῖν ἐπιχειροῦντι σφαῖραν, ἢ κύβον, ἢ κῶνον, ἢ κύλινδρον, ἢ τι τοιοῦτον ἕτερον, οὔτε γεωμετρίας, οὔτε λογιστικῆς ἐπιστήμονι θεωρίας. ἀλλὰ μηδὲ πῆχυν ἢ παλαιστὴν, ἢ πόδα παρεσκευασμένῳ. κᾆπειτα ἀγανακτοῦντι πρὸς τοὺς ἀπόδειξιν ζητοῦντας, ἢ καὶ σιωπᾶν ἀξιοῦντας. ὡς γὰρ κἀκεῖ γελοῖος ὁ φάσκων ὀρθογωνίου τριγώνου, τῆς μὲν ἑτέρας τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πεντάποδος, εἰ οὕτως ἔτυχεν, ὑπαρχούσης, τῆς δ' ἑτέρας, δωδεκάποδος, οὐ τριάκοντα ποδῶν γίγνεσθαι τὸ ἐμβαδὸν, ἀλλὰ τετταράκοντα, καὶ τούτου μηδὲ μίαν ἀπόδειξιν ἔχων εἰπεῖν, οὕτω κἀνταῦθα γελοῖος ὁ ἀποφηνάμενος μὲν ὁριστικῶς, ἀποδεῖξαι δ' οὐ δυνάμενος. ὡς οὖν ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ τρίγωνον ἀποδείξεως, οὐ γὰρ ἀφεκτέον ἡμῖν ἐστι τοῦ παραδείγματος, ἀπηλλακόσιν ἤδη τοῦ λόγου τοὺς ἀπαιδεύτους μεθοδικῶς, αὐτὸ μὲν τὸ προκείμενον, ἐκ δυοῖν τούτων ἐπεραίνετο προτάσεων. μιᾶς μὲν τῆς τὸ περιεχόμενον χωρίον, ὑπό τε τοῦ πεντάποδος καὶ δωδεκάποδος, ἑξηκοντάπουν γίγνεσθαι. δευτέρας δὲ, τὸ ἥμισυ τρίγωνον ἐκείνου τοῦ χωρίου λεγούσης, καὶ δεικνυούσης ὑπάρχειν. ἑκατέρα δὲ πάλιν τούτων ἑτέρων τινῶν εἰς ἀπόδειξιν ἐδεῖτο προτάσεων. εἶτ' ἐκεῖναι πάλιν ἑτέρων, ἄχρι περ ἂν ἐπὶ τὰς πρώτας ἀνέλθωμεν. αἳ δὲ, οὐκ ἐξ ἄλλων, οὐδὲ δι' ἀποδείξεως, ἀλλ' ἐξ ἑαυτῶν ἔχουσι τὴν πίστιν. οὔ

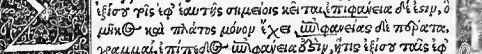
τως

τως οἶμαι κἀπὶ τῶν τὴν ἰατρικὴν τέχνην ἀποδεικνυμένων ἁπάντων εἰς
πρώτας τινὰς ἀναποδείκτους προτάσεις καὶ ἐξ ἑαυτῶν πιστὰς ἀνάγεσθαι
χρῆναι πάντας. καὶ εἴπερ οὕτως ἅπαντες ἐπεχείρησαν εἰπεῖν τι περὶ τῆς
θεραπευτικῆς μεθόδου, πάντως ἄν που καὶ συνεφώνησαν ἀλλήλοις, ὥσπερ
οἱ ἀριθμητικοί τε, καὶ γεωμέτραι, καὶ οἱ λογιστικοί. μαθεῖν γοῦν ἔστι παρ' ἐκεί-
νων εὐθὺς κατ' ἀρχάς, ὁποῖον μέν τοι δηλοῦται πρὸς ἑκάστου τῶν ὀνομάτων,
οἷς μέλλουσι χρῆσθαι. τίνας δὲ προτάσεις ἀναποδείκτους παραλήψονται πρὸς
τὸν λόγον, ἅσπερ δὴ καὶ ἀξιώματα καλοῦσιν, οἷον ὅτι γραμμὴν μὲν ὀνομά-
ζω μῆκος ἀπλατές. ἐπιφάνειαν δὲ, τὸ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχον. καὶ τρί-
γωνον μὲν, τὸ δέ τι. τετράγωνον δὲ, τὸ δέ τι. καὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως ἕκαστον. εἶθ'
ὅτι καὶ τοῖς τοιούτοις ἀξιώμασι χρήσοιντο προειπών, ὡς τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλ-
λήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα ἔσται. μετὰ ταῦτ' ἤδη
περαίνει δεικνύουσι τὰ θεωρήματα, μηδὲν τούτων ἔξωθεν ὧν ἐξ ἀρχῆς ὑπέ-
θετο προσλαμβάνων. οἱ πολλοὶ δὲ τῶν ἰατρῶν ὡς οἶσθα καὶ αὐτὸς ἱέρων κραίκ-
ςε, πόθεν ἤρξαντο τῆς εὑρέσεως ἣν εὑρηκέναι φασὶν ἐρωτώμενοι, τοσοῦ-
τον ἀποδέουσι τοῦ λέγειν ἀναποδείκτους τε καὶ ἅπασιν ὁμολο-
γουμένας ἀρχάς, ὥστ' οὐδ' ἀποκρίνεσθαι σύμφωνον ἑαυ-
τοῖς οὐδὲν ἐξευρίσκουσιν, ἀλλ' εὐρίπου δίκην, ἄνω
τε καὶ κάτω μεταβάλλοντες, τἀναντία τιθέμε-
νος ἕκαστος ἑαυτῷ, τοῦ λόγου προϊόν-
τος, ὧν ἐξ ἀρχῆς ὑπέθετο.

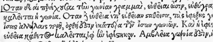
τέλος.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ, ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝΟΥΣΙΩΝ.

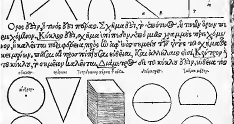
ΣΗΜΕΙΟΝ ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατὲς, γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί. ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.



Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς, Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.



Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον. Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, τὸ σημεῖον καλεῖται. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις



διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ

περὶ τοῦ κύκλου περιφερείας. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

τρίπλευρον. τετράπλευρον. πολύπλευρον. ἰσόπλευρον.



Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς. ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων, Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

ἰσο σκε λές. ὀρθογώνιον. σκαληνοί. ὀξυγώνιον. ἀμβλυγώνιον.



Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, Τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

τετράγωνον. ἑτερόμηκες. ῥόμβος. ῥομβοειδές. τραπέζιον.

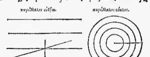


Παράλληλοι εἰσὶν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα.

Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβάλλειν. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

παράλληλοι εὐθεῖαι. παράλληλοι κύκλοι.



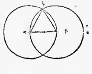
συμπίπτουσαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

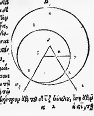
Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις

λήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν. α

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ αβ. δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ βγδ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω, ὁ αγε. καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α β σημεῖα, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ γα, γβ. ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γδβ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ. πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γαε κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα γβ, τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ γα αβ βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

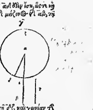


Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ βγ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ β σημεῖον, εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δαβ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ, εὐθεῖαι, αἱ αε, βζ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη κύκλος γεγράφθω ὁ ηκλ. ἐπεὶ οὖν τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. καὶ πάλιν ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ ηκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δλ, τῇ δη, ὧν ἡ δα, τῇ δβ ἴση ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ αλ, λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ βη ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ βγ, τῇ βη ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ αλ ἄρα, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση. πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ, ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ. δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. κείσθω πρὸς τῷ α σημείῳ τῇ γ εὐθείᾳ ἴση, ἡ αδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω ὁ δεζ. καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ

ἡ αε, τῇ αδ. ἀλλὰ καὶ ἡ γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αε, γ τῇ αδ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ αε τῇ γ ἐστὶν ἴση. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν αβ γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ ἴση ἀφῄρηται ἡ αε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην, λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν α σημείου, ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, τῆς δὲ αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ τὸ β ἐπὶ τὸ ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ, τῇ δε. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ ἡ αγ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν δζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ εδζ ὥστε καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ σημεῖον ἐφαρμόσει. διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν αγ, τῇ δζ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε ἐφηρμόκει, ὥστε βάσις ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν β ἐπὶ τὸ ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ ζ, ἡ βγ βάσις ἐπὶ τὴν εζ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ βγ βάσις, ἐπὶ τὴν εζ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ὥστε καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ἐπὶ ὅλον τὸ δεζ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

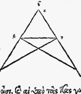
ε



Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν αβ πλευρὰν, τῇ αγ πλευρᾷ. καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς αβ, αγ, εὐθεῖαι αἱ βδ, γε, λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγβ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ βγε. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς βδ τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αε τῇ ἐλάττονι τῇ αζ ἴση ἡ αη. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ, ηβ εὐθεῖαι. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αζ, τῇ αη, ἡ δὲ αβ, τῇ αγ, δύο δὴ αἱ ζα, αγ, δυσὶ ταῖς ηα, αβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ζαη. βάσις ἄρα ἡ ζγ, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αζγ τρίγωνον, τῷ αηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αγζ, τῇ ὑπὸ αβη, ἡ δὲ ὑπὸ αζγ, τῇ ὑπὸ αηβ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αζ, ὅλῃ τῇ αη ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ αβ τῇ αγ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βζ λοιπῇ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, τῇ ηβ ἴση. δύο δὴ αἱ

βζ ζγ.

βζ, ζγ, δυσὶ ταῖς γη, ηβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γηβ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ, ἡ βγ. καὶ τὸ βζγ ἄρα τρίγωνον, τῷ γηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ. ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ γβη, τῇ ὑπὸ βγζ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει, τοῦ αβγ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ τῇ ὑπὸ ηγβ ἴση καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν. τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ς

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ αγβ γωνίᾳ, λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αβ, πλευρᾷ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ τῇ αγ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ αγ, ἴση ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ αγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ δβ βγ δυσὶ ταῖς αγ γβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ δγ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγβ τριγώνῳ, ἴσον ἔσται, τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον, ὅπερ ἄτοπον, *οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν, ἡ αβ, τῇ αγ ἴση ἄρα. ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*οὐκ ἄρα μείζων ἡ αβ τῆς αγ quaedam hic inserit exemplar aliud.

ζ

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς αγ, γβ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αδ δβ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, τῷ τε γ καὶ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ γ δ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, τὰ α β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, ὥστε ἴσην εἶναι, τὴν μὲν γα, τῇ δα, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ, τὸ α, τὴν δὲ γβ τῇ δβ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ αδγ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ δγβ πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ δγβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ τῇ δβ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγβ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο, εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





η

Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ

γωνίαν ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν βγ, βάσει τῇ εζ ἴσην. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση. ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν β σημείου ἐπὶ τὸ ε σημεῖον, τῆς δὲ βγ εὐθείας ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ γ σημεῖον ἐπὶ τὸ ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ τῇ εζ. ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς βγ, ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, γα, ἐπὶ τὰς εδ, δζ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ, οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ εη, ηζ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ, οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς βγ βάσεως ἐπὶ τὴν εζ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, αγ πλευραί, ἐπὶ τὰς εδ, δζ. ἐφαρμόσουσι ἄρα. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



θ

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

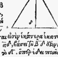
Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ βαγ, δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ δ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ, τῇ αδ ἴση, ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αζ, δύο δὴ αἱ δα, αζ, δυσὶ ταῖς εα, αζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ καὶ βάσις ἡ δζ βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαζ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ βαγ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ι

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ αβ, δεῖ δὴ τὴν αβ δίχα τεμεῖν. συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αγβ γωνία, δίχα τῇ γδ εὐθείᾳ, λέγω ὅτι ἡ αβ εὐθεῖα, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ σημεῖον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, δύο δὴ αἱ αγ, γδ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



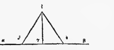
ια

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῇ, τὸ γ. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αγ, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ γδ ἴση, ἡ γε, καὶ

συνεστάτω

συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ ζδε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ζγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δγ τῇ γε, κοινὴ δὲ ἡ ζγ, δύο δὴ αἱ δγ, γζ, δυσὶ ταῖς εγ, γζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγζ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγζ, ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα, τῶν ὑπὸ δγζ, ζγε. τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα, ἡ ζγ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια



ιβ

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ, δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ εὐθείας, τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ, κύκλος γεγράφθω ὁ εζη. καὶ τετμήσθω ἡ εη δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γη, γθ, γε, λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηθ τῇ θε, κοινὴ δὲ ἡ θγ, δύο δὴ αἱ ηθ, θγ, δυσὶ ταῖς εθ, θγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ γη βάσει τῇ γε, ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα, ἡ ὑπὸ γθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθγ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον, τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

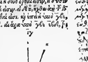
ιβ



ιγ

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ σταθεῖσα, γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ γβα, αβδ. λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, γωνίαι ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γβα, τῇ ὑπὸ αβδ δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ γδ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βε. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γβε, δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ εβδ. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, εβδ, εἰσὶν ἴσαι, πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ, ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ, καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ ἄρα, ταῖς ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ



ιδ

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν,

 ἐπ' εὐθείας

ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ αβ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, δύο εὐθεῖαι αἱ βγ, βδ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ αβδ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν, λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ γβ, ἡ βδ. εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ βγ ἐπ' εὐθείας ἡ βδ, ἔστω τῇ γβ ἐπ' εὐθείας ἡ βε. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γβε ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ αβε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ αβδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα αβε ταῖς ὑπὸ γβα αβδ ἴσαι εἰσί, κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβδ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βε, τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς βδ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ. ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ



ιε

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ γδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αεγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεβ, ἡ δὲ ὑπὸ γεβ τῇ ὑπὸ αεδ. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ αε, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ γεα, αεδ, αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ δε, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ αεδ, δεβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αεδ, δεβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γεα, αεδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γεα αεδ, ταῖς ὑπὸ αεδ. δεβ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αεδ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεα λοιπῇ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ γεβ, δεα, ἴσαι εἰσίν. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. †

† Addit exemplar aliud, ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας, τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

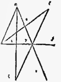
ιε



ις

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ, λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ γβα, βαγ γωνιῶν. τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. καὶ διήχθω ἡ αγ ἐπὶ τὸ η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εγ. ἡ δὲ βε τῇ εζ. δύο δὴ αἱ αε, εβ, δυσὶ ταῖς γε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ ἴση ἐστίν. κατὰ κορυφὴν γάρ. βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ αεβ τρίγωνον, τῷ ζεγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ εγζ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ εγδ, τῆς ὑπὸ εγζ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ τῆς ὑπὸ βαε. ὁμοίως δὴ τῆς βγ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ βγη, τουτέστιν ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων τῆς ὑπὸ αβγ. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια



ιζ

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, λέγω ὅτι τοῦ

αβγ

αβγ [illegible] γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἐκβεβλήσθω [illegible] τὸ δ, καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ αβγ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ, τῶν ὑπὸ αβγ, βγα μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, αγβ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γαβ, αβγ. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ



ιη

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν αγ πλευρὰν, τῆς αβ, λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βγα. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ βδγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ δγβ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ αδβ, τῇ ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ τῆς ὑπὸ αγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ αγβ. παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιθ

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῆς ὑπὸ βγα, λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αγ, πλευρᾶς τῆς αβ μείζων ἐστίν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ αγ τῇ αβ. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ. παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ



κ

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ αβγ, λέγω ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν βα, αγ, τῆς βγ, αἱ δὲ αβ, αγ, τῆς αγ, αἱ δὲ βγ, γα, τῆς αβ. διήχθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ γα ἴση ἡ δα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δα τῇ αγ, ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αδγ, τῇ ὑπὸ αγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ γωνία, τῆς ὑπὸ αγδ μείζων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ δγβ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῆς ὑπὸ βδγ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ δβ ἄρα, τῆς βγ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ δβ, ταῖς αβ, αγ, μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ, ἴση δὲ ἡ δα τῇ αγ, μείζονες ἄρα αἱ βα αγ τῆς βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν αβ, βγ, τῆς γα μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ βγ, γα τῆς αβ. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βγ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν βγ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ βδ, δγ, λέγω, ὅτι αἱ βδ, δγ, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευ-

ρῶν τῶν

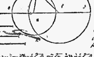
ρῶν τῶν βα αγ, ἐλάσσονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ. διήχθω γὰρ ἡ βδ ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ αβε ἄρα τριγώνου, αἱ δύο πλευραὶ, αἱ αβ αε, τῆς βε μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ, αἱ ἄρα βα αγ, τῶν βε εγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ τοῦ γεδ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ γε εδ, τῆς γδ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ, αἱ γε, εβ ἄρα τῶν γδ δβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν βε εγ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα αγ, πολλῷ ἄρα αἱ βα αγ, τῶν βδ δγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστὶ, τοῦ γδε ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βδγ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γεδ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ αβε τριγώνου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ γεβ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ γεβ, μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ βδγ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κβ

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι, τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ] καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α β γ ὧν αἱ δύο, τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν α β, τῆς γ, αἱ δὲ α γ, τῆς β, καὶ ἔτι αἱ β γ, τῆς α, δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α β γ τρίγωνον συστήσασθαι. ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση, ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἴση ἡ ηθ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δκλ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ κη, λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α β γ, τρίγωνον συνέστηκε

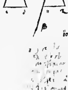


κβ

τὸ κζη. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζδ, τῇ ζκ, ἀλλὰ ἡ ζδ τῇ α, ἐστὶν ἴση καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ α ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ λκθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ηκ. ἀλλὰ ἡ ηθ, τῇ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ηκ ἄρα, τῇ γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζη, τῇ β ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ κζ ζη ηκ τρισὶ ταῖς α β γ, ἴσαι εἰσίν. ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν κζ ζη ηκ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς α β γ τρίγωνον συνίσταται, τὸ κζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ δγε. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ δγε, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν γδ γε, τυχόντα σημεῖα, τὰ δ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι, τρισὶ ταῖς γδ δε γε, τρίγωνον συνεστάτω τὸ αζη, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ, τῇ αζ, τὴν δὲ γε, τῇ αη καὶ ἔτι τὴν δε, τῇ ζη, ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ δγ γε, δυσὶ ταῖς ζα αη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δε, βάσει τῇ ζη



κγ

ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζαη ἐστὶν ἴση, πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ δγε, ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ζαη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

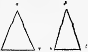
Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ αγ ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ταῖς δε δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίας ὑπὸ εδζ μείζων ἔστω, λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῆς βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ δε εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ δ, τῇ ὑπὸ βαγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ εδη, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ, ἴση ἡ δη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ ηε ζη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε, ἡ δὲ αγ τῇ δη, δύο δὴ αἱ βα αγ, δυσὶ ταῖς εδ δη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδη, ἴση ἐστί, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εη, ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δη, τῇ δζ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δζη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη, τῆς ὑπὸ εηζ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, τῆς ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ εζη, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ εζη γωνίαν τῆς ὑπὸ εηζ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εη, τῆς εζ, ἴση δὲ ἡ εη τῇ βγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ βγ τῆς εζ. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κε

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, βάσις δὲ ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, μείζων ἔστω, λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ μείζων ἐστίν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κς

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, τὰς

δύο

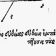
δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ βγα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεζ εζδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ εζδ. ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν βγ τῇ εζ, λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, μία αὐτῶν μείζων ἐστι. ἔστω μείζων, ἡ αβ. καὶ κείσθω τῇ δε ἴση, ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βη, τῇ δε, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, δύο δὴ αἱ βη βγ, δυσὶ ταῖς δε εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστί. καὶ τὸ ηγβ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ηγβ γωνία, τῇ ὑπὸ δζε, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ βγα ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βγη ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ τῇ εζ ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ αβ, τῇ δε, λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ βγ τῇ εζ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ βγ τῇ εζ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων, ἡ βγ, καὶ κείσθω τῇ εζ ἴση ἡ βθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βθ τῇ εζ, ἡ δὲ αβ τῇ δε, δύο δὴ αἱ αβ, βθ δυσὶ ταῖς δε εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβθ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βθα γωνία, τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βθα ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἐστὶν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ αθγ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βθα ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ βγα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ βγ τῇ εζ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε ἴση, δύο δὴ αἱ αβ βγ, δυσὶ ταῖς δε εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἐστίν. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε



κζ

ΕΑΝ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ γδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αεζ εζδ, ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ εὐθείᾳ. εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ γδ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ β δ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ αγ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ β δ μέρη κατὰ τὸ η. τριγώνου δὴ τοῦ ηεζ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αεζ, † μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ εζη, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αβ γδ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται, ἐπὶ τὰ β δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ αγ, αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλαί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς



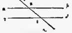
† aliud exemplar sic, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ εζη, ὅπερ ἀδύνατον. habet utrumque recte.

πτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη

ΕΑΝ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ γδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ ηθδ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εηβ τῇ ὑπὸ ηθδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηθ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βηθ ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ βηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ ηθδ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ, λοιπὴ ἄρα, ἡ ὑπὸ αηθ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ γδ. ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη



κθ

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ γδ, εὐθεῖα ἐμπιπτέτω, ἡ εζ, λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηθ ηθδ, ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ηθδ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ αηθ, καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηθ τῆς ὑπὸ ηθδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ βηθ, τῶν ὑπὸ βηθ ηθδ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ βηθ ηθδ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, συμπίπτουσιν, αἱ ἄρα αβ γδ, ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, συμπεσοῦνται, οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ εηβ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ βηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ ηθδ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ εηβ βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ὑπὸ βηθ ηθδ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ

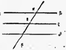


λ

ΑΙ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν αβ γδ, τῇ εζ παράλληλος, λέγω ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ γδ ἐστὶ παράλληλος. ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν, ἡ ηκ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθζ. πάλιν ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εζ γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ηκ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθζ, τῇ ὑπὸ ηκδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αηκ, τῇ ὑπὸ ηθζ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηκ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηκδ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ

λ



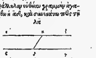
β αβ, τῇ

αβ, τῇ γδ, αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα

ΠΟ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, παράλληλον
Α εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ βγ, δεῖ δὴ διὰ τοῦ α σημείου, τῇ γβ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ δα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ αδγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ δαε. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ αε, εὐθεῖα ἡ αζ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς βγ εζ, εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ αδ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ εαδ αδγ, ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ βγ. διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ εαζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

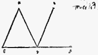
λα



λβ

ΠΑντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρά, ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ, λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ γαβ αβγ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ βγα γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ σημείου τῇ αβ εὐθείᾳ, παράλληλος ἡ γε, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ αγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ αγε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ εγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ αβγ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ βαγ ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ αβγ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ, αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ αγβ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ αβγ βγα γαβ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αγδ αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αγβ γβα γαβ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

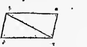
λβ



λγ

ΑἹ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, αἱ αβ γδ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι, αἱ αγ βδ, λέγω ὅτι καὶ αἱ αγ βδ, ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βγ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ βγ, δυσὶ ταῖς βγ γδ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία τῇ γβδ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς αγ βδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ βγ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αγβ γβδ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῇ βδ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ

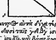


Τῶν

λδ

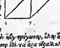
ΤΩΝ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αγδβ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ βγ, λέγω ὅτι τοῦ αγδβ παραλληλογράμμου, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ βγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αγ τῇ βδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι ἡ ὑπὸ αγβ γβδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, δύο τρίγωνα δή ἐστι τὰ αβγ γβδ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ βγα, δυσὶ ταῖς ὑπὸ βγδ γβδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν, τὴν βγ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευράς, ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄρα ἡ μὲν αβ πλευρά, τῇ γδ, ἡ δὲ αγ τῇ βδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ βδγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ αγβ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ βδγ ἴση. τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ βγ, δυσὶ ταῖς γδ βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστί, καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δβ ἴση ἐστί, καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, ἡ ἄρα βγ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



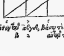
λε

ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εβζγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αζ βγ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τῷ εβζγ. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῇ βγ ἴση ἐστίν, ὥστε καὶ ἡ αδ, τῇ εζ ἴση ἐστί. καὶ κοινὴ ἡ δε, ὅλη ἄρα ἡ αε, ὅλῃ τῇ δζ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ ἴση. δύο δὴ αἱ εα αβ, δυσὶ ταῖς ζδ δγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζδγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαβ ἴση ἐστίν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός. βάσις ἄρα ἡ εβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ εαβ τρίγωνον τῷ ζδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δηε, λοιπὸν ἄρα τὸ αβηδ τραπέζιον, λοιπῷ τῷ εηγζ τραπεζίῳ, ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβγ τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, ὅλῳ τῷ εβγζ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λϛ

ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ εζηθ, ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν βγ, ζη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αθ βη, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον τῷ εζηθ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε γθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ ζη, ἀλλὰ καὶ ἡ ζη, τῇ εθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ βγ ἄρα τῇ εθ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βε γθ. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ αἱ εβ γθ ἄρα, ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστί, τὸ εβγθ. καὶ ἐστιν ἴσον τῷ αβγδ, βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν

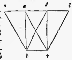


αὐτοῦ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτοῦ, ταῖς βγ αθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ζηθ, τῷ αὐτοῦ τοῦ εβγθ ἐστὶν ἴσον, ὥστε καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τοῦ εζηθ ἴσον ἐστί. τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αδ βγ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ε ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ β τῇ γα παράλληλος ἤχθω ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν εβαγ, δβγζ. καὶ ἴσον τὸ εβγα, τῷ δβγζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ εζ. καί ἐστι τοῦ μὲν εβγα παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ αβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ αβ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει, τοῦ δὲ δβγζ παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ δβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ δγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

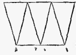
λζ



λη

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ δεζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς βζ, αδ, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αδ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ηθ, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω, ἡ βη, διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ δε παράλληλος ἤχθω ἡ ζθ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ηβγα, δεζθ. καὶ ἴσον τὸ ηβγα, τῷ δεζθ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βζ ηθ. καί ἐστι τοῦ μὲν ηβγα, παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ αβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ αβ διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τοῦ δὲ δεζθ παραλληλογράμμου, ἥμισυ, τὸ ζεδ τρίγωνον, ἡ γὰρ ζδ, διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

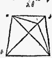
λη



λθ

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, * καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, * καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἔστω τρίγωνα ἴσα, τὰ αβγ δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ, λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ [illegible] γ. εἰ γὰρ μή, ἤχθω, διὰ τοῦ α σημείου τῇ βγ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτοῦ τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ αε. ἀλλὰ τὸ αβγ, τοῦ δβγ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ δβγ ἄρα τρίγωνον τοῦ εβγ ἴσον ἐστί, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αε, τῇ βγ, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα, τῇ βγ ἐστὶ παράλληλος. τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ



Τὰ ἴσα

μ

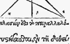
Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα* καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη,* καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Ἔστω τρίγωνα ἴσα, τὰ αβγ γδε, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ γε, λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ βε. εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α τῇ βε παράλληλος, ἡ ζα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζγε τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσὶ τῶν βγ γε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε αζ. ἀλλὰ τὸ αβγ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ δγε τριγώνῳ, καὶ τὸ δγε τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ζγε τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αζ τῇ βε. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα τῇ βε παράλληλός ἐστι. τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Exemplar alterum nõ habet.



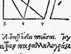
μα

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ αβγδ, τριγώνῳ τῷ εβγ, βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ αε, λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ αβγδ, παραλληλόγραμμον, τοῦ βεγ τριγώνου. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ. ἴσον δή ἐστι τὸ αβγ, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ, τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ αε. ἀλλὰ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ γὰρ αγ διάμετρος, αὐτὸ δίχα τέμνει. ὥστε τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τοῦ εβγ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



μβ

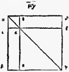
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία, ἡ δ, δεῖ δὴ τῷ αβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. τετμήσθω ἡ βγ, δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εγ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε, τῇ δ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ γεζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ α, τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ αη, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ ζε παράλληλος ἤχθω ἡ γη, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζεγη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ αεγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βε εγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ αη. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τοῦ αεγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ αεγ τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον τῷ αβγ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ γεζ γωνίαν, ἴσην τῇ δοθείσῃ, τῇ δ. τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ αβγ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ζεγη ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γεζ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



μγ

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ, περὶ δὲ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ εθ ζη, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα, τὰ βκ κδ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ βκ παραπλήρωμα τῷ κδ παραπληρώματι. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ

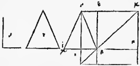
ἡ αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ αδγ τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ εκθα παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ακ, ἴσον ἐστὶ τὸ εακ τρίγωνον τῷ αθκ τριγώνῳ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ κζγ τρίγωνον, τῷ κηγ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ακε τρίγωνον τῷ αθκ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ κζγ τῷ κηγ, τὸ ακε τρίγωνον μετὰ τοῦ κηγ, ἐστὶν ἴσον τῷ αθκ τριγώνῳ μετὰ τοῦ κζγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αδγ ἴσον. λοιπῷ ἄρα τῷ κδ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ, τὸ βκ παραπλήρωμα. παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



μδ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

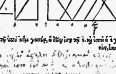
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ δ, δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ. συνεστάτω τῷ γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ βεζη, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εβη, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν βε, τῇ αβ, καὶ διήχθω ἡ ζη, ἐπὶ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν βη εζ παράλληλος ἤχθω ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θβ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αθ εζ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θζ, αἱ ἄρα ὑπὸ αθζ, θζε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ βθη ηζε, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, συμπίπτουσιν, αἱ θβ ζε ἄρα ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ κ σημείου, ὁποτέρᾳ τῶν εα ζθ, παράλληλος ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ θα ηβ, ἐπὶ τὰ λ μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ θλκζ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θκ. περὶ δὲ θκ παραλληλόγραμμα μὲν, τὰ αη με, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα λβ βζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ λβ, τῷ βζ. ἀλλὰ καὶ τὸ βζ, τῷ γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ λβ ἄρα τῷ γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηβε γωνία τῇ ὑπὸ αβμ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ηβε τῇ δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αβμ τῇ δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ λβ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβμ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



με

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ αβγδ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ε, δεῖ δὴ τῷ αβγδ εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, συστήσασθαι ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ ε. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δβ, καὶ συνεστάτω τῷ αβδ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ζθ, ἐν τῇ ὑπὸ θκζ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ηθ εὐθεῖαν τῷ δβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ημ, ἐν τῇ ὑπὸ ηθμ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ε. καὶ ἐπεὶ ἡ ε γωνία, ἑκα-

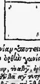


νία, ἑκατέρα τῇ ὑπὸ θκζ, ἡ θμ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ κθμ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ κθη. αἱ ἄρα ὑπὸ ζκθ, κθη, ταῖς ὑπὸ κθη θημ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζκθ κθη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ, τῇ ηθ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, δύο εὐθεῖαι αἱ κθ θμ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ κθ, τῇ θμ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ημ ζη, εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θη, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ μθη θηζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ θηλ. αἱ ἄρα ὑπὸ μθη θηλ, ταῖς ὑπὸ θηζ θηλ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ μθη, θηλ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ὑπὸ θηζ θηλ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ἡ κζ τῇ θη, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ θη τῇ μλ, καὶ ἡ κζ ἄρα, τῇ μλ, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι, αἱ κμ ζλ. καὶ αἱ κμ ζλ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ κζλμ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν αβδ τρίγωνον, τῷ θζ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ δβγ, τῷ ημ, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ εὐθύγραμμον, ὅλῳ τῷ κζλμ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγδ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ κζλμ, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ζκμ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με

ΑΠΟ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τετράγωνον ἀναγράψαι. ἤχθω τῇ αβ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ α, πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ δ σημείου τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δε, διὰ δὲ τοῦ β σημείου τῇ αδ παράλληλος ἤχθω, ἡ βε, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ αδ, τῇ βε. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ βα αδ, δε, βε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ δε εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ αδ, αἱ ἄρα ὑπὸ βαδ, αδε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδε. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ αβε βεδ γωνιῶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

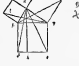
με



μζ

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον ἴσον ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ τετραγώνοις. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τετράγωνον, τὸ βδεγ, ἀπὸ δὲ τῶν βα αγ, τὰ ηβ θγ, καὶ διὰ τοῦ α, ὁποτέρᾳ τῶν βδ γε, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ ζγ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαγ βαη γωνιῶν, πρὸς δή τινι τῇ βα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, δύο εὐθεῖαι, αἱ αγ αη, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστίν, ἡ γα, τῇ αη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ, τῇ αθ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία τῇ ὑπὸ ζβα, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αβγ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ δβα, ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζβγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ βα, δυσὶ ταῖς βζ, βγ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ, ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ ζβγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι τοῦ μὲν αβδ τριγώνου, διπλάσιον τὸ βλ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν βδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς βδ αλ. τοῦ δὲ ζβγ τρι-

μζ



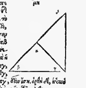
γώνου, διπλάσιον τὸ ηβ τετραγώνου· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι, τὴν ζβ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ, ταῖς ζβ ηγ. τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ βλ παραλληλόγραμμον, τῷ ηβ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν αε βκ, δειχθήσεται καὶ τὸ γλ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ θγ τετραγώνῳ. ὅλον ἄρα τὸ βδεγ τετράγωνον, δυσὶ τοῖς ηβ θγ τετραγώνοις, ἴσον ἐστί. καί ἐστι τὸ μὲν βδεγ τετράγωνον, ἀπὸ τῆς βγ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ηβ θγ, ἀπὸ τῶν βα αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ πλευρῶν τετραγώνοις. ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη

ΕΑΝ τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ πλευρῶν τετραγώνοις, λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αγ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, ἡ αδ, καὶ κείσθω τῇ βα, ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αβ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δα τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα αγ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν δα αγ ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ δαγ γωνία, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αβ αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, ὑπόκειται γάρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δγ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δγ, τῇ βγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, δύο δὴ αἱ δα αγ, δυσὶ ταῖς βα αγ, ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ δγ, βάσει τῇ βγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαγ, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ, ἡ ὑπὸ δαγ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ. ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

ΠΑΝ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ, ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν (σὺν) τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω.

ΕΑΝ ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν, εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ α, βγ, καὶ τετμήσθω ἡ βγ, ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ δ ε σημεῖα, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ὑπὸ τῶν α βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ α δε, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν α εγ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βζ. καὶ κείσθω τῇ α ἴση, ἡ βη, καὶ διὰ τοῦ η τῇ βγ παράλληλος ἤχθω, ἡ ηθ διὰ δὲ τῶν δ ε γ, τῇ βη παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ δκ, ελ, γθ. ἴσον δὴ ἐστι τὸ βθ, τοῖς βκ, δλ, εθ καὶ ἔστι τὸ μὲν βθ, τὸ ὑπὸ τῶν α βγ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ ηβ, βγ. ἴση δὲ ἡ βη τῇ α, τὸ δὲ βκ, τὸ ὑπὸ τῶν α, βδ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ηβ, βδ. ἴση γὰρ ἡ βη τῇ α, τὸ δὲ δλ ἐστὶν ὑπὸ τῶν α, δε. ἴση γάρ ἡ δκ, τουτέστιν ἡ βη τῇ α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ εθ, τὸ ὑπὸ τῶν α εγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ α βδ, καὶ τῷ ὑπὸ α δε, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ α εγ. ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν, εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



β

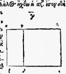
ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. Εὐθεῖα γὰρ ἡ αβ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ σημεῖον, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα αγ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ. ἀναγεγράφθω, ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αδεβ. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ γ ὁποτέρα τῶν αδ βε, παράλληλος ἡ γζ. ἴσον δὴ τὸ αε, τοῖς αζ γε. καὶ ἔστι τὸ μὲν αε, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ δὲ αζ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον. περιέχεται μὲν γὰρ, ὑπὸ τῶν δα αγ. ἴση δὲ ἡ αδ τῇ αβ, τὸ δὲ γε, τὸ ὑπὸ αβ βγ. ἴση γάρ ἡ βε τῇ αβ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



γ

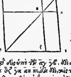
ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων

τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. Εὐθεῖα γὰρ ἡ αβ, τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ σημεῖον, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνου. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, τὸ γδβε, καὶ ἤχθω ἡ εδ ἐπὶ τὸ ζ, καὶ διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν γδ βε παράλληλος ἤχθω ἡ αζ. ἴσον δή ἐστι τὸ αε, τοῖς αδ γε. καὶ ἔστι τὸ μὲν αε, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον. περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν αβ βε. ἴση γὰρ ἡ βε, τῇ βγ. τὸ δὲ αδ, τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἴση γὰρ ἡ δγ, τῇ γβ. τὸ δὲ δβ, τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετράγωνον. τὸ ἄρα, ὑπὸ τῶν αβ βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ τετραγώνου. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



δ

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αδεβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ γ, ὁποτέρᾳ τῶν αδ εβ, παράλληλος ἤχθω ἡ γζ, διὰ δὲ τοῦ η, ὁποτέρᾳ τῶν αβ δε, παράλληλος ἤχθω ἡ θκ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ γζ τῇ αδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ αδβ. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ αδβ, τῇ ὑπὸ αβδ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ βα, τῇ αδ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ γηβ ἄρα γωνία, τῇ ὑπὸ ηβγ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ βγ, πλευρᾷ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ γβ, τῇ ηκ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ γη, τῇ κβ, καὶ ἡ ηκ ἄρα, τῇ κβ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ γηκβ, λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ γη τῇ βκ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ γβ, αἱ ἄρα ὑπὸ κβγ ηγβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ κβγ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηγβ. ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ γηκ ηκβ, ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ γηκβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ θζ τετράγωνόν ἐστι. καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς θη, τουτέστιν, ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα θζ, γκ τετράγωνα, ἀπὸ τῶν αγ, γβ εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αη τῷ ηε, καὶ ἐστὶ τὸ αη, τὸ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἴση γὰρ ἡ ηγ, τῇ γβ, καὶ τὸ ηε ἄρα, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ. τὰ ἄρα αη ηε, ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἔστι δὲ καὶ τὰ θζ, γκ τετράγωνα, ἀπὸ τῶν αγ γβ. τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ θζ γκ αη ηε, ἴσα ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ θζ γκ αη ηε, ὅλον ἐστὶ, τὸ αδεβ, ὅ ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἑτέρα δεῖξις.

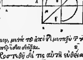
Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, τῶν γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ αδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, τῇ ὑπὸ αδβ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου, αἱ τρεῖς γωνίαι, δυσὶν

ναι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. τοῦ αβδ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, βαδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ αβδ, αδβ, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καί εἰσιν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βγη, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ α. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γηβ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γβη γωνία, τῇ ὑπὸ γηβ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ βγ, τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν γβ, τῇ κη ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ γη, τῇ βκ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ γκ, ἔχει δὲ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ γβκ γωνίαν. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, τὸ γκ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς γβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ θζ τετράγωνόν ἐστι. καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα γκ θζ τετράγωνά ἐστι. καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν αγ γβ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αη, τῷ ηε, καί ἐστι τὸ αη τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἴση γὰρ ἡ γη τῇ γβ, καὶ τὸ ηε ἄρα ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ. τὰ ἄρα αη ηε, ἴσα ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἔστι δὲ καὶ τὰ γκ θζ, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν αγ γβ. τὰ ἄρα γκ θζ αη ηε, ἴσα ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀλλὰ τὰ γκ θζ, καὶ τὰ αη ηε, ὅλον ἐστὶ τὸ αε, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐκ δὴ τούτου, φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, τετράγωνά ἐστιν.

ε

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ γ, εἰς δὲ ἄνισα, κατὰ τὸ δ, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς γβ τετραγώνῳ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, τὸ γεζβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ διὰ μὲν τοῦ δ ὁποτέρᾳ τῶν γε βζ, παράλληλος ἤχθω ἡ δη, διὰ δὲ τοῦ θ ὁποτέρᾳ τῶν αβ εζ, παράλληλος ἤχθω πάλιν, ἡ κμ. καὶ πάλιν διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν γλ βμ, παράλληλος ἤχθω, ἡ ακ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ γθ παραπλήρωμα τῷ θζ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ δμ. ὅλον ἄρα τὸ γμ, ὅλῳ τῷ δζ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ γμ, τῷ αλ ἴσον ἐστὶν, ἐπεὶ καὶ ἡ αγ, τῇ γβ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αλ ἄρα, τῷ δζ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ γθ. ὅλον ἄρα τὸ αθ, τῷ δζ, καὶ δλ, ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν αθ, τῷ ὑπὸ τῶν αδ δβ, ἴσον ἐστίν. ἴση γὰρ ἡ δθ τῇ δβ. τὸ δὲ ζδ δλ ἐστίν, ὁ μνξ γνώμων. καὶ ὁ μνξ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ, τῷ ὑπὸ αδ δβ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ λη, ὅ ἐστιν ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς γδ, ὁ ἄρα μνξ γνώμων, καὶ τὸ λη, ἴσα ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν αδ δβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ μνξ γνώμων, καὶ τὸ λη, ὅλον ἐστὶ τὸ γεζβ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς γβ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δβ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς γβ τετραγώνῳ.

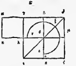


ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς

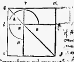
ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω δίχα, κατὰ τὸ γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ βδ, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ τετραγώνῳ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς γδ, τετράγωνον, τὸ γεζδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ διὰ μὲν τοῦ β σημείου

μείω, ὁποτέρᾳ τῶν γδ, δζ, παράλληλος ἤχθω ἡ βη. διὰ δὲ τοῦ θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν αβ, ζε παράλληλος ἤχθω, ἡ κμ. καὶ ἔτι διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν γλ, δμ παράλληλος ἤχθω ἡ ακ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αγ τῇ γβ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αλ τῷ γθ. ἀλλὰ καὶ τὸ γθ τῷ θζ ἴσον ἐστί, καὶ τὸ αλ ἄρα τῷ θζ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ γμ. ὅλον ἄρα τὸ αμ, τῷ νξο γνώμονι ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ αμ ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ δμ, τῇ δβ. καὶ ὁ νξο γνώμων, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ λη, ὅ ἐστιν ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς γβ τετραγώνῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ νξο γνώμονι, καὶ τῷ λη. ἀλλὰ ὁ νξο γνώμων καὶ τὸ λη, ὅλον ἐστὶ τὸ γεζδ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς γδ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ, δβ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς γδ τετραγώνῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας, καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ζ

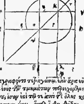
EAN εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ σημεῖον, λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αδεβ. καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ αη, τῷ ηε. κοινὸν προσκείσθω, τὸ γζ. ὅλον ἄρα τὸ αζ ὅλῳ τῷ γε, ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα αζ, γε διπλάσιά ἐστι, τοῦ αζ. ἀλλὰ τὰ αζ, γε, ὁ κλμ ἐστὶ γνώμων, καὶ τὸ γζ τετράγωνον. ὁ κλμ ἄρα γνώμων, καὶ τὸ γζ διπλάσιά ἐστι, τοῦ αζ. ἔστι δὲ τοῦ αζ διπλάσιον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ. ἴση γὰρ ἡ βζ, τῇ βγ. ὁ ἄρα κλμ γνώμων καὶ τὸ γζ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δη, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον. ὁ ἄρα κλμ γνώμων, καὶ τὰ βη, ηδ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ κλμ γνώμων, καὶ τὰ βη, ηδ τετράγωνα, ὅλον ἐστὶ τὸ αδεβ, καὶ τὸ γζ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετράγωνα. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



η

EAN εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ γ σημεῖον, λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ, βγ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ αβ εὐθεῖα, ἡ βδ, καὶ κείσθω τῇ γβ ἴση ἡ βδ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αδ τετράγωνον, τὸ αεζδ. καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ, ἀλλὰ ἡ μὲν γβ, τῇ ηκ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ βδ, τῇ κν, καὶ ἡ ηκ τῇ κν ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρ, τῇ

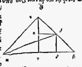
πξ, τῇ ρο, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βγ τῇ βδ, ἡ δὲ ηκ τῇ κψ, ἴσον ἄρα ἐστὶ, τὸ μὲν γκ, τῷ κδ, τὸ δὲ ηρ τῷ ρψ, ἀλλὰ τὸ γκ, τῷ ρψ ἐστὶν ἴσον. παραπληρώματα γὰρ τοῦ γο παραλληλογράμμου. καὶ τὸ κδ ἄρα, τῷ ηρ ἐστὶν ἴσον. τὰ τέσσαρα ἄρα, τὰ δκ, γκ, ηρ, ρψ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. τὰ τέσσαρα ἄρα, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ γκ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ, ἀλλὰ ἡ μὲν βδ, τῇ βκ, τουτέστι τῇ γη ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ γβ, τῇ ηκ, τουτέστι τῇ ηπ ἴση ἐστί. καὶ ἡ γη ἄρα, τῇ ηπ ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν γη, τῇ ηπ, ἡ δὲ πξ, τῇ ρο, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ μὲν αη, τῷ μπ, τὸ δὲ πλ, τῷ ρζ. ἀλλὰ τὸ μπ, τῷ πλ ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ μλ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ αη ἄρα, τῷ ρζ ἴσον ἐστί. τὰ τέσσαρα ἄρα, τὰ αη, μπ, πλ, ρζ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. τὰ τέσσαρα ἄρα, τοῦ αη ἐστὶ τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα, τὰ γκ, κδ, ηρ, ρψ, τοῦ γκ τετραπλάσια, τὰ ἄρα ὀκτὼ, ἃ περιέχει τὸν στυ γνώμονα, τετραπλάσιά τοῦ ακ ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ακ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βδ ἐστὶν, ἴση γὰρ καὶ ἡ βκ, τῇ βδ, τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν αβ βδ τετραπλάσιόν ἐστι, τοῦ ακ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ακ, τετραπλάσιος, καὶ ὁ στυ γνώμων, τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν αβ βδ ἴσον ἐστὶ, τῷ στυ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ξθ, ὅ ἐστιν ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν αβ βδ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ, τῷ στυ γνώμονι, καὶ τῷ ξθ. ἀλλὰ ὁ στυ γνώμων, καὶ τὸ ξθ, ὅλον ἐστὶ τὸ αεζδ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς αδ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν αβ βδ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ



ἀπὸ τῆς αδ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς αβ, καὶ βδ, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα, κατὰ τὸ γ, εἰς δὲ ἄνισα, κατὰ τὸ δ, λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ τετραγώνων. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς, ἡ γε, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ, τῶν αγ γβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εα εβ. καὶ διὰ μὲν τοῦ δ, τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ δζ, διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γε, ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ εαγ γωνία, τῇ ὑπὸ αεγ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ αεγ εαγ, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αεγ εαγ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γεβ εβγ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ηεζ, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ εηζ ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ εγβ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εζη, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηεζ γωνία, τῇ ὑπὸ εζη. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ εη, πλευρᾷ τῇ ζη ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ β γωνία, ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ζδβ, ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ εγβ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βζδ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ β γωνία τῇ ὑπὸ δζβ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δζ πλευρᾷ τῇ δβ ἐστὶν ἴση.

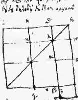


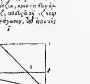
καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ γε, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ἀπὸ τῆς γε, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αγ, γε τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αγ γε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εα τετράγωνον. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ αγε γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εα, διπλάσιόν



πλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εη, τῇ ηζ, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη, τῷ ἀπὸ τῆς ηζ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν εη ηζ τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ ηζ τετραγώνου, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν εη ηζ τετραγώνοις, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εζ τετράγωνον διπλάσιον ἐστι, τοῦ ἀπὸ τοῦ ηζ. ἴση δὲ ἡ ηζ, τῇ γδ. τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ εζ διπλάσιον ἐστι, τοῦ ἀπὸ τοῦ γδ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ αε διπλάσιον, τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αε εζ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αε εζ, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τοῦ αζ τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ αεζ γωνία. τὸ ἄρα ὑπὸ τοῦ αζ τετράγωνον, διπλάσιόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αζ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αδ δζ, ὀρθὴ γάρ, ἡ πρὸς τῷ δ γωνία. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αδ δζ, διπλάσιά ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ, τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ δζ, τῇ δβ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ τετραγώνων. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας, καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, ἡ βδ, λέγω ὅτι, τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ τετραγώνων. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ γε, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν αγ γβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε εβ καὶ διὰ μὲν τοῦ ε, τῇ αδ παράλληλος ἤχθω, ἡ εζ. διὰ δὲ τοῦ δ, τῇ γε παράλληλος ἤχθω ἡ δζ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εγ ζδ, εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν, ἡ εζ, αἱ ὑπὸ γεζ εζδ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ζεβ εζδ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι, συμπίπτουσιν, αἱ ἄρα εβ ζδ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ βδ μέρη, συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεγ, τῇ ὑπὸ εαγ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ γ. ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν, ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εαγ αεγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γεβ εβγ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεβ καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ δβη. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βδη ὀρθή ἴση γάρ ἐστι, τῇ ὑπὸ δγε. ἐναλλὰξ γάρ. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δηβ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ἡ ἄρα ὑπὸ δηβ τῇ ὑπὸ δβη ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ βδ, πλευρᾷ τῇ ηδ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ εηζ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ ζ ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ γ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζεη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εηζ γωνία, τῇ ὑπὸ ζεη. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ηζ, πλευρᾷ τῇ εζ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εγ, τῇ γα, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εγ τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν εγ γα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς γα τετραγώνου τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν εγ γα, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εα. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εα τετράγωνον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ηζ, τῇ εζ. ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς ζε τετραγώνῳ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ζη, ζε διπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ηζ ζε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη τετράγωνον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ γδ, τὸ





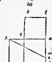
ἄρα ἀπὸ τῆς εη τετράγωνον, διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εα, διπλάσιον, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αε εη τετράγωνα διπλάσιά ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ τετραγώνων, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αε, εη τετραγώνοις, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αη τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αη, διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ γδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δη, τὰ ἄρα ἀπὸ

ἀπὸ τῆς αδ, δβ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι, τῶν ἀπὸ τῆς αγ, γδ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ δβ τῇ αβ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς αδ, αβ τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῆς αγ, γβ τετραγώνων. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας, καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, δεῖ δὴ τὴν αβ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι, τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αβ γδ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ διήχθω ἡ γα, ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση, ἡ εζ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αζ τετράγωνον, τὸ ζθ, καὶ διήχθω ἡ ηθ ἐπὶ τὸ κ. λέγω ὅτι ἡ αβ, τέτμηται κατὰ τὸ θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αβ βθ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αθ τετραγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ αγ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γζ ζα περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εζ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ εβ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γζ ζα περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εβ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, ἴσα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν βα αε, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ α γωνία, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γζ ζα, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα αε. κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αε. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γζ ζα περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν γζ ζα, τὸ ζκ, ἴση γὰρ ἡ αζ τῇ ζη. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ αδ, τὸ ζκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ αδ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ακ, λοιπὸν ἄρα τὸ ζθ ἴσον ἐστὶ τῷ θδ. καί ἐστι τὸ μὲν θδ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βθ, ἴση γὰρ ἡ αβ τῇ βδ, τὸ δὲ ζθ, τὸ ἀπὸ τῆς αθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βθ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θα τετραγώνῳ, ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τέτμηται κατὰ τὸ θ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βθ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς θα τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια



ιβ

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ αβγ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου ἐπὶ τὴν γα ἐκβληθεῖσαν κάθετος, ἡ βδ, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν βα αγ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ γδ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ α σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γα, αδ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς δβ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γδ δβ, ἴσα ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα αδ δβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γδ δβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ δ γωνία, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ δβ ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα αβ τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ τετράγωνον, τῶν ἀπὸ τῶν γα αβ τετραγώνων, μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ

ιβ





ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος καταπίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

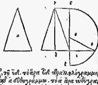
ιγ

ΕΝ τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον, τὸ αβγ, ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν βγ κάθετος, ἡ αδ, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν γβ βα τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ γβ τέτμηται ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γβ βδ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς αδ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γβ βδ δα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ δγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν βδ δα, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ. ὀρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ δ γωνία. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ δγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γβ βα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ γβ βδ. ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἔλαττόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν γβ βα τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν βγ βδ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι, τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιδ

ΤΩ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ α, δεῖ δὴ τῷ α εὐθυγράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τῷ α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, τὸ βδ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εδ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῷ α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον, τὸ βδ, εἰ δὲ οὔ, μία τῶν βε εδ, μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, ἡ βε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ εδ ἴση, ἡ εζ. καὶ τετμήσθω ἡ βζ δίχα κατὰ τὸ η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ηβ ηζ, ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ βθζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δε ἐπὶ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω, ἡ ηθ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βζ τέτμηται, εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ ε,



 τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βε εζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηζ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ηζ, τῇ ηθ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βε εζ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ηε, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηθ, ἴσα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν θε, ηε τετράγωνα, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν βε εζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ηε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θε ηε, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ηε τετράγωνον. λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε εζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εθ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βε εζ, τὸ βδ ἐστίν. ἴση γὰρ ἡ εζ, τῇ εδ. τὸ ἄρα βδ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς θε τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ βδ τῷ α εὐθυγράμμῳ. τὸ α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εθ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ. τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ α, ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς εθ ἀναγραφησόμενον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.



Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥ τις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη, οὐ τέμνει τὸν κύκλον. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵ τινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.



Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι. μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.



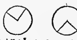
Τμῆμα κύκλου, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.



Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.



Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος, ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ τις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσι τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.



Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶν, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

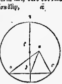


ΤΟΥ

α

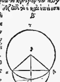
ΤΟΥ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγ, δεῖ δὴ τοῦ αβγ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα, ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δγ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ τετμήσθω ἡ γε δίχα κατὰ τὸ ζ, λέγω ὅτι τὸ ζ, κέντρον τοῦ αβγ κύκλου ἐστί. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηα ηδ ηβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δβ, κοινὴ δὲ ἡ δη, δύο δὴ αἱ αδ, δη δυσὶ ταῖς ηδ δβ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ηα, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ η. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αδη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηδβ ἐστὶν ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζδβ ὀρθή, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζδβ τῇ ὑπὸ ηδβ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ η κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ ζ. τὸ ζ ἄρα σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα, εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

πόρισμα



β

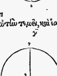
ΕΑΝ κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω τυχόντα δύο σημεῖα, τὰ α β, λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ αεβ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου. καὶ ἔστω τὸ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα δβ, καὶ διήχθω ἡ δζ ἐπὶ τὸ ε καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ δβ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαε, τῇ ὑπὸ δβε. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ δαε, μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ αεβ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δεβ γωνία, τῆς ὑπὸ δαε. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ δαε τῇ ὑπὸ δβε. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δεβ, τῆς ὑπὸ δβε. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μείζων ἄρα ἡ δβ τῆς δε. ἴση δὲ ἡ δβ, τῇ δζ. μείζων ἄρα ἡ δζ, τῆς δε, ἡ ἐλάττων, τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας. ἐντὸς ἄρα. ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



γ

ΕΑΝ ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖάν τινα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἔστω κύκλος, ὁ αβγ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, ἡ γδ, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὴν αβ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ ζ σημεῖον, λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου. καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα εβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζε, δύο δὴ δυσὶν ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ εα, βάσει τῇ εβ ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αζε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βζε ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα, ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ αζε βζε, ὀρθή ἐστιν. ἡ γδ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, τὴν αβ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν



τέμνει, ἀλλὰ

τέμνει. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ γδ, τὴν αβ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω, λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αζ, τῇ ζβ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ εα τῇ εβ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εαζ, τῇ ὑπὸ εβζ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αζε, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ βζε ἴση. δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ εαζ εζβ, τὰς δύο γωνίας, δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν εζ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ αζ, τῇ ζβ. ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

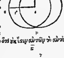
δ

ΕΑΝ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ αγ βδ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα. ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αε, τῇ εγ, τὴν δὲ βε, τῇ εδ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγδ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ζε, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένην, τὴν αγ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ὀρθὴ ἐστὶν ἄρα, ἡ ὑπὸ ζεα. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ζε, εὐθεῖάν τινα τὴν βδ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζεα, ὀρθή. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζεα, τῇ ὑπὸ ζεβ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αγ βδ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



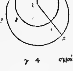
ε

ΕΑΝ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. Δύο γὰρ κύκλοι, οἱ αβγ γδη τεμνέτωσαν ἀλλήλους, κατὰ τὰ β γ σημεῖα, λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ ε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, καὶ διήχθω ἡ εζη ὡς ἔτυχε. καὶ ἐπεὶ τὸ ε σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ εγ τῇ εζ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ε σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ γδη κύκλου ἴση ἐστὶν ἡ εγ, τῇ εη. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ εγ, τῇ εζ ἴση. καὶ ἡ εζ ἄρα τῇ εη ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ, τῶν αβγ γδη κύκλων. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ς

ΕΑΝ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ γδε, ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων, κατὰ τὸ γ σημεῖον, λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν, ἡ ζεβ. ἐπεὶ οὖν τὸ ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζγ, τῇ ζβ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γδε κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζγ, τῇ ζε. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ τῇ ζβ ἴση, καὶ ἡ ζε ἄρα, τῇ ζβ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων, τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ ζ σημεῖον, κέντρον, ἐστὶ τῶν αβγ γδε κύκλων. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

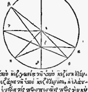


ζ

ΕΑΝ κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ

σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή. τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος, ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἔστω, ἡ αδ, καὶ ἐπὶ τῆς αδ, εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ ζ ὃ μὴ ἔστιν κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ ε. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες, αἱ ζβ ζγ ζη, λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν, ἡ ζα, ἐλαχίστη δὲ, ἡ ζδ, τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ζβ, τῆς ζγ μείζων, ἡ δὲ ζγ, τῆς ζη. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε γε ηε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα εβ εζ, τῆς βζ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ αε, τῇ βε, αἱ ἄρα βε εζ ἴσαι εἰσὶ τῇ αζ. μείζων ἄρα ἡ αζ, τῆς βζ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ γε, κοινὴ δὲ ἡ ζε, δύο δὴ αἱ βε εζ, δυσὶ ταῖς γε εζ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία, ἡ ὑπὸ βεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ γεζ μείζων. βάσις ἄρα ἡ βζ, βάσεως τῆς γζ, μείζων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γζ, τῆς ζη μείζων. πάλιν ἐπεὶ αἱ ηζ ζε, τῆς ηε μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ηε τῇ εδ, αἱ ἄρα ηζ ζε, τῆς εδ μείζονές εἰσι. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ εζ, λοιπὴ ἄρα ἡ ηζ, λοιπῆς τῆς ζδ μείζων ἐστί, μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ζα ἐλαχίστη δὲ, ἡ ζδ, μείζων δὲ ἡ μὲν ζβ, τῆς ζγ ἡ δὲ ζγ, τῆς ζη, λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου δύο μόνον εὐθεῖαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ζδ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ εζ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε, τῇ ὑπὸ ηεζ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ ζεθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ηε, τῇ εθ, κοινὴ δὲ ἡ εζ, δύο δὴ αἱ ηε εζ δυσὶ ταῖς θε εζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θεζ ἴση. βάσις ἄρα ἡ ζη, βάσει τῇ ζθ ἴση ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι τῇ ζη, ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ζκ, καὶ ἐπεὶ ἡ ζκ, τῇ ζη ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ζθ, τῇ ζη ἴση ἐστί, καὶ ἡ ζκ ἄρα τῇ ζθ ἴση ἐστίν, ἡ ἔγγιον, τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. ἢ καὶ οὕτως. ἐπεζεύχθω ἡ εκ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ηε, τῇ εκ, κοινὴ δὲ ἡ ζε, καὶ βάσις ἡ ηζ, βάσει τῇ ζκ ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ηεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κεζ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ηεζ γωνία, τῇ ὑπὸ θεζ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ θεζ ἄρα τῇ ὑπὸ κεζ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ ζ σημείου, ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ηζ, μία ἄρα μόνη. ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

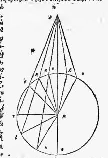


η

ΕΑΝ κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος, ὁ αβγ, εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες, πρὸς τὸν κύκλον αἱ δα δε δζ δγ, ἔστω δὲ ἡ δα διὰ τοῦ κέντρου, λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν αεζγ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δα, ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ακ. μείζων δὲ ἡ μὲν δε, τῆς δζ

τῆς δζ, ἡ δὲ δζ, τῆς δγ. τῶν δὲ πρὸς τὴν θ λ κ η, κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ δη, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς δη ἐλαχίστης, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον. ἡ μὲν δκ, τῆς δλ, ἡ δὲ δλ, τῆς δθ.

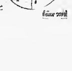


εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ με μζ μγ μη μλ μθ μκ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αμ, τῇ εμ, κοινὴ προσκείσθω, ἡ μδ, ἡ ἄρα αδ, ἴση ἐστὶ ταῖς εμ μδ. ἀλλ᾽ αἱ εμ μδ τῆς εδ μείζονές εἰσι. καὶ ἡ αδ ἄρα, τῆς εδ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ με, τῇ μζ, κοινὴ προσκείσθω, ἡ μδ, αἱ εμ μδ ἄρα, ταῖς ζμ, μδ, ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εμδ, γωνίας τῆς ὑπὸ ζμδ μείζων ἐστί, βάσις ἄρα ἡ εδ, βάσεως τῆς ζδ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ζδ, τῆς γδ μείζων ἐστί. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ δα, μείζων δὲ, ἡ μὲν δε, τῆς δζ, ἡ δὲ δζ, τῆς δγ. καὶ ἐπεὶ αἱ μκ κδ, τῆς μδ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ μη, τῇ μκ λοιπὴ ἄρα ἡ κδ, λοιπῆς τῆς ηδ μείζων ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ηδ, τῆς κδ ἐλάσσων ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί, καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ μλδ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς μδ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ μκ κδ, αἱ ἄρα μκ κδ τῶν μλ λδ, ἐλάττονές εἰσιν, ὧν ἐστὶν ἴση ἡ μκ, τῇ μλ. λοιπὴ ἄρα ἡ δκ, λοιπῆς τῆς δλ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ δλ τῆς δθ ἐλάττων ἐστίν. ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ δη, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν δκ τῆς δλ, ἡ δὲ δλ τῆς δθ, λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι, ἀπὸ τοῦ δ σημείου συμπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς δη ἐλαχίστης. συνεστάτω πρὸς τῇ μδ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ μ, τῇ ὑπὸ κμδ γωνίᾳ, ἴση γωνία, ἡ ὑπὸ δμβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μκ, τῇ μβ, κοινὴ δὲ ἡ μδ, δύο δὴ, αἱ κμ μδ, δυσὶ ταῖς βμ μδ, ἴσαι εἰσίν. ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κμδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βμδ ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ δκ, βάσει τῇ δβ ἴση ἐστί. λέγω δὴ ὅτι τῇ δβ εὐθείᾳ, ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ δν. ἐπεὶ οὖν ἡ δκ, τῇ δν ἐστὶν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ δκ τῇ δβ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ δβ ἄρα τῇ δν ἴση ἐστίν, ἡ ἔγγιον τῆς δη ἐλαχίστης, τῇ ἀπώτερον ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. ἢ καὶ ἄλλως, ἐπεζεύχθω ἡ μν, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κμ, τῇ μν, κοινὴ δὲ ἡ μδ, καὶ βάσις ἡ δκ, βάσει τῇ δν, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ κμδ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δμν ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ κμδ, τῇ ὑπὸ βμδ ἴση ἐστί. καὶ ἡ ὑπὸ βμδ ἄρα, τῇ ὑπὸ νμδ ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν αβγ κύκλον ἀπὸ τοῦ δ σημείου ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς δη ἐλαχίστης προσπεσοῦνται. ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eodē hic schemate uti licet nisi quod ζμ, εμ lineas omittere oportet.

θ

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν αβγ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ δα δβ δγ, λέγω ὅτι τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ βγ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ εδ δζ, διήχθωσαν ἐπὶ τὰ ηκ θλ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ εβ, κοινὴ δὲ ἡ εδ, δύο δὴ, αἱ αε, εδ, δυσὶ ταῖς βε εδ, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις δὲ ἡ δα, βάσει τῇ δβ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αεδ βεδ γωνιῶν. ἡ ηκ ἄρα τὴν αβ δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα, εὐ-



θεῖάν τινα



θεῖαν τινὰ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ δὲ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς ηκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ηκ θλ εὐθεῖαι, ἢ τὸ δ σημεῖον. τὸ δ ἄρα σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι πλείους ἢ δύο ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ δ, ἀπὸ δὲ τοῦ δ πρὸς τὸν αβγ κύκλον, προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ δα δβ δγ, λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ ε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε, διήχθω ἐπὶ τὰ ζ η σημεῖα, ἡ ἄρα ζη διάμετρός ἐστι τοῦ αβγ κύκλου, ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ αβγ ἐπὶ τῆς διαμέτρου, εἴληπταί τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ. μεγίστη μὲν ἔσται ἡ δη, μείζων δὲ ἡ μὲν δγ, τῆς δβ, ἡ δὲ δβ, τῆς δα. ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ ε κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ δ, τὸ δ ἄρα σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου.

ι

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. Εἰ γὰρ δυνατὸν κύκλος ὁ αβγ, κύκλον τὸν δεζ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ β η ζ θ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ βη βθ, δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ λ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῶν κ λ, ταῖς βη βθ, πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ κγ λμ, ἐπὶ τὰ α ε διήχθωσαν σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ αβγ, εὐθεῖά τις ἡ αγ, εὐθεῖαν τινὰ τὴν βθ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τῆς αγ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ, τῷ αβγ, εὐθεῖά τις ἡ νξ εὐθεῖαν τινὰ τὴν βη δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς νξ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ, τοῦ αβγ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς αγ καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ αγ νξ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἢ κατὰ τὸ ο. τὸ ο ἄρα σημεῖον, κέντρον ἐστὶ, τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ δεζ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ ο. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν αβγ, δεζ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ ο, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει, κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἄλλως.



Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ αβγ, κύκλον τὸν δεζ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, τὰ β η θ ζ καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ κη κβ. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ δεζ, εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ κ. καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πρὸς τὸν δεζ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ κβ κζ κη, τὸ κ ἄρα σημεῖον ἐστὶ κέντρον τοῦ δεζ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ τοῦ αβγ κύκλου κέντρον τὸ κ, δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ κ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια

ια

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. Δύο γὰρ κύκλοι, οἱ αβγ αδε, ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς, κατὰ τὸ α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω, τοῦ μὲν αβγ κύκλου κέντρον, τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η, λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ τὸ ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὸ α σημεῖον πεσεῖται. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ αη. ἐπεὶ οὖν αἱ αη ηζ, τῆς ζα, τουτέστι τῆς ζθ (ἴση γὰρ ἡ ζα τῇ ζθ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω) μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ζη. λοιπὴ ἄρα ἡ αη, λοιπῆς τῆς ηθ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ αη, τῇ ηδ. καὶ ἡ ηδ ἄρα,



ἡ ηθ ἀρα, τῆς ηθ μείζων ἐστὶν ἡ ἐλάττων, τῆς μείζονος. ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ α συναφῆς πεσεῖται. ἐπ᾽ αὐτῆς ἄρα. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται τῶν κύκλων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἄλλως.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ηζγ καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἡ γζη, ἐπὶ τὸ θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη αζ. ἐπεὶ οὖν αἱ αη ηζ μείζους εἰσὶ τῆς αζ, ἀλλὰ ἡ αζ ἴση ἐστὶ τῇ ζγ, τουτέστι τῇ ζθ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ζη, λοιπὴ ἄρα ἡ αη, λοιπῆς τῆς ηθ μείζων ἐστὶ, τουτέστιν, ἡ ηδ, τῆς ηθ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν αὐτὸ ἄτοπον.

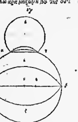
ιβ

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. Δύο γὰρ κύκλοι, οἱ αβγ αδε, ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς, κατὰ τὸ α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν αβγ κύκλου κέντρον τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η, λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, διὰ τῆς κατὰ τὸ α ἐπαφῆς ἐλεύσεται, μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν, ἐρχέσθω ὡς ἡ ζγδη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ αη. ἐπεὶ οὖν τὸ ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζα, τῇ ζγ. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αδε κύκλου, ἴση ἐστὶν, ἡ ηα, τῆς ηδ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζα τῇ ζγ ἴση, αἱ ἄρα ζα αη, ταῖς ζγ, δη, ἴσαι εἰσί. ὥστε ὅλη ἡ ζη, τῶν ζα αη μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ α ἐπαφῆς ἐλεύσεται, ἐπ᾽ αὐτῆς ἄρα. ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιγ

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. Εἰ γὰρ δυνατὸν κύκλος ὁ αβγδ, κύκλου τοῦ εβζδ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ β δ, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν αβγδ κύκλου τὸ κέντρον τὸ η, τοῦ δὲ εβζδ, τὸ θ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ β δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ βηθδ. καὶ ἐπεὶ τὸ η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βη, τῇ ηδ, μείζων ἄρα ἡ βη τῆς θδ, πολλῷ ἄρα μείζων ἡ βθ τῆς θδ. πάλιν ἐπεὶ τὸ θ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ εβζδ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βθ, τῇ θδ, ἐδείχθη δ᾽ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κύκλος, κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐκτὸς. εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ αγκ, κύκλου τοῦ αβγδ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς, κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν αβγδ αγκ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα, τὰ α γ, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. ἀλλὰ τοῦ μὲν αβγδ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ αγκ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δ᾽, ὅτι οὐδὲ ἐντὸς, κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς, ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιδ

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ αβ γδ, λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ αβγδ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὰς

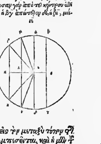
ἐπὶ τὰς αβ γδ, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ εζ εη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε εγ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ εζ, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν αβ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἡ αζ, τῇ ζβ, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς αζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ γδ, τῆς γη ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ αβ, τῇ γδ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αζ, τῇ γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ εγ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τῷ ἀπὸ τῆς εγ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αε, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αζ ζε, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ ζ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς εγ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν εη ηγ. ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ η γωνία. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αζ ζε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γη ηε, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς αζ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς γη. ἴση γάρ ἐστιν ἡ αζ τῇ γη, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζε, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς εη ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ εζ, τῇ εη. ἐν δὲ κύκλῳ, ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι ὦσιν, αἱ ἄρα αβ γδ, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἀλλὰ δὴ αἱ αβ γδ εὐθεῖαι, ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου. τουτέστιν, ἴση ἔστω ἡ εζ τῇ εη. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ αβ τῇ γδ, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν αβ τῆς αζ, ἡ δὲ γδ, τῆς γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ γε, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τῷ ἀπὸ τῆς γε, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αε, ἴσα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν εζ ζα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς γε, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν εη ηγ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν εζ ζα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν εη ηγ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς εη τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ εζ, τῇ εη. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αζ, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς γη ἴσον ἐστίν. ἴση ἄρα ἡ αζ, τῇ γη. καὶ ἔστι τῆς μὲν αζ διπλῆ, ἡ αβ, τῆς δὲ γη διπλῆ, ἡ γδ. ἴση ἄρα ἡ αβ τῇ γδ. ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ



ιε

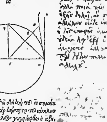
Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ, ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ αδ, κέντρον δὲ, τὸ ε, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς αδ διαμέτρου ἔστω ἡ βγ, ἀπώτερον δὲ, ἡ ζη, λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ αδ, μείζων δὲ ἡ βγ, τῆς ζη. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς βγ ζη κάθετοι αἱ εθ εκ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ βγ ἀπώτερον δὲ ἡ ζη, μείζων ἄρα ἡ εκ τῆς εθ, κείσθω τῇ εθ ἴση ἡ ελ, καὶ διὰ τοῦ λ τῇ εκ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ λμ, διήχθω ἐπὶ τὸ ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εμ εν εζ εη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εθ τῇ ελ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ βγ, τῇ μν. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εμ, ἡ δὲ εδ, τῇ εν, ἡ ἄρα αδ, ταῖς με εν, ἴση ἐστὶν, ἀλλ᾽ αἱ με, εν τῆς μν, μείζονές εἰσι. καὶ ἡ αδ, ἄρα τῆς μν, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μν τῇ βγ, ἡ αδ ἄρα τῆς βγ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ με εν, δύσι ταῖς ζε εη ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μεν, γωνίας τῆς ὑπὸ ζεη μείζων ἐστὶ, βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς ζη μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ μν, τῇ βγ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ βγ, τῆς ζη μείζων ἐστί. μεγίστη ἄρα ἡ αδ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ βγ, τῆς ζη, ἐν κύκλῳ ἄρα, μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ις

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγ, περὶ κέντρον τὸ δ, καὶ διάμετρον, τὴν αβ, λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ α, τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγδ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δαγ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αγδ. αἱ ἄρα

δύο τῶν ὑπὸ δαε, εαδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ α σημείου, τῇ βα πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω ὡς ἡ αε. λέγω ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε αε εὐθείας καὶ τῆς γθα περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ζα, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν ζα ἡ δη, καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αηδ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ δαη, μείζων ἄρα ἡ αδ, τῆς δη. ἴση δὲ ἡ δα, τῇ δθ, μείζων ἄρα ἡ δθ, τῆς δη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται. λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς βα εὐθείας, καὶ τῆς γθα περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν. ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς γθα περιφερείας, καὶ τῆς αε εὐθείας, ἁπάσης ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν. εἰ γάρ ἐστι τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς βα εὐθείας, καὶ τῆς γθα περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς γθα περιφερείας, καὶ τῆς αε εὐθείας εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε γθα περιφερείας, καὶ τῆς αε εὐθείας, παρεμπεσεῖται εὐθεῖα ἥ τις ποιήσει, μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς βα εὐθείας, καὶ τῆς γθα περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης, ὑπό τε τῆς γθα περιφερείας, καὶ τῆς αε εὐθείας, οὐ παρεμπίπτει δέ, οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς βα εὐθείας, καὶ τῆς γθα περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα, ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη. οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς γθα περιφερείας, καὶ τῆς αε εὐθείας. ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη, ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα, ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιζ

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος, ὁ βγδ, δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου τοῦ βγδ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω, ἡ αε, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, κύκλος γεγράφθω ὁ αζη, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, τῇ εα πρὸς ὀρθὰς ἤχθω, ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εβζ αβ, λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ α σημείου τοῦ βγδ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ αβ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ε κέντρον ἐστὶ τῶν βγδ αζη κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν εα, τῇ εζ, ἡ δὲ εδ, τῇ εβ. δύο δὴ αἱ αε εβ, δύσι ταῖς ζε εδ, ἴσαι εἰσί. καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ ε. βάσις ἄρα ἡ δζ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστί. καὶ τὸ δεζ τρίγωνον τῷ εβα τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, ἡ ὑπὸ εβα, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ εδζ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εβα. καί ἐστιν ἡ εβ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ᾽ ἄκρας ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ἡ αβ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ βγδ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιη

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν, ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα, ἡ δε κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγ κύκλου τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ γ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. λέγω ὅτι ἡ ζγ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὴν δε κάθετος ἡ ζη. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζηγ γωνία ὀρθή ἐστιν,

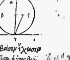
ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηγζ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ζγ τῆς ζη. ἴση δὲ ἡ ζγ, τῇ ζβ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζβ τῆς ζη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἡ ζη κάθετός ἐστιν, ἐπὶ τὴν δε. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ζγ, ἡ ζγ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν δε. ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιθ

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

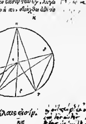
Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ δε κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ γ πρὸς ὀρθὰς τῇ δε ἤχθω ἡ γα, λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς αγ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ αβγ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα, ἡ δε, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ζγ, ἡ ζγ ἄρα κάθετός ἐστιν, ἐπὶ τὴν δε, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζγε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγε ὀρθή. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζγε, τῇ ὑπὸ αγε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τὸ ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς αγ. ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κ

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

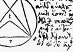
Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ, γωνία ἔστω, ἡ ὑπὸ βεγ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ βαγ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν βγ, λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν, ἡ ὑπὸ βεγ γωνία, τῆς ὑπὸ βαγ, ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ αε, διήχθω ἐπὶ τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ εα τῇ εβ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εαβ, τῇ ὑπὸ εβα ἴση ἐστίν. αἱ ἄρα ὑπὸ εαβ εβα γωνίαι, τῆς ὑπὸ εαβ διπλάσιαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ βεζ, ταῖς ὑπὸ εαβ εβα, καὶ ἡ ὑπὸ βεζ ἄρα, τῆς ὑπὸ εαβ ἐστὶ διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ, τῆς ὑπὸ εαγ ἐστὶ διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βεγ, ὅλης τῆς ὑπὸ βαγ, ἐστὶ διπλῆ, κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω γωνία ἑτέρα ἡ ὑπὸ βδγ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ δε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι διπλῆ ἐστὶν, ἡ ὑπὸ ηεγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδγ. ὧν ἡ ὑπὸ ηεβ, διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ εδβ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βεγ, διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ βδγ. ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ βαεδ, γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ βαδ βεδ, λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ βαδ βεδ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰλήφθω γὰρ τοῦ αβγδ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ ζδ, καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ βζδ γωνία, πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν βγδ. ἡ ἄρα ὑπὸ βζδ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ βζδ, καὶ τῆς ὑπὸ βεδ ἐστὶν διπλασίων. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, τῇ ὑπὸ βεδ. ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κβ

ΤΩΝ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω, τὸ αβγδ, λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ βδ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου, αἱ τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, τοῦ αβγ, αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ γαβ αβγ βγα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ γαβ, τῇ ὑπὸ βδγ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσί, τῷ βαδγ. ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ αδβ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσὶ τῷ αδγβ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ, ταῖς ὑπὸ βαγ αγβ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αβγ, ταῖς δυσὶ ὁμοῦ, τῇ πρὸς τὸ α, καὶ γ, καὶ χωρὶς τῇ μιᾷ τῇ πρὸς τὸ δ. αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ βαγ αγβ, ταῖς ὑπὸ αβγ αδγ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ βαγ αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αβγ αδγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαδ δγβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων, αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ



κγ

ΕΠΙ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα, οὐ συσταθήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ, δύο τμήματα κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα συνεστάτω, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αγβ αδβ, καὶ διήχθω ἡ αγδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γβ δβ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ, τμῆμα, τῷ αδβ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ γωνία, τῇ ὑπὸ αδβ, ἡ ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια, καὶ ἄνισα συσταθήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

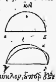
κγ



κδ

ΤΑ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, τῶν αβ γδ ὅμοια τμήματα κύκλων, τὰ αεβ γζδ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αεβ τμῆμα, τῷ γζδ τμήματι. ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αεβ τμήματος ἐπὶ τὸ γζδ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν α σημείου ἐπὶ τὸ γ, τῆς δὲ αβ εὐθείας ἐπὶ τὴν γδ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ β σημεῖον ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ, τῇ γδ, ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν γδ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ αεβ, τμῆμα, ἐπὶ τὸ γζδ, εἰ γὰρ ἡ αβ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν γδ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ αεβ τμῆμα, ἐπὶ τὸ γζδ μὴ ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ γηδ, κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει ἐπὶ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ γηδ τὸν γζδ ἐπὶ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ γηδ, ὅπερ ἐστὶ πάλιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς αβ εὐθείας ἐπὶ τὴν γδ, οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ αεβ τμῆμα, ἐπὶ τὸ γζδ, ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ



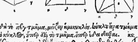
κε

ΚΥκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπερ ἐστὶ τμῆμα. Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου, τὸ αβγ, δεῖ δὴ τοῦ αβγ τμήματος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπερ ἐστὶ τμῆμα, τετμήσθω γὰρ ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ σημείου τῇ αγ πρὸς ὀρθὰς, ἡ δβ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, ἡ ὑπὸ αβδ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ βαδ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ βα εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α τῇ ὑπὸ αβδ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ βαε, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ε, ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία, τῇ ὑπὸ βαε, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εβ εὐθεῖα, τῇ αε. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ. κοινὴ δὲ ἡ δε, δύο δὴ αἱ αδ δε, δυσὶ ταῖς γδ δε,

 ἴσαι εἰσίν,

ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αδε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστίν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἄρα ἡ αε, βάσει τῇ γε ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ αε τῇ βε ἐδείχθη ἴση. καὶ ἡ βε ἄρα τῇ γε ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα, αἱ αε εβ εγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν αε εβ εγ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων. καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, καὶ δῆλον ὡς τὸ αβγ τμῆμα, ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τό, τὸ ε κέντρον αὐτοῦ, ἐκτὸς τυγχάνειν. ὁμοίως δὲ κἂν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ βαδ, τῆς αδ ἴσης γενομένης, ἑκατέρᾳ τῶν βδ δγ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ δα δβ δγ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ δ κέντρον, τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ αβγ ἡμικύκλιον. ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ αβδ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ βαδ, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῇ βα εὐθείᾳ, καὶ τῷ α σημείῳ, τῇ ὑπὸ αβδ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ αβγ τμήματος, πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς δβ, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ αβγ τμῆμα, μεῖζον ἡμικυκλίου. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, ὅπερ δεῖ, τὸ τμῆμα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε



κϛ

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι, οἱ αβγ δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις, αἱ ὑπὸ βηγ εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ εδζ. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βκγ περιφέρεια, τῇ ελζ περιφερείᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ εζ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ αβγ δεζ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων, δύο δὴ αἱ βη ηγ, δυσὶ ταῖς εθ θζ, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ η, γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ θ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ βγ βάσει τῇ εζ, ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ α γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ βαγ τμῆμα, τῷ εδζ τμήματι. καί ἐστιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, τῶν βγ εζ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἴσον ἄρα τὸ βαγ τμῆμα, τῷ εδζ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ αβγ κύκλος, ὅλῳ τῷ δεζ κύκλῳ ἴσος. λοιπὴ ἄρα ἡ βκγ περιφέρεια, τῇ ελζ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση. ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ



κζ

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς αβγ δεζ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν βγ εζ, πρὸς μὲν τοῖς η θ κέντροις, γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ βηγ εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ βαγ εδζ, λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, τῇ ὑπὸ εθζ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εθζ, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστίν. εἰ δὲ οὔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ βηγ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ βη εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ η, τῇ ὑπὸ εθζ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ βηκ. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις

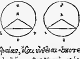
κζ



κέντροις ὦσιν. ἴση ἄρα ἡ βκ περιφέρεια, τῇ εζ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ εζ, τῇ βγ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ βγ ἄρα, τῇ βκ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἄνισος ἐστὶν, ἡ ὑπὸ βηγ γωνία, τῇ ὑπὸ εθζ, ἴση ἄρα. καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ βηγ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ α, τῆς δὲ ὑπὸ εθζ, ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ δ, ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ α γωνία, τῇ πρὸς τῷ δ. ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις, ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα, τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι, οἱ αβγ δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν, αἱ βγ εζ. τὰς μὲν βαγ εδζ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ βηγ εθζ ἐλάττονας, λέγω ὅτι ἡ μὲν βαγ, μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ, τῇ εδζ, μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ βηγ ἐλάττων περιφέρεια, ἴση τῇ εθζ ἐλάσσονι. εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ κ λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ κβ κγ λε λζ, καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων. δύο δὴ αἱ βκ κγ, δυσὶ ταῖς ελ λζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βκγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ελζ ἴση ἐστὶν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν. ἴση ἄρα ἡ βηγ, τῇ εθζ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ αβγ κύκλος, ὅλῳ τῷ δεζ κύκλῳ ἴσος, λοιπὴ ἄρα ἡ βαγ περιφέρεια, λοιπῇ τῇ εδζ περιφερείᾳ, ἴση ἐστίν. ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κθ

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας, ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ αβγ δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν, αἱ βηγ, εθζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ βγ εζ εὐθεῖαι, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βγ εὐθεῖα τῇ εζ. εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ κ λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βκ κγ ελ λζ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βηγ περιφέρεια, τῇ εθζ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βκγ, τῇ ὑπὸ ελζ, καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ αβγ δεζ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων, δύο δὴ αἱ βκ κγ, δυσὶ ταῖς ελ λζ, ἴσαι εἰσί. καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστίν. ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις, ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας, ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λ

ΤΗΝ δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια, ἡ αδβ, δεῖ δὴ τὴν αδβ περιφέρειαν, δίχα τεμεῖν, ἐπεζεύχθω ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου τῇ αβ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ δβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ αγ, τῇ γβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, δύο δὴ αἱ αγ γδ, δυσὶ ταῖς βγ γδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση. ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ δβ, ἴση ἐστὶν, αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι, ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν αδ δβ περιφερειῶν, ἐλάττων ἡμικυκλίου. ἴση ἄρα ἡ αδ περιφέρεια, τῇ δβ περιφερείᾳ, ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



λα

ΕΝ κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Ἔστω κύκλος, ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω, ἡ βγ, κέντρον δὲ τὸ ε, καὶ

ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ βε, αγ, αδ, δγ. λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ βαγ ἡμικυκλίῳ γωνία, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ αβγ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι, γωνία ἡ ὑπὸ αβγ ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ αδγ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ διήχθω ἡ βα, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εα, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εαβ, τῇ ὑπὸ εβα. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εα, τῇ εγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ γαε. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ αγβ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζαγ, ἐκτὸς τοῦ αβγ τριγώνου, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ αγβ γωνίαις ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ ζαγ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα, ἡ ἄρα ἐν τῷ βαγ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ τοῦ αβγ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ βαγ δύο ὀρθῶν ἐλάττονες εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία. καὶ ἔστιν ἐν τῷ αβγ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ αβγδ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ αδγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ αβγ ἐλάττων ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔστιν ἐν τῷ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς αβγ περιφερείας, καὶ τῆς αγ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς αδγ περιφερείας, καὶ τῆς αγ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν βα αγ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς αβγ περιφερείας, καὶ τῆς αγ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν αγ αζ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς γα εὐθείας, καὶ τῆς αδγ περιφερείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα



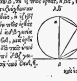
Ἄλλως ἀπόδειξις. τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ βαγ, ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ βαε, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεβ διπλῆ, τῆς ὑπὸ εαγ, αἱ ἄρα ὑπὸ αεβ αεγ, διπλασίονες εἰσί, τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ αεβ αεγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστι, διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι, ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

λβ

ΕΑΝ κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ αβγδ, ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ εζ, κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ β σημείου, διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν αβγδ κύκλον, τέμνουσα αὐτὸν ἡ βδ. λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ βδ μετὰ τῆς εζ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου, γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ζβδ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ δαβ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ εβδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ δγβ τμήματι. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, τῇ εζ πρὸς ὀρθάς, ἡ βα, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βδ περιφερείας, τυχὸν σημεῖον τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ δγ γβ, καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ αβγδ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα, ἡ εζ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ β ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ βα, ἐπὶ τῆς βα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ κύκλου. ἡ ἄρα ὑπὸ αδβ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα, ὀρθή ἐστι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βαδ αβδ, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβζ ὀρθή, ἡ ἄρα ὑπὸ αβζ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ βαδ αβδ, κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβδ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δβζ γωνία, ἴση ἐστί, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ βαδ,

λβ



καὶ ἐπεὶ

καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ αβγδ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ δβζ δβε, ταῖς ὑπὸ βαδ βγδ, ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ βαδ τῇ ὑπὸ δβζ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δβε, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι, τῷ δγβ, τῇ ὑπὸ δγβ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση, ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται, ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ

ἘΠΙ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ πρὸς τῷ γ, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῆς αβ, γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ πρὸς τῷ γ γωνίᾳ. ἡ γὰρ πρὸς τῷ γ ἤτοι ὀξεῖα ἐστίν, ἢ ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ α σημείῳ, τῇ πρὸς τῷ γ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ βαδ, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, καὶ ἤχθω τῇ αδ ἀπὸ τοῦ α σημείου πρὸς ὀρθάς, ἡ αε, καὶ τετμήσθω ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθάς, ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηβ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αζ, τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζη, δύο δὴ αἱ αζ ζη, δυσὶ ταῖς ζβ ζη, ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αζη, τῇ ὑπὸ ηζβ ἴση, βάσις ἄρα ἡ αη, βάσει τῇ βη ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ αη κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ β. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ αβε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβ. ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς αε διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ α τῇ αε πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ αδ, ἡ αδ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεὶ τοῦ αβε κύκλου ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ α ἁφῆς ἐπὶ τὸν αβε κύκλον, διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ δαβ γωνία, ἴση ἐστί, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ αεβ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ πρὸς τῷ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῷ γ ἄρα γωνία, ἴση ἐστὶ, τῇ ~~ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δαβ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ πρὸς τῷ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῷ γ ἄρα γωνία, ἴση ἐστὶ, τῇ~~ ὑπὸ αεβ, ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς αβ, τμῆμα κύκλου γέγραπται, τὸ αεβ δεχόμενον γωνίαν, τὴν ὑπὸ αεβ, ἴσην τῇ δοθείσῃ, τῇ πρὸς τῷ γ, ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω, ἡ πρὸς τῷ γ, καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς αβ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ πρὸς τῷ γ ὀρθῇ, συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ βαδ. ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς β καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ αβ, δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ζα ζβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ αεβ, ἐφάπτεται ἄρα ἡ αδ εὐθεῖα, τοῦ αβε κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ α γωνίαν, καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαδ γωνία, τῇ ἐν τῷ αεβ τμήματι ἴση, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῷ γ ἐστὶν ἴση. γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς αβ, τμῆμα κύκλου τὸ αεβ δεχόμενον γωνίαν ἴσην, τῇ πρὸς τῷ γ. ἀλλὰ δὴ, ἡ πρὸς τῷ γ, ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ

λγ

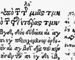


συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ α σημείῳ, ἡ ὑπὸ βαδ ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ αδ πρὸς ὀρθάς, ἤχθω ἡ αε, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηβ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζβ, καὶ κοινὴ ἡ ζη, δύο δὴ αἱ ζη αζ, δυσὶ ταῖς βζ ζη ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ὑπὸ αζη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βζη, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αη, βάσει τῇ βη, ἴση ἐστίν, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ αη, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ β, ἐρχέσθω ὡς αεβ καὶ ἐπεὶ τῇ αε διαμέτρῳ, ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθάς ἦκται ἡ αδ, ἡ αδ ἄρα, ἐφάπτεται τοῦ αεβ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ α ἐπαφῆς, διῆκται ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ βαδ γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι, τῷ αθβ, συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ βαδ γωνία, τῇ πρὸς τῷ γ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ἐν τῷ αθβ ἄρα τμήματι γωνία,

μάτι γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, ὑπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς αβ, γέγραπται τμῆμα κύκλου, τὸ αθβ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

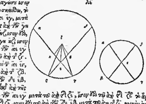
λδ

ΑΠΟ τοῦ δοθέντος κύκλου, τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ πρὸς τῷ δ, δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ αβγ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ γωνίᾳ. ἤχθω τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ εζ κατὰ τὸ β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εζ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ πρὸς τῷ δ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ ζβγ. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ αβγ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ εζ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ β ἐπαφῆς διῆκται ἡ βγ. ἡ ὑπὸ ζβγ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ βαγ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζβγ, τῇ πρὸς τῷ δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ἐν τῷ βαγ ἄρα τμήματι γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ αβγ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ βαγ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



λε

ΕΑΝ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ αβγδ, δύο εὐθεῖαι αἱ αγ βδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αε εγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε εβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, εἰ μὲν οὖν αἱ αγ βδ διὰ τοῦ κέντρου εἰσίν, ὥστε τὸ ε κέντρον εἶναι τοῦ αβγδ κύκλου, φανερὸν ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν αε εγ δε εβ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε εγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν δε εβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἔστωσαν δὴ αἱ αγ δβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ αβγδ, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὰς αγ δβ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ζη ζθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ ζγ ζε, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ηζ, εὐθεῖάν τινα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν αγ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ἴση ἄρα, ἡ αη, τῇ ηγ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αγ, τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε εγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηγ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς ηζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε εγ, μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ηε ηζ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γη ηζ ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εη ηζ, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γη ηζ, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε εγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζγ. ἴση δὲ ἡ ζγ, τῇ ζβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε εγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε εβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς ζβ,



ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε εγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε εγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δε εβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ζε, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αε εγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε εβ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

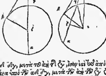
λϛ

ΕΑΝ κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν, αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ, ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε

σημείου

σημείου ἐπὶ τὴν κυρτὴν περιφέρειαν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ. Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς, τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν αβγ κύκλον, προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ δγα δβ, καὶ ἡ μὲν δγα, τεμνέτω τὸν αβγ κύκλον, ἡ δὲ δβ ἐφαπτέσθω. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ γδ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς δβ τετραγώνῳ. ἡ δγα, ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ ζ, κέντρον τοῦ αβγ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζβδ, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ αγ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ γδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζδ, ἴση δὲ ἡ ζγ, τῇ ζβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζδ, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζδ, τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ βδ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ζβδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ, δγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ βδ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδ δγ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς δβ ἐφαπτομένης.

λς

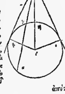


Ἀλλὰ δὴ ἡ δγα μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου, τοῦ αβγ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν αγ κάθετος ἤχθω, ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εβ εγ εδ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβδ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ εζ, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν αγ, πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ἡ αζ ἄρα, τῇ ζγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ αγ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ γδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζδ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τὰ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ζγ ζε, ἴσα ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν ζδ ζε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν δζ ζε, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς δε, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ εζδ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γζ ζε, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εδ, ἴση δὲ ἡ εγ, τῇ εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εβ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς εδ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν εβ βδ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ εβδ γωνία, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εβ, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν εβ βδ· κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ ἀπὸ τῆς εβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδ δγ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ

ΕΑΝ κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα, ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

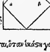
λζ



Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν αβγ κύκλον, προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ δγα δβ, καὶ ἡ μὲν δγα τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ δβ, προσπιπτέτω. ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αδ δγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δβ, λέγω ὅτι ἡ δβ, ἐφάπτεται τοῦ αβγ κύκλου. ἤχθω γὰρ τοῦ αβγ ἐφαπτομένη ἡ δε, καὶ εἰλήφθω τὸ ζ, κέντρον τοῦ αβγ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζε ζβ ζδ, ἡ ἄρα ὑπὸ ζεδ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ δε ἐφάπτεται τοῦ αβγ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ δγα, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δγ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς δε, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αδ δγ ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δε, ἴσον τῷ

ἀπὸ τῆς δε, ἴση ἄρα ἡ δα, τῇ δβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζε, τῇ ζβ, ἴση. δύο δὴ αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς δβ, βζ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δβζ, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δεζ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δβζ, καί ἐστιν ἡ ζβ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐφάπτεται τοῦ αβγ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς αγ τυγχάνῃ. ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ
ΤΕΤΑΡΤΟΝ.



Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

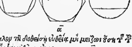
Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου, ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας, τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

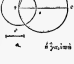


Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς, ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

ᾱ

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

ᾱ



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἡ δ, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγ κύκλον τῇ δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. ἤχθω τοῦ αβγ κύκλου διάμετρος, ἡ βγ, εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ δ γεγονὸς ἂν εἴη, τὸ ἐπιταχθέν. ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν αβγ κύκλον, τῇ δ εὐθείᾳ ἴση, ἡ βγ, εἰ δὲ οὔ, μείζων ἐστὶν ἡ βγ, τῆς δ, καὶ κείσθω τῇ δ ἴση ἡ γε, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γε, κύκλος γεγράφθω ὁ εαζ, καὶ ἐπεζεύχθω

ἡ γα, ἐπεὶ

ἡ γα, ἐπεὶ οὖν τὸ γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ αεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ γα τῇ γε, ἀλλὰ ἡ δ, τῇ γε ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ δ ἄρα, τῇ αγ ἐστὶν ἴση. εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν αβγ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τῇ δ ἴση ἐνήρμοσται ἡ γα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β

ΕΙΣ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ δεζ, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγ κύκλον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. ἤχθω τοῦ αβγ κύκλου ἐφαπτομένη, ἡ ηαθ, κατὰ τὸ α, καὶ συνεστάτω πρὸς μὲν τῇ αθ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ ηαβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ.

β

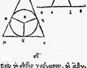


ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ αβγ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ θαη, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς διῆκταί τις ἡ αγ, ἡ ἄρα ὑπὸ θαγ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ αβγ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ θαγ, τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αβγ ἄρα γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστί, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν αβγ κύκλον. εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ

ΠΕρὶ τὸν δοθέντα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ δεζ, δεῖ δὴ περὶ τὸν αβγ κύκλον τῷ δεζ τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ εζ, κατὰ τὰ θ η σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ αβγ κύκλου κέντρον, τὸ κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ κβ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ κβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ κ, τῇ μὲν ὑπὸ δεη γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ βκα, τῇ δὲ ὑπὸ δζθ, ἴση ἡ ὑπὸ βκγ, καὶ διὰ τῶν αβγ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ αβγ κύκλου, αἱ λαμ μβν νγλ. καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ αβγ κύκλου αἱ λμ μν νλ κατὰ τὰ α β γ, ἀπὸ δὲ τοῦ κ κέντρου, ἐπὶ τὰ α β γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσίν, αἱ κα κβ κγ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς αβγ, σημείοις γωνίαι, καὶ ἐπεὶ τοῦ αμβκ τετραπλεύρου, αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ αμβκ τετράπλευρον, ὧν αἱ ὑπὸ καμ κβμ γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσιν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ακβ αμβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δεη δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ακβ αμβ, ταῖς ὑπὸ δεη δεζ, ἴσαι εἰσίν. ὧν ἡ ὑπὸ ακβ, τῇ ὑπὸ δεη ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ λνμ, τῇ ὑπὸ δζε ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ μλν, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστί, τὸ λμν τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν αβγ κύκλον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ



δ

ΕΙς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, δεῖ δὴ εἰς τὸ αβγ τρίγωνον, κύκλον ἐγγράψαι. τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ αβγ βγα, γωνίαι, δίχα ταῖς βδ γδ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις, κατὰ τὸ δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰς αβ βγ γα εὐθείας κάθετοι, αἱ δε δζ δη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβδ γωνία, τῇ ὑπὸ γβδ, δίχα γὰρ τέμνεται ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ βδ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βεδ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ βζδ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι, τὰ εβδ δβζ, τὰς δύο γωνίας, δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γω-

νιῶν κοινὴν

νιῶν, κοινὴ γὰρ αὐτῶν ἡ βδ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ δε, τῇ δζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δη, τῇ δζ ἐστὶν ἴση, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ε ζ η κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν αβ βγ γα εὐθειῶν. διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς ε ζ η σημείοις γωνίας, εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ε ζ η γραφόμενος κύκλος τέμνει τὰς αβ βγ γα εὐθείας, ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ αβγ τρίγωνον. εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ αβγ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ εζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

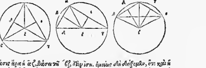


ε

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ αβγ, κύκλον περιγράψαι. τετμήσθωσαν αἱ αβ αγ δίχα κατὰ τὰ δ ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν δ ε σημείων, ταῖς αβ αγ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ δζ, εζ, συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ αβγ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς βγ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς τῆς βγ, συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ ζγ ζα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν, ἡ αδ, τῇ δβ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, βάσις ἄρα ἡ αζ, βάσει τῇ ζβ, ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ γζ, τῇ αζ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ζβ τῇ ζγ ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ζα ζβ ζγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ζα ζβ ζγ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος, περὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ περιγεγράφθω, ὡς ὁ αβγ. Ἀλλὰ δὴ αἱ δζ εζ, συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς βγ εὐθείας, κατὰ τὸ ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστί, τοῦ περὶ τὸ αβγ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

ἀλλὰ δὴ αἱ δζ εζ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ αβγ τριγώνου, κατὰ τὸ ζ, πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ ζβ ζγ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ δβ, κοινὴ δὲ



καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, βάσις ἄρα ἡ αζ, βάσει τῇ βζ, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ γζ, τῇ ζα ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ βζ, τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ζα ζβ ζγ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος, περὶ τὸ αβγ τρίγωνον. καὶ γεγράφθω, ὡς ὁ αβγ, περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον, κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Καὶ φανερὸν ὅτι ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ βαγ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς βγ, ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθή ἐστιν, ὅταν δὲ ἐκτὸς τῆς βγ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, ἡ ὑπὸ βαγ, ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ, ἡ δοθεῖσα γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται, αἱ δζ εζ. ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς βγ, ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγδ, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγδ κύκλον, τετράγωνον ἐγγράψαι, ἤχθωσαν τοῦ αβγδ, κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, αἱ αγ βδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ βγ γδ δα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εδ, κέντρον γὰρ τὸ ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ εα, βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ αδ



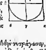
τῇ αδ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν βγ γδ, ἑκατέρᾳ τῶν αβ αδ, ἴση ἐστίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγδ τετράπλευρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ βδ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ αβγδ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ βαδ. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ βγδ γδα, ὀρθή ἐστιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγδ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ, καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν αβγδ κύκλον, εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν αβγδ, τετράγωνον ἐγγέγραπται, τὸ αβγδ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ς



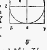
ζ

ΠΕρὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος αβγδ. δεῖ δὴ περὶ τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. ἤχθωσαν τοῦ αβγδ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, αἱ αβ γδ, καὶ διὰ τῶν α β γ δ σημείων, ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ αβγδ κύκλου, αἱ ζη ηθ θκ κζ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ζη τοῦ αβγδ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ εα, αἱ ἄρα πρὸς τῷ α γωνίαι, ὀρθαί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς β γ δ σημείοις γωνίαι, ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ αεβ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ εβη. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ αγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αγ, τῇ ζκ παράλληλός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ηζ θκ, τῇ βεδ ἐστὶ παράλληλος, παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστί, τὰ ηκ ηγ αθ ζβ, βκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ηζ, τῇ θκ, ἡ δὲ ηθ, τῇ ζκ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ βδ, ἀλλὰ ἡ μὲν αγ ἑκατέρᾳ τῶν ηθ ζκ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ βδ ἑκατέρᾳ τῶν ηζ θκ ἐστὶν ἴση, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ηθ ζκ, ἑκατέρᾳ τῶν ηζ θκ ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ζηθκ τετράπλευρον. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ηβεα. καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αηβ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς θ κ ζ γωνίαι, ὀρθαί εἰσιν, ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζηθκ τετράπλευρον, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν αβγδ κύκλον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



η

ΕΙΣ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον ἐγγράψαι. Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον, τὸ αβγδ, δεῖ δὴ εἰς τὸ αβγδ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. τετμήσθω ἑκατέρα τῶν αβ αδ, δίχα κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ ε ὁποτέρᾳ τῶν αδ γδ, παράλληλος ἤχθω, ἡ εθ. διὰ δὲ τοῦ ζ, ὁποτέρᾳ τῶν αβ βγ παράλληλος ἤχθω, ἡ ζκ, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ακ κβ, αθ θδ αη ηγ, βη ηδ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ, καί ἐστι τῆς μὲν αδ ἡμίσεια ἡ αε, τῆς δὲ αβ ἡμίσεια ἡ αζ. ἴση ἄρα καὶ ἡ αε, τῇ αζ, ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν. ἴση ἄρα καὶ ἡ ζη, τῇ ηε. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ηθ ηκ, ἑκατέρᾳ τῶν ζη ηε, ἐστὶν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα, αἱ ηε ηζ ηθ ηκ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν εζθ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων. καὶ ἐφάψεται τῶν αβ βγ γδ δα εὐθειῶν. διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς εζθκ γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς αβ βγ γδ δα, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ηε ηζ ηθ ηκ. κύκλος γραφόμενος, τέμνει τὰς αβ βγ γδ δα εὐθείας, ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος, εἰς τὸ αβγδ τετράγωνον. εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον, κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



θ

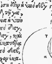
ΠΕΡΙ τὸ δοθὲν τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι. Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον, τὸ αβγδ. δεῖ δὴ περὶ τὸ αβγδ τετράγωνον, κύκλον περιγράψαι, ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ αγ βδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας, κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, δύο

δὴ αἱ δα, αγ, δυσὶ ταῖς βα, αγ, ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ δγ, βάσει τῇ βγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαγ, ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ δαβ γωνία, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ, βγδ, γδα, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν αγ, δβ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δαβ γωνία τῇ ὑπὸ αβγ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ δαβ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ εαβ, τῆς δὲ ὑπὸ αβγ ἡμίσεια, ἡ ὑπὸ εβα, καὶ ἡ ὑπὸ εαβ ἄρα, τῇ ὑπὸ εβα ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ εα πλευρᾷ τῇ εβ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν εγ, εδ εὐθειῶν, ἑκατέρᾳ τῶν εα, εβ, ἴση ἐστὶν. αἱ τέσσαρες ἄρα, αἱ εα, εβ, εγ, εδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ε, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν εα, εβ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος, περὶ τὸ αβγδ τετράγωνον περιγεγράφθω, ὡς ὁ αβγδ. περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ι

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν, διπλασίονα τῆς λοιπῆς. Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γα τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, κύκλος γεγράφθω ὁ βδε, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν βδε κύκλον, τῇ αγ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ βδε κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα, ἡ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ αγδ τρίγωνον κύκλος, ὁ αγδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ αγ τῇ βδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βδ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ αγδ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β πρὸς τὸν αγδ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι, αἱ βα, βδ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς βδ, ἡ βδ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ αγδ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ βδ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ δγ, ἡ ἄρα ὑπὸ βδγ γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ δαγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βδγ, τῇ ὑπὸ δαγ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ γδα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βδα, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γδα, δαγ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ γδα, δαγ, ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ βγδ, καὶ ἡ ὑπὸ βδα ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γβδ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αδ, τῇ αβ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ δβα, τῇ ὑπὸ βγδ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα, αἱ ὑπὸ βδα, δβα, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ βδ πλευρᾷ τῇ δγ. ἀλλὰ ἡ βδ, τῇ γα, ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ αγ ἄρα, τῇ γδ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδα, τῇ ὑπὸ δαγ ἐστὶν ἴση, αἱ ἄρα ὑπὸ γδα, δαγ, τῆς ὑπὸ δαγ, διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, ταῖς ὑπὸ γδα, δαγ, καὶ ἡ ὑπὸ βγδ ἄρα διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαγ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ βγδ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βδα, δβα, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ βδα, δβα, τῆς ὑπὸ δαβ ἐστὶ διπλῆ. ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται, τὸ αδβ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βδ βάσει γωνιῶν, διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

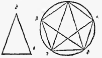


ια

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγδε, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγδε κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς, τὸ ζηθ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς η, θ γωνιῶν, τῆς πρὸς τῷ ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγδε κύκλον, τῷ ζηθ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον, τὸ αγδ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ γαδ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς η, θ, ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ αγδ, γδα. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ αγδ, γδα, τῆς ὑπὸ γαδ, ἐστὶ διπλῆ, τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, γδα δίχα, ὑπὸ τῶν γε, δβ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, γδα γωνιῶν, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαδ, καὶ τετμ-

καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν γε, δβ εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δαγ, αγε, εγδ, γδβ, βδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι, αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας, ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν, αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι, αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγδε πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ περιφέρεια, τῇ δε περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω, ἡ βγδ, ὅλη ἄρα ἡ αβγδ περιφέρεια, ὅλῃ τῇ εδγβ περιφερείᾳ, ἴση ἐστί. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς αβγδ περιφερείας, γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, ἐπὶ δὲ τῆς εδγβ περιφερείας, γωνία ἡ ὑπὸ βαε, καὶ ἡ ὑπὸ βαε γωνία ἄρα, τῇ ὑπὸ αεδ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ, βγδ, γδε γωνιῶν, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βαε, αεδ ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγδε πεντάγωνον, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια

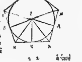


ιβ

ΠΕΡΙ τὸν δοθέντα κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ αβγδε, δεῖ δὴ περὶ τὸν αβγδε κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ α β γ δ ε. ὥστε ἴσας εἶναι τὰς αβ, βγ, γδ, δε, εα περιφερείας, καὶ διὰ τῶν α β γ δ ε, ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι, αἱ ηθ, θκ, κλ, λμ, μη, καὶ εἰλήφθω τοῦ αβγδε κύκλου κέντρον τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ ζβ, ζκ, ζγ, ζλ, ζδ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν κλ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ αβγδε κύκλου, κατὰ τὸ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται, ἡ ζγ, ἡ ζγ ἄρα, κάθετός ἐστιν, ἐπὶ τὴν κλ. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ γ γωνιῶν, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ αἱ πρὸς τοῖς β δ σημείοις γωνίαι, ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν, ἡ ὑπὸ ζγκ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ζκ, ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν ζγ, γκ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, βκ, τὸ ἀπὸ τῆς ζκ ἴσον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ζγ, γκ, τοῖς ἀπὸ τῶν βζ, βκ ἐστὶν ἴσα. ὧν, τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, τῷ ἀπὸ τῆς ζβ, ἐστὶν ἴσον. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γκ, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς βκ ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ βκ, τῇ γκ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ζβ, τῇ ζγ, καὶ κοινὴ ἡ ζκ, δύο δὴ αἱ βζ, ζκ, δυσὶ ταῖς γζ, ζκ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ βκ, βάσει τῇ γκ ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ βζκ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κζγ, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ βκζ, τῇ ὑπὸ ζκγ, ἐστὶν ἴση. διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ κζγ, ἡ δὲ ὑπὸ βκγ, τῆς ὑπὸ ζκγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γζδ, τῆς ὑπὸ γζλ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ γλδ, τῆς ὑπὸ γλζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ περιφέρεια τῇ γδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, τῇ ὑπὸ γζδ, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ κζγ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ δζγ διπλῆ, τῆς ὑπὸ λζγ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ κζγ, τῇ ὑπὸ γζλ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ζκγ, ζλγ, τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν, τὴν ζγ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευράς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει. καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄρα ἡ μὲν κγ εὐθεῖα, τῇ γλ, ἡ δὲ ὑπὸ ζκγ γωνία, τῇ ὑπὸ ζλγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κγ, τῇ γλ, διπλῆ ἄρα ἡ κλ, τῆς κγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ θκ, τῆς βκ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ βκ, τῇ κγ, καὶ ἐστι διπλῆ ἡ μὲν κλ, τῆς κγ, ἡ δὲ θκ, τῆς βκ, καὶ θκ ἄρα τῇ κλ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ηθ, ημ, μλ ἑκατέρᾳ τῶν θκ, κλ ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ, τὸ ηθκλμ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζκγ γωνία, τῇ ὑπὸ ζλγ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ζκγ, διπλῆ

ιβ



ἡ ὑπὸ θκλ, τῆς δὲ ὑπὸ ζλγ διπλῆ ἡ ὑπὸ κλμ, καὶ ἡ ὑπὸ θκλ ἄρα, τῇ ὑπὸ κλμ ἐστὶν ἴση, ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ κθη θημ ημλ, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ θκλ κλμ ἴση. αἱ πέντε ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ ηθκ θκλ κλμ λμη μηθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ ηθκλμ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ, καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται, περὶ τὸν αβγδε κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ

ΕΙΣ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον ἐγγράψαι. Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ αβγδε, δεῖ δὴ εἰς τὸ αβγδε πεντάγωνον, κύκλον ἐγγράψαι. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βγδ γδε γωνιῶν, δίχα, ὑφ᾽ ἑκατέρας τῶν γζ δζ εὐθειῶν. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ γζ δζ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ ζα ζε εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ γδ κοινὴ δὲ ἡ γζ, δύο δὴ, αἱ βγ γζ, δυσὶ ταῖς δγ γζ, ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ βζ, βάσει τῇ δζ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ βγζ τρίγωνον, τῷ δγζ τριγώνῳ, ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴσαι εἰσίν, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γβζ γωνία, τῇ ὑπὸ γδζ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἡ ὑπὸ γδε τῆς ὑπὸ γδζ διπλῆ, ἴση δὲ, ἡ μὲν ὑπὸ γδε, τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ γδζ, τῇ ὑπὸ γβζ, καὶ ἡ ὑπὸ γβα ἄρα, τῆς ὑπὸ γβζ ἐστὶ διπλῆ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβζ γωνία, τῇ ὑπὸ ζβγ. ἡ ἄρα ὑπὸ αβγ γωνία, δίχα τέτμηται, ὑπὸ τῆς βζ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαε αεδ δίχα τέτμηται, ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ζα ζε εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου, ἐπὶ τὰς αβ βγ γδ δε εα εὐθείας κάθετοι αἱ ζη ζθ ζκ ζλ ζμ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ θγζ γωνία, τῇ ὑπὸ κγζ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ζθγ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ζκγ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι, τὰ ζθγ ζκγ, τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ζγ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς, ἴσας ἕξει, ἴση ἄρα ἡ ζθ κάθετος, τῇ ζκ καθέτῳ, ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζλ ζμ ζη, ἑκατέρᾳ τῶν ζθ ζκ, ἴση ἐστίν. αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι, αἱ ζη ζθ ζκ ζλ ζμ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν η θ κ λ μ κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν αβ βγ γδ δε εα εὐθειῶν. διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι, τὰς πρὸς τοῖς η θ κ λ μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένην, ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν η θ κ λ μ σημείων γραφόμενος, τεμεῖ τὰς αβ βγ γδ δε εα εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω, ὡς ὁ η θ κ λ μ. εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ



ιδ

ΠΕΡὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλον περιγράψαι. Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ὅπερ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ αβγδε, δεῖ δὴ περὶ τὸ αβγδε πεντάγωνον, κύκλον περιγράψαι. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βγδ γδε γωνιῶν δίχα, ὑπὸ ἑκατέρας τῶν γζ ζδ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ β α ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ ζβ ζα ζε. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ γβα βαε αεδ γωνιῶν, δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν βζ ζα ζε εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ ὑπὸ βγδ γωνία, τῇ ὑπὸ γδε καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ βγδ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ζγδ, τῆς δὲ ὑπὸ γδε ἡμίσεια ἡ ὑπὸ γδζ, καὶ ἡ ὑπὸ ζγδ ἄρα, τῇ ὑπὸ ζδγ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ζγ, πλευρᾷ τῇ

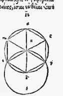


πλευρᾷ τῇ

ρᾳ τῇ ζδ ἐστὶν ἴση, ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζβ ζα ζε, ἑκατέρᾳ τῶν ζγ ζδ, ἐστὶν ἴση, αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ζα ζβ ζγ ζδ ζε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ζ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ζα ζβ ζγ ζδ ζε, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος, περὶ τὸ αβγδε πεντάγωνον ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ αβγδε, περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιε

ΕΙΣ τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος, ὁ αβγδεζ, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγδεζ κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. ἤχθω τοῦ αβγδεζ κύκλου διάμετρος, ἡ αδ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω, ὁ εηγθ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ εη γη διήχθωσαν, ἐπὶ τὰ β ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ βγ γδ δε εζ ζα. λέγω ὅτι τὸ αβγδεζ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ η σημεῖον, κέντρον τοῦ αβγδεζ κύκλου ἴση ἐστίν, ἡ ηε, τῇ ηδ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ εηγθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δε, τῇ δη ἀλλ᾽ ἡ ηε, τῇ ηδ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ηε ἄρα, τῇ εδ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ, τὸ εηδ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι, αἱ ὑπὸ εηδ ηδε δεη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ εἰσὶν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ἡ ἄρα ὑπὸ εηδ γωνία, τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ δηγ, τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ γη εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν εβ σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τὰς ὑπὸ εηγ γηβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γηβ, τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν, αἱ ἄρα ὑπὸ εηδ δηγ γηβ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς, αἱ ὑπὸ βηα αηζ ζηε ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. αἱ ἄρα ἓξ περιφέρειαι αἱ αβ βγ γδ δε εζ ζα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας, ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν, αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστί, τὸ αβγδεζ ἑξάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αζ περιφέρεια, τῇ εδ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω, ἡ αβγδ περιφέρεια, ὅλη ἄρα ἡ ζαβγδ περιφέρεια, ὅλῃ τῇ εδγβα περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ζαβγδ περιφερείας, ἡ ὑπὸ ζεδ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς εδγβα, ἡ ὑπὸ αζε γωνία, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αζε γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, τοῦ αβγδεζ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ, τῶν ὑπὸ αζε ζεδ γωνιῶν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδεζ ἑξάγωνον, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν αβγδεζ κύκλον. εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον, ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



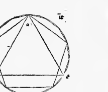
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ, τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐὰν διὰ τῶν α β γ δ ε ζ σημείων, ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου ἀχθῶσι, περιγραφήσεται, περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων, τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον, κύκλον ἐγγράψομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ις

ΕΙΣ τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ αβγδ, δεῖ δὴ εἰς τὸν αβγδ κύκλον, πεντεκαιδεκάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. γεγράφθω εἰς τὸν αβγδ κύκλον, τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου, πλευρὰ ἡ αγ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου, ἡ αβ. οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ αβγδ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων, ἡ μὲν αβγ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου, ἔσται πέντε, ἡ δὲ αβ περιφέρεια, πέμπτον

 οὖσα τοῦ

οὖσα τοῦ κύκλου, ἐστὶ τριῶν, λοιπὴ ἄρα ἡ βγ, τῶν ἴσων δύο, τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν βε εγ περιφερειῶν, πεντεκαιδέκατόν ἐστι, τοῦ αβγδ κύκλου. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς βε εγ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ε ΑΔΗΛΟΥ.

Σκοπὸς τῷ ε βιβλίῳ περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις, ὡς προείρηται ἐπιστήμαις. ὁ μὲν οὖν σκοπὸς, οὗτος. τὸ δὲ βιβλίον, Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις, ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον, τίνες οἱ τοιοῦτοι λόγοι. δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερα γνῶναι τῶν συνθέτων. ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα φέρε εἰπεῖν δύο μεγέθη αὐτὰ μὲν ὅροι καλοῦνται. ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις διάστημα, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις, σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον. τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον καθ' ὁμοιότητα σύγκρισιν ἤτοι σχέσιν, ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται, ἀλλ' ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τὸν δὲ τὸν λόγον. αὕτη δὲ ἡ σύγκρισις, λόγου λέγεται λόγος, οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει, τὸ ἀπὸ τῆς τὸν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον, τετραπλασίονα λόγον ἕξει, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον, ἤπερ ἡ μείζων εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. τὰ γὰρ μήκει διπλάσια, δυνάμει τετραπλάσια. ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι. καλεῖται δὲ οὗτος, ὁ λόγου λόγος. ἀλλ' εἰσὶν οὗτος ὑπὸ τὸ πόσον. διττὸς γὰρ ὁ λόγος, ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ ὁ δὲ ἐν ποσῷ. καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδὲν ἐστὶν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν, τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν, εἴδη ἐστὶ ε. ὁ μὲν γάρ ἐστι πολλαπλάσιος ὡς τοῦ γ, ὁ ς, ὁ δὲ ἐπιμόριος, ὡς τοῦ γ, ὁ δ, ὁ δὲ ἐπιμερής, ὡς ὁ ε τοῦ γ. καὶ οὗτοι μὲν ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος ὁ πολλαπλάσιος. ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς τούτων συνθέσεως γίνονται β, ὅ τε πολλαπλασιεπιμόριος, ὡς τοῦ γ ὁ ζ, καὶ ὁ πολλαπλασιεπιμερής, ὡς τοῦ γ, ὁ η. ὑπόλογοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων. ὑποπολλαπλάσιοι ὑποεπιμόριοι, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. ἰστέον δὲ ὡς τὸ βιβλίον διχῆ διῄρηται, καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα, τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν, τουτέστι τὴν τῶν πολλαπλασίων, τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων τῶν λόγων. δεῖ γὰρ ὥσπερ εἴρηται παντὸς πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. τῶν δὲ τῆς τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπων, καὶ ἡ τῶν ὅρων γίνεται διαίρεσις, οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ ἐπιμερῶν, καὶ πολλαπλασίων, οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΟΝ.

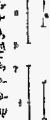
Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα κατάλληλα. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον, μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. Ἀναλογία δὲ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα, τοῖς ἑπομένοις. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶν, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου, πρὸς τὸ ἑπόμενον. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ, λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου. Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, ἢ ἄλλως, λῆψις τῶν ἄκρων, καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν

γεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν, ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ~~ἡγούμενον πρὸς~~ ἄλλο τι.

ΕΑΝ ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη, τὰ αβ γδ, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν ε ζ, ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, λέγω ὅτι, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ αβ τοῦ ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ αβ γδ, τῶν εζ. ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αβ τοῦ ε, καὶ τὸ γδ τοῦ ζ. ὅσα ἄρα μεγέθη ἐστὶν, ἐν τῷ αβ ἴσα τῷ ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ γδ, ἴσα τῷ ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν αβ, εἰς τὰ τῷ ε μεγέθη, ἴσα, τὰ αη ηβ, τὸ δὲ γδ, εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ γθ θδ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν γθ θδ, τῷ πλήθει τῶν αη ηβ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ, τὸ μὲν αη, τῷ ε, τὸ δὲ γθ, τῷ ζ, ἴσα ἄρα καὶ τὰ αη γθ τοῖς ζ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἴσον τὸ ηβ τῷ ε, καὶ τὸ θδ τῷ ζ, ἴσα ἄρα καὶ τὰ ηβ θδ τοῖς ε ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ αβ ἴσα τῷ ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς αβ γδ, ἴσα τοῖς ε ζ, ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβ τοῦ ε, τοσαυταπλάσια ἔσται, καὶ τὰ αβ γδ, τῶν εζ. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



β

ΕΑΝ πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ αβ δευτέρου τοῦ γ, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ δε, τετάρτου τοῦ ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ βη δευτέρου τοῦ γ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τὸ εθ, τετάρτου τοῦ ζ. λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ αη, δευτέρου τοῦ γ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δθ, τετάρτου τοῦ ζ. ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αβ, τοῦ γ, καὶ τὸ δε τοῦ ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ αβ μεγέθη ἴσα τῷ γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ δε, ἴσα τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ βη ἴσα τῷ γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ εθ, ἴσα τῷ ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ αη ἴσα τῷ γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ δθ, ἴσα τῷ ζ. ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αη τοῦ γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ δθ, τοῦ ζ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ αη δευτέρου τοῦ γ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δθ, τετάρτου τοῦ ζ. ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



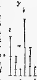
γ

ΕΑΝ πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων, ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν, τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ, τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ α δευτέρου τοῦ β, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ γ, τετάρτου τοῦ δ, καὶ εἰλήφθω τῶν αγ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ εζ ηθ. λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ εζ, τοῦ β, καὶ τὸ ηθ, τοῦ δ. ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ

ἐζ τοῦ

ἐζ τοῦ α, καὶ τὸ ηθ τοῦ γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ εζ ἴσα τῷ α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ηθ, ἴσα τῷ γ, διῃρήσθω τὸ εζ, εἰς τὰ τῷ α μεγέθη ἴσα, τὰ εκ, κζ, τὸ δὲ ηθ, εἰς τὰ τῷ γ ἴσα, τὰ ηλ, λθ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν εκ, κζ, τῷ πλήθει τῶν ηλ, λθ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ α τοῦ β, καὶ τὸ γ τοῦ δ, ἴσον δὲ, τὸ μὲν εκ, τῷ α, τὸ δὲ ηλ τῷ γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ εκ τοῦ β, καὶ τὸ ηλ τοῦ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ κζ, τοῦ β, καὶ τὸ λθ, τοῦ δ, ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ εκ δευτέρου τοῦ β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ ηλ τετάρτου τοῦ δ. ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ κζ δευτέρου τοῦ β ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τὸ λθ, τετάρτου τοῦ δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον, τὸ εζ, δευτέρου τοῦ β, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ηθ, τετάρτου τοῦ δ, ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ διʼ ἴσου τῶν ληφθέντων, ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν, τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

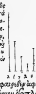


ἘΑΝ πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθʼ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ α πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ πρὸς τέταρτον τὸ δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν α γ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε ζ, τῶν δὲ β δ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ. λέγω ὅτι ὡς τὸ ε πρὸς τὸ η ἐστὶν, οὕτως τὸ ζ πρὸς τὸ θ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ε ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κ λ, τῶν δὲ η θ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ μ ν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ μὲν ε, τοῦ α, τὸ δὲ ζ τοῦ γ, καὶ εἴληπται τῶν ε ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κλ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσια, τὸ κ τοῦ α, καὶ τὸ λ τοῦ γ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ μ τοῦ β, καὶ τὸ ν τοῦ δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν α γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ β δ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τοῦ μ τὸ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν κ λ, τῶν ε ζ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ μ ν, τῶν η θ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ε πρὸς τὸ η, οὕτως τὸ ζ πρὸς τὸ θ. ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καθʼ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λῆμμα.

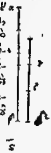


Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ κ τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον, δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει, τὸ μ τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν, τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον. καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον, καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ η πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ ζ. Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.



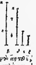
ἘΑΝ μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. Μέγεθος γὰρ τὸ αβ, μεγέθους τοῦ γδ, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ αε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γζ, λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ εβ, λοιποῦ τοῦ ζδ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ αβ, ὅλου τοῦ γδ, ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ αε τοῦ

τὸ αε τοῦ γδ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ εβ τοῦ γη. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αε, τοῦ γζ, καὶ τὸ αε τοῦ ηζ, κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ αε τοῦ γζ, καὶ τὸ αβ τοῦ γδ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αβ, ἑκατέρου τῶν ηζ γδ. ἴσον ἄρα τὸ ηζ, τῷ γδ, κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ γζ, λοιπὸν ἄρα τὸ ηγ λοιπῷ τῷ δζ, ἴσον ἐστί, καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ αε τοῦ γζ, καὶ τὸ εβ τοῦ ηγ, ἴσον δὲ τῷ ηγ, τὸ δζ ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αε τοῦ γζ, καὶ τὸ εβ, τοῦ ζδ, ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ αε τοῦ γζ, καὶ τὸ αβ, τοῦ γδ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ εβ, τοῦ ζδ, καὶ τὸ αβ τοῦ γδ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ εβ λοιποῦ τοῦ ζδ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιον ἐστιν, ὅλον τὸ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις, ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιον ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ς

ΕΑΝ δύο μεγέθη, δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ, τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. Δύο γὰρ μεγέθη τὰ αβ γδ, δύο μεγεθῶν τῶν ε ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ αη γθ, τῶν αὐτῶν τῶν ε ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια. λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ηβ θδ τοῖς ε ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. ἔστω γὰρ πρότερον, τὸ ηβ, τῷ ε ἴσον, λέγω ὅτι καὶ τὸ θδ, τῷ ζ ἴσον ἐστίν. κείσθω γὰρ τῷ ζ ἴσον τὸ γκ, καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αη τοῦ ε, καὶ τὸ γθ τοῦ ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ηβ, τῷ ε, τὸ δὲ γκ τῷ ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ αβ τοῦ ε, καὶ τὸ κθ τοῦ ζ, ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ αβ τοῦ ε, καὶ τὸ γδ τοῦ ζ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ κθ τοῦ ζ, καὶ τὸ γδ τοῦ ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν κθ γδ, τοῦ ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κθ, τῷ γδ, κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ γθ, λοιπὸν ἄρα τὸ κγ λοιπῷ τῷ θδ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ κγ, τῷ ζ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ θδ ἄρα, τῷ ζ ἐστὶν ἴσον, ὥστε εἰ τὸ ηβ, τῷ ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ θδ, ἴσον ἔσται τῷ ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ηβ τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ θδ τοῦ ζ. ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, δύο μεγεθῶν, ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





ζ

ΤΑ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. Ἔστω ἴσα μεγέθη, τὰ α β, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος, τὸ γ. λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν α β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β. εἰλήφθω γὰρ τῶν α β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ δ ε, τοῦ δὲ γ, ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον, τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ δ τοῦ α, καὶ τὸ ε τοῦ β, ἴσον δὲ τὸ α τῷ β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ δ τῷ ε. ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ ζ τοῦ γ πολλαπλάσιον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ δ τοῦ ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ ε, τοῦ ζ. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον, καί ἐστι τὰ μὲν δ ε τῶν α β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ ζ, τοῦ γ, ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ β πρὸς τὸ γ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ γ πρὸς ἑκάτερον τῶν α β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ δ τῷ ε, ἄλλο δέ τι τὸ ζ. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ζ τοῦ δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον, καί ἐστι τὸ μὲν ζ τοῦ γ, πολλαπλάσιον, τὰ δὲ δ ε τῶν α β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ πρὸς τὸ α, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ β. τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ, πρὸς τὰ ἴσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τῶν

Βιβλίον πέμπτον.

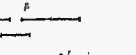
ΤΩΝ ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ἔστω ἄνισα μεγέθη, τὰ αβ γ, καὶ ἔστω μεῖζον, τὸ αβ τοῦ γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε, τὸ δ, λέγω ὅτι τὸ αβ πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ δ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ αβ, ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γ, κείσθω τῷ γ, ἴσον τὸ βε, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν αε εβ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ, τοῦ δ μεῖζον, ἔστω πρότερον τὸ αε, ἔλαττον τοῦ εβ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω, τὸ αε, ἕως οὗ τὸ γινόμενον μεῖζον γένηται τοῦ δ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ζη, μεῖζον ὂν τοῦ δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ζη τοῦ αε, τοσαυταπλάσιον γεγενέσθω καὶ τὸ μὲν ηθ, τοῦ εβ τὸ δὲ κ, τοῦ γ. καὶ εἰλήφθω τοῦ δ διπλάσιον μὲν τὸ λ, τριπλάσιον δὲ τὸ μ, καὶ ἑξῆς, ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον, πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ κ. εἰλήφθω καὶ ἔστω τὸ ν, τετραπλάσιον μὲν τοῦ δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ κ. ἐπεὶ οὖν τὸ κ τοῦ ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ κ ἄρα τοῦ μ, οὐκ ἔστιν ἔλαττον, καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ζη τοῦ αε, καὶ τὸ ηθ τοῦ εβ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ζη, τοῦ αε, καὶ τὸ ζθ τοῦ αβ, ἰσάκις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ζη, τοῦ αε, καὶ τὸ κ, τοῦ γ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ζθ, τοῦ αβ, καὶ τὸ κ, τοῦ γ, τὰ ζθ, κ ἄρα τῶν αβ γ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ηθ, τοῦ εβ, καὶ τὸ κ τοῦ γ, ἴσον δὲ τὸ εβ τῷ γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ηθ, τῷ κ. τὸ δὲ κ τοῦ μ, οὐκ ἐστὶν ἔλαττον, οὐδ' ἄρα τὸ ηθ, τοῦ μ ἔλαττόν ἐστι, μεῖζον δὲ τὸ ζη, τοῦ δ, ὅλον ἄρα τὸ ζθ, συναμφοτέρων τῶν δ μ, μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ δ μ τῷ ν ἐστὶν ἴσα. ἐπειδήπερ τὸ μ τοῦ δ, τριπλάσιόν ἐστι, συναμφότερα δὲ τὰ μ δ τοῦ δ, ἐστὶ τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ ν, τοῦ δ, τετραπλάσιον, συναμφότερα ἄρα τὰ μ δ τῷ ν, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ζθ τῶν μ δ, μεῖζόν ἐστιν, τὸ ζθ ἄρα τοῦ ν ὑπερέχει, τὸ δὲ κ τοῦ ν, οὐχ ὑπερέχει, καὶ ἔστι τὰ μὲν ζθ κ τῶν αβ γ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ ν τοῦ δ, ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον, τὸ αβ ἄρα πρὸς τὸ δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ δ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ δ πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ, πρὸς τὸ αβ, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων. ὁμοίως δείξομεν ὅτι τὸ μὲν ν τοῦ κ ὑπερέχει, τοῦ δὲ ζθ, οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν ν τοῦ δ, πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ζθ κ τῶν αβ γ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δ ἄρα πρὸς τὸ γ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ δ, πρὸς τὸ αβ, ἀλλὰ δὴ τὸ αε, μεῖζον ἔστω τοῦ εβ, τὸ δὴ ἔλαττον τὸ εβ, πολλαπλασιαζόμενον, ἔσται ποτὲ τοῦ δ μεῖζον, πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ηθ, πολλαπλάσιον μὲν, τοῦ εβ, μεῖζον δὲ τοῦ δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ηθ τοῦ εβ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω, καὶ τὸ μὲν ζη, τοῦ αε, τὸ δὲ κ, τοῦ γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ζθ κ τῶν αβ γ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ ν, πολλαπλάσιον μὲν τοῦ δ, πρώτως δὲ μεῖζον, τοῦ ζη. ὥστε πάλιν τὸ ζη τοῦ μ, οὐκ ἔστιν ἔλασσον, μεῖζον δὲ τὸ ηθ, τοῦ δ. ὅλον ἄρα τὸ ζθ, τῶν δ μ τουτέστι τοῦ ν ὑπερέχει, τὸ δὲ κ τοῦ ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ηζ μεῖζον ὂν τοῦ θκ τουτέστι τοῦ κ, τοῦ ν οὐχ ὑπερέχει, καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω, περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν. τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



θ

ΤΑ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν α β πρὸς τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α, τῷ β, εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν α β, πρὸς τὸ γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον, ἔχει δέ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ α πρὸς τὸ β, ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ γ πρὸς ἑκάτερον τῶν α β, τὸν αὐτὸν



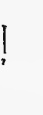
λόγον,

λόγον. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ α τῷ β. εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν α β τὸ γ, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. ἔχει δέ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ α, τῷ β. τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι

ΤΩΝ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Ἐχέτω γὰρ τὸ α πρὸς τὸ γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ β πρὸς τὸ γ, λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ α, τοῦ β. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ α τοῦ β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ α τῷ β. ἑκάτερον γὰρ τῶν α β, πρὸς τὸ γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον, οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ α τῷ β, οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι, τὸ α τοῦ β, τὸ α γὰρ ἂν πρὸς τὸ γ, τὸν ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ τὸ β πρὸς τὸ γ, οὐκ ἔχει δέ. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ α, τοῦ β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ α, τοῦ β. ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ γ πρὸς τὸ β μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ α, λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ β τοῦ α. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ μεῖζον, ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ β, τῷ α, τὸ γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν α β, τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον, οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ α τῷ β, οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ β τοῦ α, τὸ γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ β, ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ πρὸς τὸ α. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ β, τοῦ α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ β τοῦ α. τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον, μεῖζόν ἐστι, καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ια

ΟΙ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, ὡς δὲ τὸ γ πρὸς τὸ δ, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α γ ε, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ κ, τῶν δὲ β δ ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ μ ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ εἴληπται τῶν α γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ β δ ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ λ μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ η τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ θ τοῦ μ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ γ πρὸς τὸ δ, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ καὶ εἴληπται τῶν γ, ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ θ κ, τῶν δὲ δ ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ μ ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ θ τοῦ μ ὑπερέχει καὶ τὸ κ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ θ τοῦ μ ὑπερέχει καὶ τὸ η τοῦ λ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον, ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ η τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ κ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν η κ τῶν α ε, ἰσάκις πολλαπλάσια. τὰ δὲ λ ν τῶν β ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

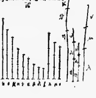


ιβ

ἀναλογ[illegible] (margin note)

ΕΑΝ ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ α β γ δ ε ζ, ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β οὕτως τὰ α γ ε, πρὸς τὰ β δ ζ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α γ ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ κ, τῶν δὲ β δ ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ μ ν, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε πρὸς τὸ ζ, καὶ εἴληπται,



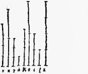
καὶ εἰλήφθω, τῶν μὲν α γ ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ κ, τῶν δὲ β δ ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ μ ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ η τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ θ τοῦ μ, καὶ τὸ κ τοῦ ν. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ η τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὰ η θ κ, τῶν λ μ ν. καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. καὶ ἔστι τὸ μὲν η, καὶ τὰ η θ κ, τοῦ α, καὶ τῶν α γ ε, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν, ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον, ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λ, καὶ τὰ λ μ ν τοῦ β, καὶ τῶν β δ ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὰ α γ ε, πρὸς τὰ β δ ζ. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ

ΕΑΝ πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

πρῶτον γὰρ τὸ α πρὸς δεύτερον, τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ πρὸς τέταρτον, τὸ δ. τρίτον δὲ τὸ γ πρὸς τέταρτον τὸ δ, μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ α πρὸς δεύτερον, τὸ β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ ε πρὸς ἕκτον τὸ ζ. ἐπεὶ γὰρ τὸ γ πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ ζ, ἔστι τινά, τῶν μὲν γ ε, ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ δ ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ γ πολλαπλάσιον, ὑπερέχει τοῦ, τοῦ δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ ε πολλαπλάσιον τοῦ, τοῦ ζ πολλαπλασίου, οὐχ ὑπερέχει. εἰλήφθω. καὶ ἔστω, τῶν μὲν γ ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ, τῶν δὲ δ ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κ λ. ὥστε τὸ μὲν η τοῦ κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ θ τοῦ λ μὴ ὑπερέχειν. καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ η τοῦ γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ μ, τοῦ α. ὁσαπλάσιον δὲ τὸ κ τοῦ δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ ν, τοῦ β. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν α γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ μ η, τῶν δὲ β δ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ν κ. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ μ τοῦ ν, ὑπερέχει καὶ τὸ η, τοῦ κ. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὑπερέχει δὲ τὸ η τοῦ κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ μ τοῦ ν. τὸ δὲ θ τοῦ λ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὰ μὲν μ θ τῶν α, ε ἰσάκις πολλαπλάσια. τὰ δὲ ν λ, τῶν β ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. τὸ ἄρα α πρὸς τὸ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ



μ α ε ν η γ δ κ θ ι ζ λ

ιδ

ΕΑΝ πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

πρῶτον γὰρ τὸ α πρὸς δεύτερον τὸ β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον, τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ α, τοῦ γ, λέγω ὅτι καὶ τὸ β τοῦ δ μεῖζόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τὸ α τοῦ γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος, τὸ β, τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ β. ὡς δὲ τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ. καὶ τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν, ἔλαττον ἄρα τὸ δ, τοῦ β. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ β τοῦ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ α τῷ γ, ἴσον

ιδ

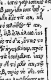


α β γ δ

τοῦ γ, ἴσον ἐστί, καὶ τὸ β τῷ δ. κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ α τοῦ γ, ἔλασσον ἔσται τὸ β τοῦ δ. ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

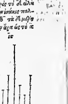
ιε

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ αβ, τοῦ γ, καὶ τὸ δε, τοῦ ζ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, οὕτως τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ αβ τοῦ γ, καὶ τὸ δε τοῦ ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ αβ μεγέθη ἴσα τῷ γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ δε, ἴσα τῷ ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν αβ, εἰς τὰ τῷ γ μεγέθη ἴσα τὰ αη, ηθ, θβ, τὸ δὲ δε, εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ δκ, κλ, λε. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν αη, ηθ, θβ, τῷ πλήθει τῶν δκ, κλ, λε. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ αη, ηθ, θβ ἀλλήλοις. ἔστι δὲ καὶ τὰ δκ κλ λε ἴσα ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αη πρὸς τὸ δκ, οὕτως τὸ ηθ, πρὸς τὸ κλ, καὶ τὸ θβ, πρὸς τὸ λε, ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, οὕτως τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. ἴσον δὲ τὸ μὲν αη, τῷ γ, τὸ δὲ δκ, τῷ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ πρὸς τὸ ζ, οὕτως τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ις

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ, ἀνάλογον ἔσται. Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ α β γ δ, ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ β πρὸς τὸ δ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε ζ. τῶν δὲ γ δ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ε τοῦ α, καὶ τὸ ζ τοῦ β. τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. ὡς δὲ τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ, πρὸς τὸ δ. καὶ ὡς ἄρα τὸ γ πρὸς τὸ δ, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. πάλιν. ἐπεὶ τὰ η θ, τῶν γ δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, οὕτως τὸ η πρὸς τὸ θ, ὡς δὲ τὸ γ πρὸς τὸ δ, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ε πρὸς τὸ ζ, οὕτως τὸ η πρὸς τὸ θ, ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ε τοῦ η, ὑπερέχει καὶ τὸ ζ, τοῦ θ. κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν ε ζ τῶν α β, ἰσάκις πολλαπλάσια. τὰ δὲ η θ τῶν γ δ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ β πρὸς τὸ δ. ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.



ιζ

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ αβ βε γδ δζ, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ δζ. λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα, ἀνάλογον ἔσται. ὡς τὸ αε πρὸς τὸ εβ, οὕτως τὸ γζ, πρὸς τὸ δζ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν αε εβ γζ ζδ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ηθ θκ, λμ μν, τῶν δὲ εβ ζδ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κξ νπ, καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ηθ, τοῦ αε, καὶ τὸ θκ τοῦ εβ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ηθ, τοῦ αε, καὶ τὸ ηκ τοῦ αβ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ηθ τοῦ αε, καὶ τὸ λμ τοῦ γζ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ηκ, τοῦ αβ, καὶ τὸ λμ τοῦ γζ. πάλιν ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ λμ τοῦ γζ, καὶ τὸ μν τοῦ ζδ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ λμ τοῦ γζ, καὶ τὸ λν τοῦ γδ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ λμ, τοῦ γζ, καὶ τὸ ηκ, τοῦ αβ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ηκ, τοῦ αβ καὶ τὸ λν, τοῦ γδ, τὰ ηκ, λν ἄρα τῶν αβ γδ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν. ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, τὸ θκ, τοῦ εβ καὶ τὸ μν, τοῦ ζδ. ἔστι δὲ καὶ τὸ κξ, τοῦ εβ ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τὸ νπ, τοῦ ζδ, καὶ συντεθὲν τὸ θξ τοῦ εβ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ μπ τοῦ ζδ.

καὶ ἐπεὶ

καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αε πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ πρὸς τὸ δζ. καὶ εἴληπται τῶν μὲν αβ, γδ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ηκ, λν. τῶν δὲ εβ ζδ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ θξ, μπ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ηκ τοῦ θξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λν, τοῦ μπ. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον, ὑπερεχέτω δὴ τὸ ηκ, τοῦ θξ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ θκ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ηθ, τοῦ κξ. ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ηκ τοῦ θξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λν τοῦ μπ. ὑπερεχέτω ἄρα, καὶ τὸ λν, τοῦ μπ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ μν, ὑπερέχει καὶ τὸ λμ τοῦ νπ. ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ηθ τοῦ κξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λμ τοῦ νπ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ηθ τῷ κξ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ λμ, τῷ νπ. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν ηθ, λμ, τῶν αε, γζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ κξ, νπ, τῶν εβ, ζδ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αε πρὸς τὸ εβ, οὕτως τὸ γζ πρὸς τὸ ζδ. ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα, ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ αε εβ γζ ζδ, ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εβ, οὕτως τὸ γζ, πρὸς τὸ ζδ, λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα, ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ πρὸς τὸ ζδ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ, ἔσται ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ζδ, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον, τὸ δη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ δη, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν εἰσιν. ὥστε καὶ διαιρεθέντα, ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εβ οὕτως τὸ γη, πρὸς τὸ ηδ, ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εβ, οὕτως τὸ γζ, πρὸς τὸ ζδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γη, πρὸς τὸ ηδ, οὕτως τὸ γζ, πρὸς τὸ ζδ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ γη, τοῦ τρίτου τοῦ γζ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ηδ, τοῦ τετάρτου τοῦ ζδ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς ἔλασσον τοῦ ζδ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον, πρὸς αὐτὸ ἄρα. ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον, τὸ αβ πρὸς ὅλον τὸ γδ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ αε, πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ γζ, λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ εβ, πρὸς λοιπὸν τὸ ζδ, ἔσται ὡς ὅλον τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ αβ, πρὸς ὅλον τὸ γδ, οὕτως τὸ αε, πρὸς τὸ γζ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ βα, πρὸς τὸ αε, οὕτως τὸ δγ, πρὸς τὸ γζ, καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς ἄρα τὸ βε, πρὸς τὸ εα, οὕτως τὸ δζ, πρὸς τὸ γζ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν. ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ δζ, οὕτως τὸ εα, πρὸς γζ. ὡς δὲ τὸ αε, πρὸς τὸ γζ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ αβ, πρὸς ὅλον τὸ γδ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ εβ, πρὸς λοιπὸν τὸ ζδ ἔσται, ὡς ὅλον τὸ αβ, πρὸς ὅλον τὸ γδ. ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπόν, ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, οὕτως τὸ εβ, πρὸς τὸ ζδ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ. συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ αε, οὕτως τὸ γδ, πρὸς τὸ γζ, ὅ ἐστιν ἀναστρέψαντι.

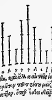
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι, καὶ ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν. ἐπειδὴ γὰρ ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ἔσται καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον, οὐκ ἔτι δὲ καὶ ἀντιστρέφει. ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον, οὐ πάντως ἔσται, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τὸ δὲ τρίτον τοῦ τετάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολίων, ἢ ἐπιτρίτων λόγων, ἢ τῶν τοιούτων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ

ΕΑΝ ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

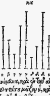
Ἔστω τρία μεγέθη, τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ δ ε ζ, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ, πρὸς τὸ ε, ὡς δὲ τὸ β πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, δι' ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω, τὸ α, τοῦ γ, λέγω ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ α τοῦ γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε, τὸ β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον, τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ β. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ὡς δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ β, ἀνάπαλιν, οὕτως τὸ ζ, πρὸς τὸ ε, καὶ τὸ δ ἄρα πρὸς τὸ ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ζ, πρὸς τὸ ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, μεῖζον ἄρα τὸ δ τοῦ ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ α, τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ δ τῷ ζ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα

ΕΑΝ ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη ἀνάλογον, τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ δ ε ζ, σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ε, δι' ἴσου δὲ τὸ α, τοῦ γ μεῖζον ἔστω. λέγω ὅτι καὶ τὸ δ τοῦ ζ μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ α τοῦ γ. ἄλλο δέ τι τὸ β, τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ πρὸς τὸ β, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ β, ἀνάπαλιν, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε ἄρα πρὸς τὸ ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζ τοῦ δ, μεῖζον ἄρα τὸ δ τοῦ ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον. δηλονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ α τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ δ, τῷ ζ, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



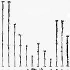
κβ

ΕΑΝ ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω ὁποσαοῦν

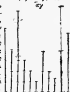
Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη, τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ δ ε ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ὡς μὲν τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. λέγω ὅτι καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐστὶν, ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ζ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κ λ. καὶ ἔτι τῶν γ ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ μ ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ε. καὶ εἴληπται, τῶν μὲν α δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ κ λ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ η, πρὸς τὸ κ, οὕτως τὸ θ, πρὸς τὸ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ κ πρὸς τὸ μ, οὕτως τὸ λ πρὸς τὸ ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶν, τὰ η κ μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι᾽ ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ η τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ θ τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον ἴσον. καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν η θ τῶν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ μ ν, τῶν γ ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ζ. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ



κγ

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. Ἔστω τρία μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ δ ε ζ. ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία. ὡς μὲν τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δ, πρὸς τὸ ε. εἰλήφθω τῶν μὲν α β δ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ η θ κ. τῶν δὲ γ ε ζ, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ λ μ ν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ η θ, τῶν α β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ η, πρὸς τὸ θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ε πρὸς τὸ ζ, οὕτως τὸ μ, πρὸς τὸ ν. καί ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, καὶ ὡς ἄρα τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ β πρὸς τὸ γ, τὸ δ πρὸς τὸ ε. καὶ εἴληπται τῶν μὲν β δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ θ κ, τῶν δὲ γ ε, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ μ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ λ, οὕτως τὸ κ πρὸς τὸ μ. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ β πρὸς τὸ δ, τὸ γ πρὸς τὸ ε. καὶ ἐπεὶ τὰ θ κ, τῶν β δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ β πρὸς τὸ δ, τὸ θ πρὸς τὸ κ, ἀλλ᾽ ὡς τὸ β πρὸς τὸ δ, οὕτω τὸ γ πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς ἄρα τὸ θ πρὸς τὸ κ, τὸ γ, πρὸς τὸ ε. πάλιν. ἐπεὶ τὰ λ μ τῶν γ ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ λ πρὸς τὸ μ, ἀλλ᾽ ὡς τὸ γ πρὸς τὸ ε, οὕτως τὸ θ πρὸς τὸ κ, καὶ ὡς ἄρα τὸ θ, πρὸς τὸ κ, οὕτως τὸ λ πρὸς τὸ μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ θ πρὸς τὸ λ, τὸ κ πρὸς τὸ μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ η πρὸς τὸ θ, τὸ μ πρὸς τὸ ν. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶν ἀνάλογον, τὰ η θ λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ κ μ ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι᾽ ἴσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ η τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ κ, τοῦ ν, καὶ εἰ ἴσον ἴσον. καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν η κ, τῶν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ λ ν, τῶν γ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δ πρὸς τὸ ζ. ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ζ 3 Ἐὰν

κδ

ΕΑΝ πρῶτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον, πρὸς τέταρτον. Πρῶτον γὰρ τὸ αβ, πρὸς δεύτερον τὸ γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ δε, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ βη, πρὸς δεύτερον τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον τὸ εθ, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν τὸ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ αη, πρὸς δεύτερον τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δθ, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ βη πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ εθ, πρὸς τὸ ζ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ βη, οὕτως τὸ ζ πρὸς τὸ εθ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ γ πρὸς τὸ βη, οὕτως τὸ ζ πρὸς τὸ εθ, δι' ἴσου ἄρα ἐστιν, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βη, οὕτως τὸ δε, πρὸς τὸ εθ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ἐστιν, καὶ συντεθέντα, ἀνάλογον ἔσται. ὡς ἄρα τὸ αη πρὸς τὸ ηβ, οὕτως τὸ δθ, πρὸς τὸ θε. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ηβ πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ εθ, πρὸς τὸ ζ, δι' ἴσου ἄρα ἐστιν, ὡς τὸ αη πρὸς τὸ γ, οὕτως τὸ δθ, πρὸς τὸ ζ. ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ λοιπά, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κε

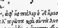
ΕΑΝ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον, δύο τῶν λοιπῶν, μείζονά ἐστιν. Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ αβ γδ ε ζ, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἔστω δὲ μέγιστον αὐτῶν, τὸ αβ, ἐλάχιστον δὲ, τὸ ζ. λέγω ὅτι τὰ αβ ζ τῶν γδ ε, μείζονα ἐστί. κείσθω γὰρ τῷ μὲν ε ἴσον, τὸ αη, τῷ δὲ ζ ἴσον, τὸ γθ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, οὕτως τὸ ε πρὸς τὸ ζ, ἴσον δὲ τῷ μὲν ε, τὸ αη, τῷ δὲ ζ, τὸ γθ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ γδ, οὕτως τὸ αη, πρὸς τὸ γθ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ αβ, πρὸς ὅλον τὸ γδ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ αη, πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ γθ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ηβ, πρὸς λοιπὸν τὸ θδ, ἔσται ὡς ὅλον τὸ αβ, πρὸς ὅλον τὸ γδ, μεῖζον δὲ τὸ αβ τοῦ γδ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ηβ τοῦ θδ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστι, τὸ μὲν αη τῷ ε, τὸ δὲ γθ τῷ ζ, τὰ ἄρα αη ζ ἴσα ἐστὶ, τοῖς γθ ε. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, ἐὰν ἄρα τῶν ηβ, θδ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ηβ, τῷ μὲν ηβ προστεθῇ, τὰ αη ζ, τῷ δὲ θδ προστεθῇ τὰ γθ ε, συνάγονται τὰ αβ ζ, μείζονα τῶν γδ ε. ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν, μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



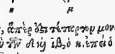
ΣΧΟΛΙΟΝ

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΙΣ ΤΟ ε ΑΔΗΛΟΥ.

ΛΟΓΟΣ ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ πηλικότητες τινῶν λόγων, πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιοῦσιν αὐτόν. πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ᾽ ὧν ὀνομάζονται, ὡς ἀπὸ τῶν δύο, ὁ διπλάσιος. ἔστω λόγος τοῦ ὀκτὼ πρὸς τὸν δ διπλασίων, καὶ αὖ τοῦ δ πρὸς τὸν β, διπλασίων καὶ αὐτός, ὁ τετραπλάσιος ὢν λόγος τοῦ η πρὸς τὸν β συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ δ πρὸς τὸν β, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως.



Ἐπεὶ ὡς εἴρηται πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ᾽ ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται, οἷον ἀπὸ τῶν δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος, καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνός, ἐπεὶ δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα, ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος ἀφ᾽ ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγεται ὧν λεπτῶν πρώτων, λ λαμβάνω, καὶ ἕτερον ἥμισυ μονάδος, ἀφ᾽ ἧς πάλιν ὁ δ ἥμισυς λέγεται τῶν η, καὶ πολλαπλασιάζω τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα καὶ αὐτὰ λεπτὰ καὶ γίνονται δεύτερα λεπτά, ϡ ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤγουν μοιράζω, γίνονται δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτά, τέταρτον εἰσὶ μονάδος, τετράκις γὰρ ιε ξ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τῶν β, καὶ η, ὁ μ, καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω, τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὅ ἐστιν λεπτῶν τριῶν. ἐπεὶ πάλιν ὁ μ, πενταπλάσιος ἐστὶ τῶν η, μέρος τοῦ μ ὁ η λέγεται, πολλαπλασιάζω τὸν τρία τὸ εἰκοστὸν τῶν ξ, ἐπὶ τὰ πέντε, ἀφ᾽ οὗ πέμπτον μέρος ὁ η τῶν μ λέγεται, καὶ γίνονται ιε λεπτά, ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ η, τέταρτός ἐστι.



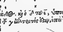
Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ καὶ ιβ, ὁ η. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ η, ὁ δὲ η ὑφημιόλιος τῶν ιβ. λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τὸν ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ μ, καὶ γίνονται χίλια διακόσια, δεύτερα λεπτὰ ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ δ ὢν τρίτον ἐστὶ τῶν ιβ.



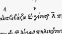
Ἔστω μεταξὺ τοῦ β καὶ τῶν ιβ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τῶν δ ἥμισυ ἐστιν, ὁ δὲ δ τοῦ ιβ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτὰ τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ. καὶ τὰ κ τὸ τρίτον αὐτῆς, ἀπὸ γὰρ τῶν τρία ὁ τριπλάσιος ὀνομάζεται. καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ κ, γίνονται ἑξακόσια δεύτερα λεπτά, ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα, τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος. καὶ ὁ β ἕκτον τῶν ιβ.



πάλιν ἔστω μεταξὺ τῶν δ καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποπενταπλάσιος ἐστὶ τοῦ κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον τὰ ιβ, καὶ τὸν δ ἀφ᾽ οὗ ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ κ, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον ἐπὶ τὸ δωδέκατον, γίνονται μη ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. καὶ ὁ δ τοῦ ε, ὑποεπιτέταρτος ἐστιν.



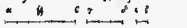
ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν β, καὶ δ ὁ γ καὶ ἐπεὶ ὁ δ τῶν γ ἐπίτριτος ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ ὅ ἐστι μονάς. λαμβάνω τὴν μονάδα ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ᾽ ἧς, μονάδος τρίτον οὔσης τῶν τρία, ὁ δ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸν τρία ἡμιόλιον εἶναι τῶν β. ὀνομάζεται γὰρ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. καὶ ποιῶ τὸν λ ἐπὶ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ λεπτά, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια, δεύτερα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω καὶ γίνονται λ πρῶτα λεπτά, ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β τῶν δ, ἥμισυς ἐστιν.

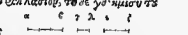


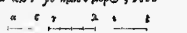
Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινὰ πηλικότητα λόγου. ἐχέτω γὰρ τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ λόγον δεδομένον, οἷον, διπλάσιον ἢ τριπλάσιον ἤ τινα ἄλλον. καὶ τὸ γδ πρὸς τὸ εζ καὶ αὐτὸ δεδο-

μένον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ αβ, πρὸς τὸ εζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ αβ πρὸς τὸ γδ, καὶ τοῦ γδ πρὸς τὸ εζ, ἤγουν ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ αβ, πρὸς τὸ γδ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ γδ πρὸς τὸ εζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ αβ πρὸς εζ. ἔστω γὰρ πρότερον τὸ μὲν αβ τοῦ γδ μεῖζον, καὶ τὸ γδ τοῦ εζ. καὶ ἔστω τὸ μὲν αβ τοῦ γδ διπλάσιον τὸ δὲ γδ τοῦ εζ τριπλάσιον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γδ τοῦ εζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γδ διπλάσιον τὸ αβ, τὸ ἄρα αβ τοῦ εζ ἐστὶν ἑξαπλάσιον, ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιον τινὸς διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐστὶ κυρίως σύνθεσις. ἢ οὕτως, ἐπεὶ τὸ αβ τοῦ γδ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ αβ εἰς τὰ τῷ γδ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα, τὰ αη ηβ, καὶ ἐπεὶ τὸ γδ τοῦ εζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ αη τῷ γδ, καὶ τὸ αη ἄρα, τοῦ εζ ἐστὶ τριπλάσιον, ὅλον ἄρα τὸ αβ τοῦ εζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον, ὁ ἄρα τοῦ αβ πρὸς τὸ εζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γδ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ αβ πρὸς γδ, καὶ τοῦ γδ, πρὸς εζ λόγου. ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γδ ἑκατέρων, τοῦ αβ εζ, συναχθήσεται. ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν αβ, τοῦ γδ τριπλάσιον, τὸ δὲ γδ ἥμισυ τοῦ εζ. καὶ ἐπεὶ τὸ γδ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ εζ, τοῦ δὲ γδ τριπλάσιον τὸ αβ, τὸ αβ ἄρα ἡμιόλιον ἐστὶ τοῦ εζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισυ τινὸς τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν αβ τοῦ γδ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ γδ τοῦ εζ ἐστὶ ἥμισυ, οἵων ἐστὶ τὸ αβ ἴσων τῷ γδ τριῶν, τοιούτων ἐστὶ τὸ εζ δύο, ὥστε ἡμιόλιον ἐστὶ τὸ αβ τοῦ εζ. ὁ ἄρα τοῦ αβ πρὸς τὸ εζ λόγος, συνῆπται διὰ τοῦ γδ μέσου ὅρου συγκείμενος, ἔκ τε τοῦ αβ πρὸς γδ, καὶ τοῦ γδ πρὸς εζ λόγου. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γδ ἑκατέρου τῶν αβ εζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν αβ τοῦ γδ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ γδ τοῦ εζ ἐπίτριτον. ἐπεὶ οὖν οἵων ἐστὶ τὸ αβ δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ γδ τεσσάρων. οἵων δὲ τὸ γδ τεσσάρων. τοιούτων τὸ εζ καὶ γδ πέντε, καὶ οἵων ἄρα τὸ αβ δύο, τοιούτων εζ τριῶν, συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ αβ πρὸς εζ λόγος, διὰ τοῦ γδ μέσου ὅρου, ὁ τοῦ δύο πρὸς τὰ τρία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου λόγου εἰς ὁ ποιοσοῦν τῶν συντιθέντων ἀφαιρεθῇ, εἷς τῶν ἁπλῶν ἀφαιρεθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντιθέντων καταλειφθήσονται.









ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ
ΕΚΤΟΝ.

ΟΜΟΙΑ σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευράς, ἀνάλογον. ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον. Ὕψος ἐστι, παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη. Λόγος ἐκ λόγων, συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ᾽ ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινας.

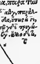
Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. Ἔστω τρίγωνα μὲν, τὰ αβγ, αγδ, παραλληλόγραμμα δὲ, τὰ εγ γζ. ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὴν βδ κάθετον ἀγομένην, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βγ βάσις, πρὸς τὴν γδ βάσιν, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ αγδ τρίγωνον. καὶ τὸ εγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γζ παραλλη-

παραλληλόγραμμα. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ θ λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν βγ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν, αἱ βη, ηθ, τῇ δὲ γδ βάσει, ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν, αἱ δκ, κλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ αη αθ ακ αλ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ βγ ηβ θη ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ αηθ αηβ αβγ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ θγ βάσις τῆς βγ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αθγ τρίγωνον, τοῦ αβγ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ λγ βάσις τῆς γδ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αλγ τρίγωνον, τοῦ αγδ τριγώνου. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ θγ βάσις τῇ γλ βάσει, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ αθγ τρίγωνον, τῷ αγλ τριγώνῳ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ θγ βάσις, τῆς γλ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ αθγ τρίγωνον, τοῦ αγλ τριγώνου. καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων, τῶν βγ γδ, δύο δὲ τριγώνων τῶν αβγ αγδ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βγ βάσεως, καὶ τοῦ αβγ τριγώνου, ἥτε θγ βάσις, καὶ τὸ αθγ τρίγωνον, τῆς δὲ γδ βάσεως, καὶ τοῦ αγδ τριγώνου, ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε γλ βάσις, καὶ τὸ αλγ τρίγωνον. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ θγ βάσις, τῆς γλ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ αθγ τρίγωνον, τοῦ αλγ τριγώνου. καὶ εἰ ἴση ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττων, ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ βάσις, πρὸς τὴν γδ βάσιν, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ αγδ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν αβγ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ εγ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ αγδ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι, τὸ ζγ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ αγδ τρίγωνον, οὕτως τὸ εγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ζγ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς ἡ μὲν βγ βάσις, πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ αγδ. ὡς δὲ τὸ αβγ πρὸς τὸ αγδ, οὕτως τὸ εγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γζ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ βάσις πρὸς τὴν γδ βάσιν, οὕτως τὸ εγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ζγ. τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



β

ΕΑΝ τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς, καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος. Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ βγ ἤχθω ἡ δε. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε γδ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ βδε τρίγωνον, τῷ γδε τριγώνῳ. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς δε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς δε βγ. ἄλλο δέ τι τὸ αδε τρίγωνον, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτό, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ βδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε τρίγωνον, οὕτω τὸ γδε τρίγωνον πρὸς τὸ αδε τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ βδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε, οὕτως ἡ βδ, πρὸς τὴν δα. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν αβ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις. ὡς δὲ τὸ γδε, πρὸς τὸ αδε τρίγωνον, διὰ τὰ αὐτά, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εα. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν εα. ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ αβγ τριγώνου πλευραί, αἱ αβ αγ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βγ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εα. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ βδ πρὸς τὴν δα, οὕτως τὸ βδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε. ὡς δὲ ἡ γε πρὸς τὴν εα, οὕτως τὸ γδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε. καὶ ὡς ἄρα τὸ βδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε, οὕτως τὸ γδε τρίγωνον, πρὸς τὸ αδε, ἑκάτερον ἄρα τῶν βδε γδε τριγώνων πρὸς τὸ αδε τρίγωνον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ βδε τρίγωνον, τῷ γδε τριγώνῳ, καὶ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς δε. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα, καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα,



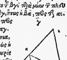
καὶ ἐν ταῖς

καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ δε, τῇ βγ. ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς. καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ

ΕΑΝ τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα, τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

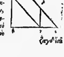
Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς αδ εὐθείας, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αγ. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ, τῇ δα παράλληλος, ἡ γε, καὶ διαχθεῖσα ἡ βα συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αδ εγ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ αγ, ἡ ἄρα ὑπὸ αγε γωνία ἴση ἐστί, τῇ ὑπὸ γαδ. ἀλλ' ὑπὸ γαδ τῇ ὑπὸ βαδ, ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ ἄρα, τῇ ὑπὸ αγε ἐστὶν ἴση. πάλιν εἰς παραλλήλους τὰς αδ εγ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ βαε, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βαδ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντός, τῇ ὑπὸ αεγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ βαδ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ αεγ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αε, πλευρᾷ τῇ αγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ βγε παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν εγ ἦκται ἡ αδ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αε. ἴση δὲ ἡ αε, τῇ αγ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αγ, ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, λέγω ὅτι δίχα τέτμηται, ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, ὑπὸ τῆς αδ εὐθείας, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων. ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αγ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αε. τριγώνου γὰρ τοῦ βγε, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν εγ ἦκται παράλληλος ἡ αδ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αε, ἴση ἄρα ἡ αγ, τῇ αε. ὥστε καὶ γωνία ἡ



ὑπὸ αεγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγε, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ αεγ, τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ βαδ ἐστὶν ἴση. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ γαδ. καὶ ἡ ὑπὸ βαδ ἄρα, τῇ ὑπὸ γαδ ἐστὶν ἴση, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αδ εὐθείας, ἐὰν ἄρα τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα, τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν γωνίαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ

ΤΩΝ ἰσογωνίων τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν, αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. Ἔστωσαν ἰσογώνια τρίγωνα, τὰ αβγ δγε ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ δγε, τὴν δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δεγ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδε, λέγω ὅτι τῶν αβγ δγε τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ βγ, τῇ γε. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ αγβ γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δεγ, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ δεγ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ βα εδ ἄρα ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦνται, ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ συμπιπτέτωσαν, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ ὑπὸ δγε γωνία, τῇ ὑπὸ αβγ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ βζ, τῇ γδ. πάλιν. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δεγ, παράλληλός ἐστιν ἡ αγ, τῇ ζε. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστί, τὸ



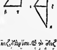
ζαγδ ἴση

ζαγδ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ζα, τῇ γδ, ἡ δὲ αγ, τῇ ζδ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ζβε παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ζε, ἦκται ἡ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αζ, οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν γε. ἴση δὲ ἡ αζ, τῇ γδ, ὡς ἄρα ἡ βα, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γε. πάλιν. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ γδ, τῇ βζ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γε, οὕτως ἡ ζδ πρὸς τὴν δε, ἴση δὲ ἡ δζ, τῇ αγ. ὡς ἄρα ἡ βγ πρὸς τὴν γε, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν εδ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ γε, πρὸς τὴν εδ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δγ πρὸς τὴν γε, ὡς δὲ ἡ βγ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ γε πρὸς τὴν εδ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δε. τῶν ἄρα ἰσογωνίων, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε

ΕΑΝ δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

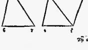
Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὴν δε, πρὸς τὴν εζ. ὡς δὲ τὴν βγ πρὸς τὴν γα, οὕτως τὴν εζ, πρὸς τὴν ζδ. καὶ ἔτι, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὴν εδ, πρὸς τὴν δζ. λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι. τὴν μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ εζδ. καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ εζ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς εζ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ ζεη, τῇ δὲ ὑπὸ βγα ἴση ἡ ὑπὸ εζη. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εηζ, ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εηζ τριγώνῳ, τῶν ἄρα αβγ εηζ τριγώνων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ ηε, πρὸς τὴν εζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ὑπόκειται ἡ δε, πρὸς τὴν εζ. ὡς ἄρα ἡ δε πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ηε πρὸς τὴν εζ. ἑκατέρα ἄρα τῶν δε ηε, πρὸς τὴν εζ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δε, τῇ ηε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ δζ, τῇ ηζ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δε τῇ εη, κοινὴ δὲ ἡ εζ, δύο δὴ αἱ δε εζ δυσὶ ταῖς ηε εζ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ ηζ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηεζ, ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ δεζ τρίγωνον, τῷ ηεζ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δζε, γωνία, τῇ ὑπὸ ηζε, ἡ δὲ ὑπὸ εδζ, τῇ ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ζεδ, τῇ ὑπὸ ηεζ ἐστὶν ἴση, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ηεζ, τῇ ὑπὸ αβγ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αβγ ἄρα γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αγβ τῇ ὑπὸ δζε ἐστὶν ἴση. καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ϛ

ΕΑΝ δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

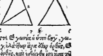
Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ὡς τὴν βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὴν εδ, πρὸς τὴν δζ. λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ



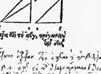
τῇ δζ

τῇ δζ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς δ ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ βαγ εδζ γωνίας ἴση, ἡ ὑπὸ ζδη, τῇ δὲ ὑπὸ αγβ ἴση, ἡ ὑπὸ δζη, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ β, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ η, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δηζ τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ ηδ πρὸς τὴν δζ, ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, καὶ ὡς ἄρα ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ ηδ, πρὸς τὴν δζ. ἴση ἄρα ἡ εδ, τῇ δη, καὶ κοινὴ ἡ δζ. δύο δὴ αἱ εδ δζ δυσὶ ταῖς ηδ δζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εδζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ηδζ, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ εζ, βάσει τῇ ηζ, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ δεζ τρίγωνον, τῷ ηδζ τριγώνῳ, ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ δζη τῇ ὑπὸ δζε, ἡ δὲ πρὸς τῷ η, τῇ πρὸς τῷ ε, ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ αγβ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα τῇ ὑπὸ δζε, ἐστὶν ἴση, ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ β, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση ἐστὶ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΑΝ δύο τρίγωνα, μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς. ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ αβγ δεζ, ὡς τὴν αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὴν δε, πρὸς τὴν εζ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς γ ζ, πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς, λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ ἴση. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ αβη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν α γωνία, τῇ δ, ἡ δὲ ὑπὸ αβη γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δζε. ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβη τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ὡς δὲ ἡ δε πρὸς τὴν εζ, οὕτως ὑπόκειται ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βη. ἡ αβ ἄρα πρὸς



ἑκατέραν τῶν βγ βη, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἡ βγ, τῇ βη. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βηγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγη, ἐστὶν ἴση, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς, ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ γ. ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ βηγ. ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία, ἡ ὑπὸ αηβ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ, ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα, τῶν πρὸς τοῖς γ ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς, λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ βηγ, ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς, ἡ πρὸς τῷ γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ βηγ. τριγώνου δὴ τοῦ βηγ, αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α τῇ πρὸς τῷ δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ ἴση ἐστίν, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ

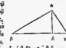


τῷ δεζ τριγώνῳ. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα, ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η

ΕΑΝ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὴν βγ κάθετος, ἡ αδ, λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν αβδ αδγ τριγώνων, ὅλῳ τῷ αβγ, καὶ ἔτι ἀλλήλοις. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν, ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ αδβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε αβγ, καὶ τοῦ αβδ, ἡ πρὸς τῷ β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αβδ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ αβγ τριγώνου, πρὸς τὴν βα ὑποτείνουσαν, τὴν ὀρθὴν τοῦ αβδ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ αβ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ γ γωνίαν, τοῦ αβγ τριγώνου, πρὸς τὴν βδ ὑποτείνουσαν, τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ γ, τὴν ὑπὸ βαδ, τοῦ αβδ τριγώνου. καὶ ἔτι ἡ αγ πρὸς τὴν αδ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν, κοινὴν αὐτῶν τῶν δύο τριγώνων, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αβδ ἄρα τριγώνῳ, ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αβδ τριγώνῳ, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ αδγ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ αβγ τριγώνῳ. ἑκάτερον ἄρα τῶν αβδ αδγ τριγώνων, ὅλῳ τῷ αβγ τριγώνῳ, ὅμοιόν ἐστι, λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια, τὰ αβδ αδγ τρίγωνα. ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βδα, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ αδγ ἐστὶν ἴση ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῷ γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ β, λοιπῇ τῇ ὑπὸ δαγ ἐστὶν ἴση,



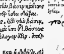
ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ τοῦ αβδ τριγώνου ὑποτείνουσα, τὴν ὑπὸ βαδ, πρὸς τὴν δα, τοῦ αδγ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ γ, ἴσην τῇ ὑπὸ βαδ, οὕτως αὐτὴ ἡ αδ, τοῦ αβδ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν, πρὸς τὴν δγ ὑποτείνουσαν, τὴν ὑπὸ δαγ, τοῦ αδγ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ β, καὶ ἔτι ἡ βα, πρὸς τὴν αγ,* ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ αδγ*. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Alij legunt, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἐπὶ τὴν βάσιν, κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα, τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, μέση ἀνάλογόν ἐστι, καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ

ΤΗΣ δοθείσης εὐθείας, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ. δεῖ δὴ τῆς αβ, τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν. ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ α, ἡ αγ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς αβ τυχοῦσαν, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς αγ, τὸ δ, καὶ κείσθωσαν τῇ αδ ἴσαι, αἱ δε εγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ δ παράλληλος ἤχθω τῇ βγ, ἡ δζ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αβγ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν βγ, ἦκται ἡ ζδ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ βζ, πρὸς τὴν ζα, διπλῆ δὲ ἡ δγ, τῆς δα, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ βζ, τῆς ζα. τριπλῆ ἄρα ἡ βα, τῆς αζ, τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς αβ, τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται, τὸ αζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ι

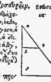
ΤΗΝ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ, ὁμοίως τεμεῖν. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος, ἡ αβ, ἡ δὲ τετμημένη, ἡ αγ. δεῖ δὴ τὴν αβ ἄτμητον, τῇ αγ ὁμοίως τῇ τετμημένῃ τεμεῖν. ἔστω τετμημένη, ἡ αγ, κατὰ τὰ δ ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν

καὶ κείσθωσαν, ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γβ, καὶ διὰ τῶν δ, ε, τῇ βγ παράλληλοι ἤχθωσαν, αἱ δζ, εη, διὰ δὲ τοῦ δ, τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δθκ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον, τῶν ζθ, θβ. ἴση ἄρα ἡ μὲν δθ, τῇ ζη, ἡ δὲ θκ, τῇ ηβ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ δκγ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν κγ, εὐθεῖα ἦκται, ἡ θε, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν θδ. ἴση δὲ ἡ μὲν κθ, τῇ βη, ἡ δὲ θδ, τῇ ηζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γε πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. πάλιν. ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αηε παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ηε ἦκται ἡ ζδ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εδ πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ γε πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ γε προς τὴν εδ, οὕτως ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ, ὡς δὲ ἡ εδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα. ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ αβ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ αγ, ὁμοίως τέτμηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



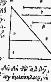
ια

ΔΥΟ δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ βα, αγ, καὶ κείσθωσαν, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν αβ, αγ, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν, ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, ἐπὶ τὰ δ, ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ αγ ἴση, ἡ βδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω, ἡ δε. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αδε, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν δε ἦκται ἡ βγ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν γε. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, αγ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ γε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιβ

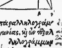
ΤΡιῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ α, β, γ, δεῖ δὴ τῶν α, β, γ, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ δε, δζ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ εδζ, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δη, τῇ β ἴση, ἡ ηε, καὶ ἔτι τῇ γ ἴση, ἡ δθ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ηθ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ ε, ἡ εζ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ δεζ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν εζ ἦκται ἡ ηθ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δη πρὸς τὴν ηε, οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θζ. ἴση δὲ ἡ μὲν δη, τῇ α, ἡ δὲ ηε, τῇ β, ἡ δὲ δθ, τῇ γ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν θζ. τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α, β, γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ θζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιγ

ΔΥΟ δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αβ, βγ, δεῖ δὴ τῶν αβ, βγ, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν, κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αγ ἡμικύκλιον, τὸ αδγ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ αγ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ, καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ αδγ, ὀρθή ἐστι, καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αδγ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν, κάθετος ἦκται ἡ βδ, ἡ βδ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν αβ, βγ, μέση ἀνάλογόν ἐστι. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβ, βγ μέση ἀνάλογον προσεύρηται, ἡ δβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ



ιδ

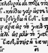
ΤΩΝ ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων

λληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. Ἔστω ἴσα παραλληλόγραμμα, τὰ αβ βγ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας αἱ δβ βε, ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα εἰσὶν καὶ αἱ ζβ βη, λέγω ὅτι τῶν αβ βγ, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ζε παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ αβ παραλληλόγραμμον, τῷ βγ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ζε, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβ πρὸς τὸ ζε, οὕτως τὸ βγ, πρὸς τὸ ζε. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ αβ πρὸς τὸ ζε, οὕτως ἡ δβ πρὸς βε. ὡς δὲ τὸ βγ, πρὸς τὸ ζε, οὕτως ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βδ πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ. τῶν ἄρα αβ βγ, παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ἔστω ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ παραλληλόγραμμον τῷ βγ παραλληλογράμμῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς βε, οὕτως ἡ ηβ πρὸς βζ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δβ πρὸς τὴν βε, οὕτως τὸ αβ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ζε παραλληλόγραμμον. ὡς δὲ ἡ ηβ πρὸς τὴν βζ, οὕτως τὸ βγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ζε, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ πρὸς τὸ ζε, οὕτως τὸ βγ, πρὸς τὸ ζε, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβ παραλληλόγραμμον, τῷ βγ παραλληλογράμμῳ. τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιε

ΤΩΝ ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μία μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. Ἔστω ἴσα τρίγωνα, τὰ αβγ αδε, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ δαε, λέγω ὅτι τῶν αβγ αδε τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ γα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα πρὸς τὴν αβ. κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν γα, τῇ αδ, ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εα, τῇ αβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ, τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδε τριγώνῳ, ἄλλο δέ τὸ αβδ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γαβ τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ τρίγωνον, οὕτως τὸ αδε τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ γαβ, πρὸς τὸ βαδ, οὕτως ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. ὡς δὲ τὸ εαδ τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ, οὕτως ἡ εα πρὸς τὴν αβ, καὶ ὡς ἄρα ἡ γα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. τῶν αβγ αδε τριγώνων ἄρα, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν αβγ αδε τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ γα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδε τριγώνῳ. ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς βδ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ γα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ γα πρὸς τὴν αδ, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ τρίγωνον. ὡς δὲ ἡ εα πρὸς τὴν αβ, οὕτως τὸ εαδ τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ τρίγωνον. ὡς ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ βαδ, οὕτως τὸ εαδ τρίγωνον. πρὸς τὸ βαδ. ἑκάτερον ἄρα τῶν αβγ εαδ, πρὸς τὸ βαδ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εαδ τριγώνῳ. τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μία μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



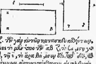
ις

ΕΑΝ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ

εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ αβ γδ ε ζ ἀνάλογον, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ ε, πρὸς τὴν ζ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γδ, ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν α γ σημείων, ταῖς αβ γδ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς, αἱ αη γθ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ζ, ἴση ἡ αη, τῇ δὲ ε, ἴση ἡ γθ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ βη δθ παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ ε πρὸς τὴν ζ. ἴση δὲ, ἡ μὲν ε, τῇ γθ, ἡ δὲ ζ, τῇ αη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ γθ, πρὸς τὴν αη, τῶν βη δθ, παραλληλογράμμων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ βη παραλληλόγραμμον, τῷ δθ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν βη, τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζ. ἴση γὰρ ἡ αη, τῇ ζ. τὸ δὲ δθ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἴση γὰρ ἡ γθ, τῇ ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν γδ ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ δὴ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ γδ ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ ε, πρὸς τὴν ζ.

ις



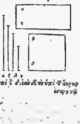
τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γδ ε, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ ζ, τὸ βα, ἴση γὰρ τῇ ζ, ἡ αη, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γδ ε, τὸ δθ, ἴση γὰρ ἡ γθ, τῇ ε, τὸ ἄρα βη, ἴσον ἐστὶ τῷ δθ, καὶ ἐστὶν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν, αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. οὕτως ἡ γθ, πρὸς τὴν αη. ἴση δὲ ἡ μὲν γθ, τῇ ε. ἡ δὲ αη, τῇ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ ε, πρὸς τὴν ζ. ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ

ΕΑΝ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α β γ, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς β τετραγώνῳ. κείσθω τῇ β ἴση ἡ δ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ β τῇ δ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν γ, ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α γ ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν β δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, τὸ ἀπὸ τῆς β ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ β, τῇ δ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς β τετραγώνῳ. ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσον ἔστω, τῷ ἀπὸ τῆς β, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν α γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς β, τῷ ὑπὸ τῶν β δ, ἴση γὰρ ἡ β τῇ δ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ β δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων

ιζ

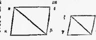


ἴσον ᾖ τῷ

ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν γ. ἴση δὲ ἡ β, τῇ δ, ὡς ἄρα ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ. ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ. κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ, τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη

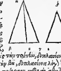
ΑΠΟ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ γε, δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τῷ γε εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. ἐπεζεύχθω ἡ δζ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς α β, τῇ μὲν πρὸς τῷ γ γωνίᾳ, ἡ ὑπὸ ηαβ, ἴση, τῇ δ' ὑπὸ γδζ, ἡ ὑπὸ αβη. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γζδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αηβ ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ζγδ τρίγωνον, τῷ ηαβ τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ζδ πρὸς τὴν ηβ, οὕτως ἡ ζγ πρὸς τὴν ηα, καὶ ἡ γδ, πρὸς τὴν αβ, πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ βη εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς β η, τῇ μὲν ὑπὸ δζε γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ βηθ, τῇ δὲ ὑπὸ ζδε ἴση, ἡ ὑπὸ ηβθ, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ θ ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζδε τρίγωνον, τῷ ηβθ τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ζδ πρὸς τὴν ηβ, οὕτως ἡ ζε, πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν θβ.



ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ζδ πρὸς τὴν ηβ, οὕτως ἡ ζγ, πρὸς τὴν ηα, καὶ ἡ γδ, πρὸς τὴν αβ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ζγ, πρὸς τὴν αη, οὕτως ἥ τε γδ πρὸς τὴν αβ, καὶ ἡ ζε πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἔτι ἡ εδ, πρὸς τὴν θβ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ γζδ γωνία, τῇ ὑπὸ αηβ, ἡ δὲ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ βηθ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ γζε, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, τῇ ὑπὸ αβθ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ α, ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ θ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αθ, τῷ γε, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς, ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ, τὸ αθ εὐθύγραμμον, τῷ γε εὐθυγράμμῳ. ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς αβ, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ αθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιθ

ΤΑ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἔστω ὅμοια τρίγωνα, τὰ αβγ δεζ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν, τῇ πρὸς τῷ ε, ὡς δὲ τὴν αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως, τὴν δε, πρὸς τὴν εζ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν βγ, τῇ εζ. λέγω ὅτι τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰλήφθω γὰρ τῶν βγ εζ τρίτη ἀνάλογον, ἡ βη, ὥστε εἶναι ὡς τὴν βγ πρὸς τὴν εζ, οὕτως τὴν εζ, πρὸς τὴν βη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ἀλλ' ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἐστὶν ἡ εζ, πρὸς τὴν βη, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν βη, τῶν αβη δεζ, τριγώνων ἄρα, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ μία μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβη τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν βη. ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν, ἡ βγ ἄρα πρὸς τὴν βη, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ, ὡς δὲ ἡ γβ πρὸς τὴν βη, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ αβη τρίγωνον, καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον, πρὸς τὸ αβη, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ἴσον δὲ τὸ αβη τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ, καὶ τὸ αβγ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

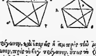


Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι κἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπείπερ ἐδείχθη ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ εβγ τρίγωνον, τουτέστι τὸ δεζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ

Τὰ ὅμοια πολύγωνα, εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα, τὰ αβγδε ζηθκλ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ αβ, τῇ ζη, λέγω ὅτι τὰ αβγδε ζηθκλ πολύγωνα, εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ αβγδε πολύγωνον, πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ζη. ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εγ, ηλ, λθ, καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγδε πολύγωνον, τῷ ζηθκλ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε γωνία τῇ ὑπὸ ηζλ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζλ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ αβε ζηλ, μίαν γωνίαν, μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζηλ τριγώνῳ. ὥστε καὶ ὅμοιον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε γωνία, τῇ ὑπὸ ζηλ, ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ αβγ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζηθ ἴση. διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εβγ γωνία, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ληθ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβε, ζηλ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ λη, πρὸς τὴν ηζ. ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ λη, πρὸς τὴν ηθ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ εβγ ληθ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ εβγ τρίγωνον, τῷ ληθ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ εγδ τρίγωνον, ὅμοιόν ἐστι, τῷ λθκ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα, τὰ αβγδε ζηθκλ, εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι, τὰ αβε εβγ εγδ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν, τὰ ζηλ ληθ, λθκ, καὶ ὅτι τὸ αβγδε πολύγωνον, πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ αβ, πρὸς τὴν ζη. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ ζθ, καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ ζηθ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ ζη πρὸς τὴν ηθ. ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζηθ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ ηζθ, ἡ δὲ ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ ηθζ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαμ γωνία, τῇ ὑπὸ ηζν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, τῇ ὑπὸ ζην ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζνη ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβμ τρίγωνον τῷ ζην τριγώνῳ, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ βμγ τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι, τῷ ηνθ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ἡ αμ, πρὸς τὴν μβ, οὕτως ἡ ζν, πρὸς τὴν νη ὡς δὲ ἡ βμ, πρὸς τὴν μγ, οὕτως ἡ ην, πρὸς τὴν νθ ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, οὕτως ἡ ζν, πρὸς τὴν νθ, ἀλλ' ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, οὕτως τὸ αβμ τρίγωνον, πρὸς τὸ μβγ, καὶ τὸ αμε πρὸς εμγ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα τὸ αμβ τρίγωνον, πρὸς τὸ βμγ, οὕτως τὸ αβε, πρὸς τὸ γβε, ἀλλ' ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, οὕτως ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, καὶ ὡς ἄρα ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, οὕτως τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς, τὸ εβγ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζν, πρὸς τὴν νθ, οὕτως τὸ ζηλ τρίγωνον, πρὸς τὸ ηλθ τρίγωνον, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αμ πρὸς τὴν μγ, οὕτως ἡ ζν, πρὸς τὴν νθ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ βεγ τρίγωνον, οὕτως τὸ ζηλ τρίγωνον, πρὸς τὸ ηλθ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ τρίγωνον, οὕτως τὸ εβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ ηλθ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν βδ ηκ, ὅτι καὶ ὡς τὸ βεγ



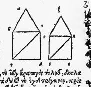
ὡς τὸ βεγ τρίγωνον, πρὸς τὸ ληθ τρίγωνον, οὕτως τὸ γδε, πρὸς τὸ λθκ τρίγωνον, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ, οὕτως τὸ εβγ, πρὸς τὸ ληθ, καὶ ἔτι τὸ γδε, πρὸς τὸ λθκ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ τρίγωνον, οὕτως τὸ αβγδε πολύγωνον, πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ ὁμόλογος πλευρά, πρὸς τὴν ζη ὁμόλογον πλευράν. τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ τὸ αβγδε ἄρα πολύγωνον, πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζη ὁμόλογον πλευράν. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρά, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὡσαύτως δή, καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἐδείχθη δέ, καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων, ὥστε καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ ἐὰν τῶν αβ ζη τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν ξ, ἡ βα, πρὸς τὴν ξ, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ζη. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον, διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ αβ, πρὸς τὴν ζη, ἐδείχθη δὲ τοῦτο, καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων, ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἄλλως.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα, ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ αβγδε ζηθκλ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε εγ ηλ λθ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ, οὕτως τὸ εβγ, πρὸς τὸ ληθ, καὶ τὸ γδε, πρὸς τὸ θκλ, ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζηλ τριγώνῳ, τὸ αβε ἄρα τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βε, πρὸς τὴν ηλ, διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ βεγ τρίγωνον, πρὸς τὸ ηλθ τρίγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βε, πρὸς τὴν ηλ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβε τρίγωνον, πρὸς τὸ ζηλ, οὕτως τὸ εβγ, πρὸς τὸ ηλθ.



πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εβγ τρίγωνον, τῷ ληθ τριγώνῳ, τὸ εβγ ἄρα πρὸς τὸ ληθ, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γε εὐθεῖα, πρὸς τὴν θλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ εγδ τρίγωνον, πρὸς τὸ λθκ τρίγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γε, πρὸς τὴν θλ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ βεγ τρίγωνον, πρὸς τὸ ληθ, οὕτως τὸ γεδ, πρὸς τὸ λθκ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ εβγ πρὸς τὸ ληθ, οὕτως τὸ αβε πρὸς τὸ ζηλ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβε, πρὸς τὸ ζηλ, οὕτως τὸ βεγ πρὸς τὸ ηλθ, καὶ τὸ γεδ, πρὸς τὸ λθκ, καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπά, ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δείξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν α β εὐθυγράμμων, τῷ γ ὅμοιον. λέγω ὅτι καὶ τὸ α τῷ β, ἐστὶν ὅμοιον. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὅμοιον τὸ α τῷ γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας πλευράς, ἀνάλογον ἔχει. πάλιν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ β τῷ γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γω-

κα

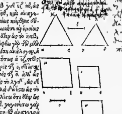


νίας πλευρὰς, ἀνάλογον ἔχει, ἑκάτερον ἄρα τῶν αβ, γδ, τῷ γ, ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς, ἀνάλογον ἔχει ὥστε καὶ τὸ α τῷ β ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ, τὸ α τῷ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ

ΕΑΝ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι, ἀνάλογον ἔσονται.

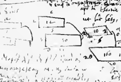
Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ αβ γδ εζ ηθ, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν αβ γδ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ καβ λγδ, ἀπὸ δὲ τῶν εζ ηθ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα, τὰ μζ νθ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, οὕτως τὸ μζ πρὸς τὸ νθ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν αβ γδ, τρίτη ἀνάλογον, ἡ ξ, τῶν δὲ εζ ηθ, τρίτη ἀνάλογον, ἡ ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μὲν αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. ὡς δὲ ἡ γδ πρὸς τὴν ξ, οὕτως ἡ ηθ, πρὸς τὴν ο, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν ξ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αβ πρὸς τὴν ξ, οὕτως καὶ τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, ὡς δὲ ἡ εζ πρὸς τὴν ο, οὕτως τὸ μζ πρὸς τὸ νθ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, οὕτως τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν πρ καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς πρ ὁποτέρῳ τῶν μζ νθ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον, τὸ σρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν πρ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν αβ γδ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ καβ λγδ, ἀπὸ δὲ τῶν εζ πρ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ μζ σρ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, οὕτως τὸ μζ, πρὸς τὸ σρ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, οὕτως τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ, τὸ μζ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν νθ καὶ σρ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ νθ, τῷ σρ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ πρ, καὶ ἐπεί ἐστιν ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν πρ, ἴση δὲ ἡ πρ, τῇ ηθ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ηθ. ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται. κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ὅτι δὲ ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως. ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα, τὰ νθ σρ, καὶ ἔστω ὡς ἡ θη, πρὸς τὴν ην, οὕτως ἡ ρπ, πρὸς τὴν πσ. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ρπ, τῇ θη. εἰ γὰρ ἄνισοι εἰσὶ μία αὐτῶν, μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ρπ, τῆς θη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ρπ πρὸς τὴν πσ, οὕτως ἡ θη, πρὸς τὴν ην, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ ρπ πρὸς τὴν θη, οὕτως ἡ πσ, πρὸς τὴν ην, μείζων δὲ ἡ πρ, τῆς θη, μείζων ἄρα καὶ ἡ πσ, τῆς ην, ὥστε καὶ τὸ ρσ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θν. ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ πρ, τῇ ηθ ἴση ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ

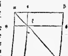
ΤΑ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, τὰ αγ γζ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῇ ὑπὸ εγη, λέγω ὅτι τὸ αγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γζ παραλληλόγραμμον, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ὃν ἔχει ἡ βγ πρὸς τὴν γη, καὶ τὸν ὃν ἔχει ἡ δγ, πρὸς τὴν γε. κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν βγ, τῇ γη. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δγ, τῇ γε, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ δη παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω



ἐκκείσθω τις εὐθεῖα, ἡ κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ βγ, πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ κ, πρὸς τὴν λ. ὡς δὲ ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, οὕτως ἡ λ πρὸς τὴν μ. οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε κ πρὸς τὴν λ, καὶ τῆς λ πρὸς τὴν μ, οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε βγ πρὸς τὴν γη, καὶ τῆς δγ πρὸς τὴν γε. ἀλλ' ὁ τῆς κ, πρὸς τὴν μ λόγος, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς κ πρὸς τὴν λ λόγου, καὶ τοῦ τῆς λ, πρὸς τὴν μ. ὥστε καὶ ἡ κ πρὸς τὴν μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γη, οὕτως τὸ αγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γθ, ἀλλ' ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ κ, πρὸς τὴν λ, καὶ ὡς ἄρα ἡ κ πρὸς τὴν λ, οὕτως τὸ αγ, πρὸς τὸ γθ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δγ πρὸς τὴν γε, οὕτως τὸ γθ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γζ. ἀλλ' ὡς ἡ δγ πρὸς τὴν γε, οὕτως ἡ λ πρὸς τὴν μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ λ πρὸς τὴν μ, οὕτως τὸ γθ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ κ πρὸς τὴν λ, οὕτως τὸ αγ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γθ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ λ πρὸς τὴν μ, οὕτως τὸ γθ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ γζ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κ πρὸς τὴν μ, οὕτως τὸ αγ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν μ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ αγ ἄρα πρὸς τὸ γζ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Παντὸς παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ, περὶ δὲ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα ἔστω, τὰ εη θκ. λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν εη θκ, παραλληλογράμμων, ὅμοιόν ἐστι, τῷ ὅλῳ τῷ αβγδ, καὶ ἀλλήλοις. ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ αβγ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν, τὴν βγ, ἦκται ἡ εζ, ἀνάλογόν ἐστιν, ὡς ἡ βε πρὸς τὴν εα, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζα. πάλιν. ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αγδ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν γδ, ἦκται ἡ ζη, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ γζ πρὸς τὴν ζα οὕτως ἡ δη, πρὸς τὴν ηα. ἀλλ' ὡς ἡ γζ, πρὸς τὴν ζα, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ βε, πρὸς τὴν εα, καὶ ὡς ἄρα ἡ βε, πρὸς τὴν εα, οὕτως ἡ δη, πρὸς τὴν ηα, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αη, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αη, τῶν αβγδ εη ἄρα παραλληλογράμμων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν, τὴν ὑπὸ βαδ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν, ἡ ηζ, τῇ δγ, ἴση ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ αηζ γωνία τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ δὲ ὑπὸ ηζα, τῇ ὑπὸ δγα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τῶν αδγ αζη, ἡ ὑπὸ δαγ γωνία, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδγ τρίγωνον, τῷ αηζ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστιν, τῷ αζε τριγώνῳ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, ἰσογώνιόν ἐστι, τῷ εη παραλληλογράμμῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ αη, πρὸς τὴν ηζ, ὡς δὲ ἡ δγ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα. ὡς δὲ ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ αζ πρὸς τὴν ζε. καὶ ἔτι ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ ζε, πρὸς τὴν εα, καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ δγ, πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ αζ, πρὸς τὴν ζε, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ηζ πρὸς τὴν ζε. τῶν ἄρα αβγδ εη παραλληλογράμμων, ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον τῷ εη παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τῷ κθ παραλληλογράμμῳ, ὅμοιόν ἐστιν. ἑκάτερον ἄρα τῶν εη θκ παραλληλογράμμων, τῷ αβγδ παραλληλογράμμῳ, ὅμοιόν ἐστιν, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια, καὶ τὸ εη ἄρα παραλληλόγραμμον, τῷ θκ παραλληλογράμμῳ, ὅμοιόν ἐστιν.



ἐστιν, παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι, τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

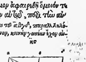
κε

ΤΩ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ αβγ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ δ. δεῖ δὴ τῷ μὲν αβγ ὅμοιον, τῷ δὲ δ, ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι, παραβεβλήσθω γὰρ, παρὰ μὲν τὴν βγ, τῷ αβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ βε, παρὰ δὲ τὴν γε, τῷ δ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ γμ, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ζγε, ἥ ἐστιν ἴση, τῇ ὑπὸ γβλ. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν βγ, τῇ γζ, ἡ δὲ λε, τῇ εμ. καὶ εἰλήφθω τῶν βγ γζ, μέση ἀνάλογον, ἡ ηθ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ηθ, τῷ αβγ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, τὸ κηθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ ηθ, πρὸς τὴν γζ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ κηθ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γζ, οὕτως τὸ βε παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ εζ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ κηθ τρίγωνον, οὕτως τὸ βε παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ εζ παραλληλόγραμμον. ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ βε παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ κηθ τρίγωνον, πρὸς τὸ εζ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βε παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ κηθ τρίγωνον τῷ εζ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ εζ παραλληλόγραμμον, τῷ δ ἐστὶν ἴσον καὶ τὸ κηθ ἄρα, τῷ δ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ κηθ, καὶ τῷ αβγ, ὅμοιον. τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγ, ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ κηθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



κϛ

ΕΑΝ ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ αβγδ, παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω, τὸ αζ ὅμοιον, τῷ αβγδ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ δαβ. λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι, τὸ αβγδ, τῷ αζ. μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν, ἔστω αὐτῶν ἡ διάμετρος, ἡ αθγ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ θ, ὁποτέρᾳ τῶν αδ βγ παράλληλος, ἡ θκ. ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν διάμετρόν ἐστι τὸ αβγδ, τῷ κη, ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγδ τῷ κη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, οὕτως ἡ ηα, πρὸς τὴν ακ, ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβγδ εη, ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, οὕτως ἡ ηα, πρὸς τὴν αε, καὶ ὡς ἄρα ἡ ηα πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ ηα πρὸς τὴν ακ, ἡ ηα ἄρα, πρὸς ἑκατέραν τῶν ακ αε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ αε, τῇ ακ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, τὸ αβγδ, τῷ αβ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον, τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τῷ αζ παραλληλογράμμῳ. ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν ἔχον γωνίαν αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

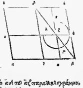


κζ

ΠΑντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν, τῷ ἐλλείμματι. Ἔστω εὐθεῖα

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ παραβεβλήσθω, παρὰ τὴν αβ εὐθεῖαν, τὸ αδ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, τῷ δβ, ὁμοίῳ τε, καὶ ὁμοίως κειμένῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι, τῆς αβ, τουτέστι, τῆς γβ. λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν αβ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ δβ, μέγιστόν ἐστι τὸ αδ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν αβ εὐθεῖαν, τὸ αζ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, τῷ ζβ ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ, τῷ δβ. λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ αδ, τοῦ αζ. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ δβ παραλληλόγραμμον, τῷ ζβ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ δβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ γζ, τῷ ζε, κοινὸν προσκείσθω τὸ ζβ. ὅλον ἄρα τὸ γθ, ὅλῳ τῷ κε ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ γθ, τῷ γη ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ αγ, τῇ γβ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ηγ ἄρα, τῷ εκ ἴσον ἐστὶ, κοινὸν προσκείσθω τὸ γζ. ὅλον ἄρα τὸ αζ, τῷ λμν γνώμονι ἐστὶν ἴσον, ὥστε καὶ τὸ δβ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ αδ τοῦ αζ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστι. πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

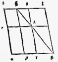
κζ



ἄλλως.

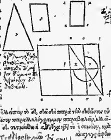
Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ αβ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ παραβληθὲν τὸ αλ, ἐλλεῖπον εἴδει, τῷ λβ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν, παρὰ τὴν αβ, τὸ αε παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον τῷ εβ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, τῷ λβ. λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ αλ, τοῦ αε. ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ εβ, τῷ λβ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ εβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ λζ, τῷ λθ, ἐπεὶ καὶ ἡ ζη τῇ ηθ, μεῖζον ἄρα τὸ ζλ, τοῦ εκ. ἴσον δὲ τὸ λζ τῷ δλ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δλ, τοῦ εκ, κοινὸν ἔστω, τὸ κδ. ὅλον ἄρα τὸ αλ, ὅλου τοῦ αε, μεῖζόν ἐστιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

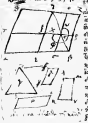
κζ



κη

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβαλεῖν, τὸ γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ δ, δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ. τετμήσθω ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω

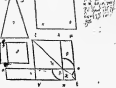




ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς εβ τῷ δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον, τὸ εβζη, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αη παραλληλόγραμμον. τὸ δὴ αη, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ διὰ τὸν διορισμόν, εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ αη τῷ γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν, παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ αη, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, τῷ ηε, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ θε τοῦ γ, ἴσον δὲ τὸ θε, τῷ ηε, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ηβ, τοῦ γ, ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι, τὸ ηβ τοῦ γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον τῷ δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω, τὸ κλμν, ἀλλὰ τὸ δ τῷ ηβ ἐστιν ὅμοιον, καὶ τὸ κμ ἄρα, τῷ ηβ, ἐστὶν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν κλ, τῇ ηε, ἡ δὲ λμ, τῇ ηζ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ηβ, τοῖς γ κμ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ηβ, τοῦ κμ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ηε, τῆς κλ, ἡ δὲ ηζ, τῆς λμ, κείσθω μὲν τῇ κλ ἴση, ἡ ηξ, τῇ δὲ λμ ἴση, ἡ ηο, καὶ συμπεπληρώσθω, τὸ ξηοπ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ηπ, τῷ κμ. ἀλλὰ τὸ κμ, τῷ ηβ ὅμοιόν ἐστι, καὶ τὸ ηπ ἄρα, τῷ ηβ, ὅμοιόν ἐστι, περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι, τὸ ηπ, τῷ ηβ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος, ἡ ηπβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ηβ τοῖς γκμ, ὧν τὸ ηπ, τῷ κμ, ἐστὶν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ υφχ γνώμων, λοιπῷ τῷ γ, ἴσος ἐστί, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ορ, τῷ ξσ κοινὸν προσκείσθω τὸ πβ. ὅλον ἄρα τὸ οβ, ὅλῳ τῷ ξβ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ξβ, τῷ τε ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αε, πλευρᾷ τῇ εβ ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ τε ἄρα, τῷ οβ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ξσ, ὅλον ἄρα τὸ τσ, ὅλῳ τῷ φχυ γνώμονι, ἴσον ἐστί. ἀλλ᾽ ὁ φχυ γνώμων, τῷ γ ἐδείχθη ἴσος, καὶ τὸ τσ ἄρα, τῷ γ ἐστὶν ἴσον, παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ τσ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, τῷ πβ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, ἐπειδήπερ τὸ πβ, τῷ ηπ ὅμοιόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δοθέντι. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβαλεῖν, τὸ γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ δ. δεῖ δὴ παρὰ τὴν αβ εὐθεῖαν, τῷ γ εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ τῷ δ, τετμήσθω ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς εβ, τῷ δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον, τὸ βζ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς, βζ, γ, ἴσον, τῷ δὲ δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω, τὸ ηθ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ηθ, τῷ ζβ, ὁμόλογος δὲ ἔστω, ἡ μὲν κθ, τῇ ζλ, ἡ δὲ κη, τῇ ζε. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ηθ, τοῦ ζβ, μείζων ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ μὲν κθ, τῆς ζλ, ἡ δὲ κη, τῆς ζε. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ζλ ζε. καὶ τῇ μὲν κθ ἴση ἔστω, ἡ ζλμ, τῇ δὲ κη ἴση, ἡ ζεν, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ μν. τὸ μν ἄρα, τῷ ηθ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον, ἀλλὰ τὸ ηθ τῷ ελ ἐστὶ ὅμοιον, καὶ τὸ μν ἄρα τῷ ελ ὅμοιόν ἐστι. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ελ, τῷ μν, ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος, ἡ ζξ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ηθ, τοῖς ελ γ, ἀλλὰ τὸ ηθ τῷ μν ἴσον ἐστί, καὶ τὸ μν ἄρα, τοῖς ελ γ, ἴσον ἐστί, κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ ελ, λοιπὸς ἄρα ὁ ψχφ γνώμων, τῷ γ ἴσος ἐστί, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αε τῇ εβ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αν, τῷ νβ, τουτέστι τὸ λο, κοινὸν προσκείσθω τὸ εξ. ὅλον ἄρα τὸ αξ, ἴσον ἐστί, τῷ φχψ γνώμονι, ἀλλὰ ὁ φχψ γνώμων, τῷ γ ἴσος ἐστί, καὶ τὸ αξ ἄρα, τῷ γ ἴσον ἐστί. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ αξ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ, τῷ πο, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, ἐπεὶ καὶ τῷ ελ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ επ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

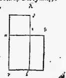


Τὴν δοθεῖσαν

λ

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ αβ, δεῖ δὴ τὴν αβ εὐθεῖαν, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ βγ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αγ τῷ βγ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ γδ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ αδ, ὁμοίῳ τῷ βγ, τετράγωνον δέ ἐστι τὸ βγ, τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ αδ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ βγ, τῷ γδ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ γε. λοιπὸν ἄρα τὸ βζ, λοιπῷ τῷ αδ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν βζ αδ ἄρα, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, ἴση δὲ ἡ μὲν ζε, τῇ αγ, τουτέστι τῇ αβ, ἡ δὲ εδ, τῇ αε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, μείζων δὲ ἡ αβ, τῆς αε. μείζων ἄρα καὶ ἡ αε, τῆς εβ, ἡ ἄρα αβ εὐθεῖα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ε, καὶ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ αε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



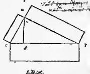
Ἄλλως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, δεῖ δὴ τὴν αβ εὐθεῖαν, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν, τετμήσθω γὰρ ἡ αβ, κατὰ τὸ γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γα τετραγώνῳ, ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἡ αβ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λα

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ἤχθω κάθετος ἡ αδ, ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ αβγ, ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βγ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ αδ, τὰ αβδ αδγ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ αβγ, καὶ ἀλλήλοις, καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ, τῷ αβδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσίν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γβ εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βα, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γα, ὥστε καὶ ὡς ἡ βγ πρὸς τὰς βδ δγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ, τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα, ἴση δὲ ἡ βγ, ταῖς βδ δγ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε, καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστί, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε, καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἄλλως.

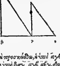
Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσί, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος ἄρα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βα εἶδος, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν βα, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν βα, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βα, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γα εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γα τετράγωνον. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ εἴδη, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, [illegible] ἀπὸ τῶν βα αγ τετρά-

αγ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ τετραγώνοις. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ εἶδος, τοῖς ἀπὸ τῶν βα αγ εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ

ΕΑΝ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ, ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ δγε, τὰς δύο πλευρὰς τὰς βα αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δγ δε, ἀνάλογον ἔχοντα. ὡς μὲν τὴν αβ πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὴν δγ, πρὸς τὴν δε, παράλληλον δὲ τὴν μὲν αβ, τῇ δγ, τὴν δὲ αγ, τῇ δε, λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βγ τῇ γε. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ δγ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ αγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ αγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ὑπὸ γδε, τῇ ὑπὸ αγδ, ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδε, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι αβγ δγε, μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ α, μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ ἴσην ἔχοντα. περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὴν γδ, πρὸς τὴν δε. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγε τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δγε. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ βαγ,



ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγε, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ βαγ, ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγε αγβ, ταῖς ὑπὸ βαγ αγβ γβα, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ βαγ αγβ αβγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ αἱ ὑπὸ αγε αγβ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ αγ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ, δύο εὐθεῖαι αἱ βγ γε, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τὰς ὑπὸ αγε αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ βγ, τῇ γε. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ

ΕΝ τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ γωνίαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι, οἱ αβγ δεζ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς ηθ, γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ βηγ εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ εδζ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βγ περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ περιφέρειαν, οὕτως ἥτε ὑπὸ βηγ γωνία, πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ, καὶ ἔτι ὁ βηγ τομεὺς, πρὸς τὸν εζθ τομέα. κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν βγ περιφερείᾳ ἴσαι, ὁσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ γκ κλ, τῇ δὲ εζ περιφερείᾳ ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι, αἱ ζμ μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ ηλ θμ θν. ἐπεὶ οὖν

λγ



ἴσαι εἰσὶν αἱ βγ γκ κλ, περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ὑπὸ βηγ γηκ κηλ γωνίαι ἀλλήλαις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ βλ περιφέρεια, τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ γωνία, τῆς ὑπὸ βηγ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νε περιφέρεια, τῆς εζ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ νθε γωνία, τῆς ὑπὸ εθζ. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ βλ περιφέρεια, τῇ εν περιφερείᾳ

φερείας, ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βηλ, τῇ ὑπὸ εθν, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ βλ περιφέρεια, τῆς εν περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ γωνία, τῆς ὑπὸ εθν γωνίας, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν βγ εζ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ βηγ εθζ, εἴληπται τῆς μὲν βγ περιφερείας, καὶ τῆς ὑπὸ βηγ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥτε βλ περιφέρεια, καὶ ἡ ὑπὸ βηλ γωνία, τῆς δὲ εζ περιφερείας, καὶ τῆς ὑπὸ εθζ γωνίας, ἥτε εν περιφέρεια, καὶ ἡ ὑπὸ εθν γωνία, καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ βλ περιφέρεια, τῆς εν περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ βηλ γωνία, τῆς ὑπὸ εθν, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς βγ περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βηγ γωνία, πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ βηγ γωνία, πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ βγ περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ περιφέρειαν, οὕτως ἥτε ὑπὸ βηγ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν. ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ



Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ βγ περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ηβγ τομεὺς, πρὸς τὸν θεζ τομέα. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ γκ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν βγ γκ περιφερειῶν τῶν ξ ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ βξ ξγ γο οκ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βη ηγ, δυσὶ ταῖς γη ηκ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ βγ, τῇ γκ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ τὸ βηγ τρίγωνον, τῷ ηγκ τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ περιφέρεια τῇ γκ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον αβγ κύκλον περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ, τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βξγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γοκ, ἐστὶν ἴση. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ βξγ τμῆμα, τῷ γοκ τμήματι, καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, τῶν βγ γκ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν, ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ βξγ τμῆμα, τῷ γοκ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ τὸ βηγ τρίγωνον, τῷ ηγκ τριγώνῳ, ἴσον, καὶ ὅλος ἄρα ὁ ηβγ τομεὺς ὅλῳ τῷ ηκγ τομεῖ, ἴσος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ηκλ τομεὺς, ἑκατέρῳ τῶν ηκγ ηγβ, ἴσος ἐστίν. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς, οἱ βηγ γηκ ηλκ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ οἱ θεζ θζμ θμν τομεῖς, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ λβ περιφέρεια, τῆς γβ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ηβλ τομεὺς, τοῦ ηβγ τομέως, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νε περιφέρεια τῆς εζ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ, καὶ ὁ θεν τομεὺς τοῦ θεζ τομέως. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ βλ περιφέρεια, τῇ εν, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ βηλ τομεὺς, τῷ θεν τομεῖ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ βλ περιφέρεια, τῆς εν περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ βηλ τομεὺς, τοῦ θεν τομέως, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν βγ εζ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ηβγ θεζ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν βγ περιφερείας, καὶ τοῦ ηβγ τομέως, ἥτε βλ περιφέρεια καὶ ὁ ηβλ τομεὺς, τῆς δὲ εζ περιφερείας, καὶ τοῦ θεζ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥτε εν περιφέρεια, καὶ ὁ θεν τομεὺς, καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ βλ περιφέρεια τῆς εν περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ βηλ τομεὺς, τοῦ θεν τομέως, καὶ εἰ ἴση, ἴσος, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ οὕτως ὁ ηβγ τομεὺς, πρὸς τὸν θεζ τομέα. καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτως καὶ ἡ γωνία, πρὸς τὴν γωνίαν.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΕΒΔΟΜΟΝ.

Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. Μέρη δὲ ὅταν μὴ καταμετρῇ. πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινὶ μετρούμενος. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινὶ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος, ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος, στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

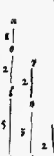
Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

α

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος, μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοί, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν αβ γδ, ἀνθυφαιρουμένων ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος, μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονάς, λέγω ὅτι οἱ αβ γδ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τουτέστιν ὅτι τοὺς αβ γδ μονὰς μόνη μετρεῖ. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ αβ γδ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς

τὶς αὐτοὺς ἀριθμὸς μετρείτω. καὶ ἔστω ὁ ε, καὶ ὁ μὲν γδ, τὸν βζ μετρῶν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα, τὸν ζα, ὁ δὲ αζ, τὸν δη μετρῶν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα, τὸν ηγ. ὁ δὲ ηγ, τὸν ζθ μετρῶν, λειπέτω μονάδα τὴν θα. ἐπεὶ οὖν ὁ ε τὸν γδ μετρεῖ, ὁ δὲ γδ, τὸν βζ μετρεῖ, καὶ ὁ ε ἄρα τὸν βζ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν βα, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν αζ μετρήσει ὁ ε, ὁ δὲ αζ τὸν δη μετρεῖ, καὶ ὁ ε ἄρα, τὸν δη μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν δγ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν γη, μετρήσει ὁ ε, ὁ δὲ γη, τὸν ζθ μετρεῖ, καὶ ὁ ε ἄρα, τὸν ζθ μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ζα, καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν αθ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὤν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς αβ γδ ἀριθμούς, μετρήσει τὶς ἀριθμός. οἱ αβ γδ, ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



β

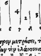
ΔΥΟ ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ αβ γδ, καὶ ἔστω ἐλάσσων, ὁ γδ, δεῖ δὴ τῶν αβ γδ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. εἰ μὲν οὖν ὁ γδ, τὸν αβ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ γδ ἄρα, τῶν γδ αβ, κοινὸν μέτρον ἐστί, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ γδ, τὸν γδ μετρήσει. εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ γδ τὸν αβ, τῶν αβ γδ ἀνθυφαιρουμένων ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, λειφθήσεταί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται. εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ αβ γδ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται, λειφθήσεται ἄρα τὶς ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν γδ τὸν αβ μετρῶν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν αε, ὁ δὲ αε, τὸν γδ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν γζ. ὁ δὲ γζ τὸν αε μετρείτω. ἐπεὶ ὁ δὲ αε, ἑαυτοῦ ἐλάσσονα οὐ μετρεῖ τὸν γζ. ἐπεὶ οὖν ὁ γζ τὸν αε μετρεῖ, ὁ δὲ αε τὸν δζ μετρεῖ, καὶ ὁ γζ ἄρα, τὸν δζ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, καὶ ὅλον ἄρα τὸν γδ μετρήσει, ὁ δὲ γδ, τὸν βε μετρεῖ, καὶ ὁ γζ ἄρα, τὸν βε μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν εα, καὶ ὅλον ἄρα τὸν βα μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γδ, ὁ γζ ἄρα τοὺς αβ γδ μετρεῖ. ὁ γζ ἄρα τῶν αβ γδ, κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ γζ τῶν αβ γδ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τὶς τοὺς αβ γδ ἀριθμοὺς ἀριθμός, μείζων ὢν τοῦ γζ, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ η, καὶ ἐπεὶ ὁ η τὸν γδ μετρεῖ, ὁ δὲ γδ τὸν βε μετρεῖ, καὶ ὁ η ἄρα τὸν βε μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν βα, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν αε μετρήσει. ὁ δὲ αε, τὸν δζ μετρεῖ, καὶ ὁ η ἄρα, τὸν δζ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν δγ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν γζ μετρήσει, ὁ μείζων, τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς αβ γδ ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὤν, τοῦ γζ, ὁ γζ ἄρα, τῶν αβ γδ, μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.



γ

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α β γ, δεῖ δὴ τῶν α β γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν α β, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ δ, ὁ δὴ δ τὸν γ, ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς αβ, ὁ δ ἄρα, τοὺς α β γ, μετρεῖ, ὁ δ ἄρα τῶν α β γ, κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ δ τῶν α β γ, κοινὸν μέγιστον μέτρον, μετρήσει τοὺς α β γ, ἀριθμούς, ἀριθμός, μείζων ὢν τοῦ δ, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ ε, ἐπεὶ οὖν ὁ ε, τοὺς α β γ μετρεῖ, καὶ τοὺς αβ, ἄρα μετρήσει, καὶ τὸ τῶν α β, ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει, τὸ δὲ τῶν α β, μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ὁ δ, ὁ ε ἄρα, τὸν δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς α β γ, ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ δ, ὁ δ



 ἄρα τῶν

ἄρα τῶν α β γ, μέγιστον ἐστὶ κοινὸν μέτρον, μὴ μετρείτω δὴ ὁ δ, τὸν γ, λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ δ γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. ὁ δὴ τοὺς α β γ μετρῶν, καὶ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον, τὸν δ μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, τοὺς δ γ ἄρα ἀριθμός τις μετρήσει, οἱ δ γ ἄρα, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ ε, καὶ ἐπεὶ ὁ ε τὸν δ μετρεῖ, ὁ δὲ δ τοὺς α β μετρεῖ, καὶ ὁ ε ἄρα, τοὺς α β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε ἄρα, τοὺς α β γ μετρεῖ, ὁ ε ἄρα τῶν α β γ, κοινόν ἐστι μέτρον, λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ε τῶν α β γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τις τοὺς α β γ ἀριθμοὺς, ἀριθμὸς, μείζων ὢν τοῦ ε, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ ζ, καὶ ἐπεὶ ὁ ζ τοὺς α β γ μετρεῖ, καὶ τοὺς α β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν, ὁ δ. ὁ ζ ἄρα τὸν δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ζ ἄρα, τοὺς δ γ μετρεῖ. καὶ τὸ τῶν δ γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μετρεῖ. τὸ δὲ τῶν γ δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν, ὁ ε, ὁ ζ ἄρα τὸν ε μετρεῖ, ὁ μείζων, τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς α β γ, ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ε. ὁ ε ἄρα τῶν α β γ, μέγιστον ἐστὶ κοινὸν μέτρον, τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων. εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ¶ Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει. ¶ Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν.



δ

ΠΑΣ ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν, ἢ μέρη.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ α βγ. καὶ ἔστω ἐλάσσων, ὁ βγ. λέγω ὅτι ὁ βγ, τοῦ α, ἤτοι μέρος ἐστὶν, ἢ μέρη, οἱ α βγ, πρότερον γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρῶτον πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντος δὴ τοῦ βγ, εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ βγ, μέρος τι τοῦ α ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ βγ, τοῦ α, μὴ ἔστωσαν δὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α βγ. ὁ δὴ βγ, τὸν α, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ, εἰ μὲν οὖν ὁ βγ τὸν α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ βγ, τοῦ α, εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν α βγ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ δ, καὶ διῃρήσθω ὁ βγ, εἰς τοὺς τῷ δ ἴσους, τοὺς βε εζ ζγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ, τὸν α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ δ τοῦ α. ἴσος δὲ ὁ δ ἑκατέρῳ τῶν βε εζ, καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν βε εζ ζγ, τοῦ α μέρος ἐστὶν ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ βγ, τοῦ α. ἅπας ἄρα ἀριθμὸς, παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν, ἢ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ε

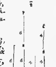
ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

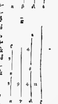
Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α ἀριθμοῦ τοῦ βγ, μέρος ἔστω. καὶ ἕτερος ὁ δ, ἑτέρου τοῦ εζ, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ. λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ αδ, συναμφοτέρου τοῦ βγ εζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ, ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α τοῦ βγ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ δ, τοῦ εζ, ὅσοι ἄρα ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ βγ ἴσοι τῷ α, τοσοῦτοι εἰσὶ καὶ ἐν τῷ εζ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ δ, διῃρήσθω ὁ μὲν βγ εἰς τοὺς τῷ α ἴσους, τοὺς βη ηγ. ὁ δὲ εζ εἰς τοὺς τῷ δ ἴσους τοὺς εθ θζ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν βη ηγ, τῷ πλήθει τῶν εθ θζ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν βη τῷ α, ὁ δὲ εθ τῷ δ, ὁ βη, ἄρα καὶ εθ τοῖς α δ ἴσοι εἰσίν, καὶ διὰ ταῦτα ὁ ηγ, τῷ α ἴσος ἐστὶν, καὶ ὁ θζ τῷ δ. καὶ οἱ ηγ θζ ἄρα, τοῖς α δ ἴσοι εἰσίν. ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βγ ἀριθμοὶ [illegible] τῷ α, τοσοῦτοι εἰσί,

σοῦτοί εἰσι, καὶ ἐν τοῖς βγ εζ, ἴσοι τοῖς α δ. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ βγ, τοῦ α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ βγ εζ συναμφοτέρου τοῦ α δ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ βγ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ, καὶ συναμφότερος ὁ α δ, συναμφοτέρου τοῦ βγ εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς

ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου, τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσαι, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ, μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ δε ἑτέρου τοῦ ζ, τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ αβ, τοῦ γ. λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ αβ δε, συναμφοτέρου τοῦ γζ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὁ αβ, τοῦ γ. ἐπεὶ γὰρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ δε, τοῦ ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ αβ μέρη τοῦ γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ δε, μέρη τοῦ ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν αβ εἰς τὰ τοῦ γ μέρη, τὰ αη ηβ, ὁ δὲ δε εἰς τὰ τοῦ ζ μέρη, τὰ δθ θε. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν αη ηβ, τῷ πλήθει τῶν δθ θε. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη τοῦ γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ δθ τοῦ ζ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ αη τοῦ γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ αη δθ, συναμφοτέρου τοῦ γζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηβ τοῦ γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ηβ θε συναμφοτέρου τοῦ γζ. ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ αβ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ αβ δε, συναμφοτέρου τοῦ γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





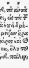
ζ

ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσαι, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ αε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γζ. λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ εβ, λοιποῦ τοῦ ζδ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ὃ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ αε τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω, καὶ ὁ εβ, τοῦ γη, καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ εβ, τοῦ γη. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ αε τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ ηζ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται, καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ ηζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τοῦ γδ. ὁ αβ ἄρα ἑκατέρου τῶν ηζ γδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ηζ τῷ γδ, κοινὸς ἀφῃρήσθω, ὁ γζ. λοιπὸς ἄρα ὁ ηγ, λοιπῷ τῷ ζδ ἴσος ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ εβ, τοῦ ηγ, ἴσος δὲ ὁ ηγ τῷ ζδ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ εβ τοῦ ζδ. ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ εβ τοῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ εβ λοιποῦ τοῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



η

ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσαι, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, μέρη ἔστω ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ αε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γζ. λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ εβ, λοιποῦ τοῦ ζδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. κείσθω γὰρ τῷ αβ ἴσος ὁ ηθ, ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ηθ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ηθ, εἰς τὰ τοῦ γδ μέρη, τὰ ηκ κθ, ὁ δὲ αε, εἰς τὰ τοῦ γζ μέρη, τὰ αλ λε. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ηκ κθ, τῷ πλήθει τῶν αλ λε. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αλ, τοῦ γζ, μείζων δὲ ὁ γδ, τοῦ γζ. μείζων ἄρα καὶ ὁ ηκ τοῦ αλ. κείσθω τῷ αλ ἴσος, ὁ ημ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ημ, τοῦ γζ, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ μκ, λοιποῦ τοῦ ζδ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ ηκ, ὅλου τοῦ γδ. πάλιν,



γδ. πάλιν, ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ κθ τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ελ τοῦ γζ, μείζων δὲ ὁ γδ τοῦ γζ, μείζων ἄρα καὶ ὁ κθ τοῦ ελ. κείσθω ἴσος τῷ ελ ὁ κν. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ κθ τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ὁ κν τοῦ γζ. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ θν, λοιποῦ τοῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ κθ, ὅλου τοῦ γδ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ μκ λοιποῦ τοῦ ζδ τὸ αὐτὸ μέρος ὤν, ὅπερ ὅλος ὁ ηκ, ὅλου τοῦ δγ, καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ μκ νθ, τοῦ δζ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ θη, ὅλου τοῦ δγ, ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ μκ νθ, τῷ εβ, ὁ δὲ θη, τῷ βα. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ εβ, λοιποῦ τοῦ ζδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



θ

ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ἀριθμοῦ τοῦ βγ, μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ δ, ἑτέρου τοῦ εζ, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α τοῦ δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ βγ, τοῦ εζ, ἢ μέρη. ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α τοῦ βγ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ δ τοῦ εζ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βγ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ α, τοσοῦτοι εἰσὶ καὶ ἐν τῷ εζ, ἴσοι τῷ δ. διῃρήσθω ὁ μὲν βγ, εἰς τοὺς τῷ α ἴσους τοὺς βη ηγ. ὁ δὲ εζ, εἰς τοὺς τῷ δ ἴσους, τοὺς εθ θζ, ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν βη ηγ, τῷ πλήθει τῶν εθ θζ, καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ βη ηγ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ εθ θζ, ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν βη ηγ, τῷ πλήθει τῶν εθ θζ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ βη, τοῦ εθ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, καὶ ὁ ηγ, τοῦ θζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν, ὁ βη, τοῦ εθ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ βγ, συναμφοτέρου τοῦ εζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσος δὲ ὁ μὲν βη, τῷ α, ὁ δὲ εθ, τῷ δ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ α τοῦ δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ βγ, τοῦ εζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι

ΕΑΝ ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ δε, ἑτέρου τοῦ ζ, τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ δε, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ, ἢ μέρος. ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ δε τοῦ ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ αβ μέρη τοῦ γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ δε μέρη τοῦ ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν αβ εἰς τὰ τοῦ γ μέρη, τὰ αη ηβ, ὁ δὲ δε, εἰς τὰ τοῦ ζ μέρη, τὰ δθ θε. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος, τῶν αη ηβ, τῷ πλήθει τῶν δθ θε, καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη τοῦ γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ δθ, τοῦ ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ δθ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ, ἢ μέρη τὰ αὐτά. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηβ, τοῦ θε, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ δθ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αβ, τοῦ δε, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἀλλ᾽ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ δθ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ τοῦ δε, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





καὶ ἐὰν ὡς

ια

ΕΑΝ ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν, ἔσται ὡς ὅλος, πρὸς ὅλον.

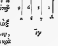
Ἔστω ὡς ὅλος ὁ αβ, πρὸς ὅλον τὸν γδ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ αε, πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν γζ. λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ εβ, πρὸς λοιπὸν τὸν ζδ, ἐστὶν ὡς ὅλος ὁ αβ, πρὸς ὅλον τὸν γδ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ αβ πρὸς τὸν γδ, οὕτως ὁ αε, πρὸς τὸν γζ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ αβ τοῦ γδ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ εβ, λοιποῦ τοῦ ζδ, τὸ αὐτὸ ὁμοίως ἐστὶν, ἢ μέρη, ἅπερ αβ, τοῦ γδ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εβ, πρὸς τὸν ζδ, οὕτως ὁ αβ, πρὸς τὸν γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιβ

ΕΑΝ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι, πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ α β γ δ, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ, καὶ ὁ γ τοῦ δ ἢ μέρη, καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ α γ, συναμφοτέρου τοῦ β δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ α τοῦ β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιγ

ΕΑΝ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ α β γ δ, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ. λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν, ὁ α τοῦ β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος, ἐστὶ καὶ ὁ γ τοῦ δ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α τοῦ γ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ β τοῦ δ, ἢ μέρη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιδ

ΕΑΝ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ α β γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ δ ε ζ. ὡς μὲν ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ὡς δὲ ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ. λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν ε, πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ β πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν δ. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν ζ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιε

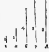
ΕΑΝ μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς, ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον

τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον. Μονὰς γὰρ ἡ α, ἀριθμόν τινα τὸν βγ μετρείτω ἰσάκις, ὁ δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ δ, ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν εζ μετρείτω, λέγω ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἰσάκις ἡ α μονὰς τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ βγ τὸν εζ. ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ α μονὰς τὸν βγ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ δ τὸν εζ, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βγ μονάδες, τοσοῦτοι εἰσὶ καὶ ἐν τῷ εζ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ δ. διῃρήσθω ὁ μὲν βγ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, τὰς βη ηθ θγ. ὁ δὲ εζ εἰς τοὺς τῷ δ ἴσους, τοὺς εκ κλ λζ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν βη ηθ θγ, τῷ πλήθει τῶν λζ εκ κλ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ βη ηθ θγ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ εκ κλ λζ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν βη ηθ θγ μονάδων, τῷ πλήθει τῶν εκ κλ λζ ἀριθμῶν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βη μονὰς, πρὸς τὸν εκ ἀριθμὸν, οὕτως ἡ ηθ μονὰς πρὸς τὸν κλ ἀριθμὸν, καὶ ἡ θγ μονὰς, πρὸς τὸν λζ ἀριθμόν, ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βη μονὰς πρὸς τὸν εκ, οὕτως ὁ βγ, πρὸς τὸν εζ. ἴση δὲ ἡ βη μονὰς, τῇ α μονάδι, ὁ δὲ εκ ἀριθμὸς, τῷ δ ἀριθμῷ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α μονὰς, πρὸς τὸν δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ βγ, πρὸς τὸν εζ. ἰσάκις ἄρα ἡ α μονὰς, τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ βγ, τὸν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιϛ

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ α β, καὶ ὁ μὲν α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, ὁ δὲ β τὸν α πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ γ, τῷ δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκεν, ὁ β ἄρα τὸν γ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ α μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε μονὰς τὸν α, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ἡ ε μονὰς, τὸν α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ β τὸν γ. ἐναλλὰξ ἄρα, ἰσάκις ἡ ε μονὰς τὸν β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν γ. πάλιν ἐπεὶ ὁ β τὸν α πολλαπλασιάσας τὸν δ πεποίηκεν, ὁ α ἄρα τὸν δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε μονὰς, τὸν β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ἡ ε μονὰς τὸν β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ α τὸν δ. ἰσάκις δὲ ἡ ε μονὰς τὸν β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ α τὸν γ. ἰσάκις ἄρα ὁ α ἑκάτερον τῶν γ δ μετρεῖ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γ, τῷ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

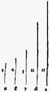


ιζ

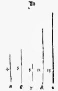
ΕΑΝ ἀριθμὸς, δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, δύο ἀριθμοὺς τοὺς βγ πολλαπλασιάσας τοὺς δ ε ποιείτω, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γὰρ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ β ἄρα τὸν δ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ζ μονὰς, τὸν α ἀριθμὸν, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ ζ μονὰς, τὸν α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζ μονὰς, πρὸς τὸν α ἀριθμὸν, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζ μονὰς, πρὸς τὸν α ἀριθμὸν, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ἄρα ὁ β πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν ε. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.



Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, ἀριθμόν τινα τὸν γ πολλαπλασιάσαντες, τοὺς δ ε ποιήτωσαν, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γὰρ ὁ α τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκε, καὶ ὁ γ ἄρα τὸν α πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκε, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ γ τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ γ, δύο ἀριθμοὺς τοὺς α β πολλαπλασιάσας, τοὺς δ ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιθ

ΕΑΝ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται, τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ. καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου, καὶ δευτέρου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ α β γ δ, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ μὲν α τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ε ποιείτω, ὁ δὲ β, τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν, ὁ ε, τῷ ζ. ὁ γὰρ α τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκε, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκε, ἀριθμὸς δὴ ὁ α, δύο ἀριθμοὺς τοὺς γ δ πολλαπλασιάσας, τοὺς η ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ε. ὡς δὲ ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, καὶ

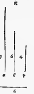


ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ α τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ β τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ πεποίηκεν, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ α β ἀριθμόν τινα τὸν γ πολλαπλασιάσαντες, τοὺς η ζ πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ἄρα ὁ η πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ζ, ὁ η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ε ζ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε, τῷ ζ. ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ ε, τῷ ζ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων. ἐπεὶ ὁ α τοὺς γ δ, πολλαπλασιάσας, τοὺς η ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ε, ἴσος δὲ ὁ ε, τῷ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ η πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν ζ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ η πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ η πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ

ΕΑΝ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, καὶ ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ, ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ α β γ, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν γ. λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, κείσθω γὰρ τῷ β ἴσος, ὁ δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν γ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν β δ. ὁ δὲ ἐκ τῶν β δ, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ β, ἴσος γὰρ ὁ β, τῷ δ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α γ, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ β. ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν α γ, ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ β. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ β ἴσος τῷ ἀπὸ τῶν β δ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν γ, ἴσος δὲ ὁ β, τῷ δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

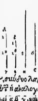


Οἱ ἐλάχιστοι

κβ

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ἰσάκις ὅ,τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα. Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, τοῖς α β, οἱ γδ εζ, λέγω ὅτι ἰσάκις ὁ γδ, τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ εζ, τὸν β. ὁ γδ γὰρ τοῦ α, οὐκ ἔστιν μέρη. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, καὶ ὁ εζ ἄρα τοῦ β, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ γδ τοῦ α, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ γδ μέρη τοῦ α, τοσαῦτα ἐστὶ, καὶ ἐν τῷ εζ μέρη τοῦ β. διῃρήσθω, ὁ μὲν γδ, εἰς τὰ τοῦ α μέρη, τὰ γη ηδ, ὁ δὲ εζ, εἰς τὰ τοῦ β μέρη, τὰ εθ θζ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν γη ηδ, τῷ πλήθει τῶν εθ θζ. καὶ ἐπεὶ οἱ γη ηδ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ εθ θζ ἀλλήλοις ἴσοι, καὶ ἐστὶν ἴσον πλῆθος τῶν γη ηδ τῷ πλήθει τῶν εθ θζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γη, πρὸς τὸν εθ, οὕτως ὁ ηδ, πρὸς τὸν θζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γη πρὸς τὸν εθ, οὕτως ὁ γδ, πρὸς τὸν εζ. οἱ γη, εθ ἄρα τοῖς γδ εζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν. ὅπερ ἀδύνατον. ὑπόκεινται γὰρ οἱ γδ εζ, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ γδ τοῦ α. μέρος ἄρα, καὶ ὁ εζ τοῦ β, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν. ὅπερ ὁ γδ τοῦ α. ἰσάκις ἄρα ὁ γδ, τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ εζ, τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε



κβ κα

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ α β γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ δ ε ζ. ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν. ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν β ε. πάλιν. ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν γ δ, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν β ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν α ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν β ε, καὶ ὁ ἐκ τῶν α ζ ἄρα, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν γ δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ

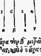


κγ

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ, ἐλάχιστοι εἰσὶ, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ, οἱ α β, λέγω ὅτι οἱ α β, ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰ γὰρ μὴ, εἰσὶν οἱ α β, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἔσονταί τινες τῶν α β ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες, τοῖς α β. ἔστωσαν οἱ γ δ. ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ἰσάκις, ὅ,τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅτε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἰσάκις ἄρα ὁ γ τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ δ τὸν β. ὁσάκις δὲ ὁ γ τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, καὶ ὁ δ ἄρα τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ε μονάδας, καὶ ἐπεὶ ὁ γ τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ ε μονάδας, καὶ ὁ ε ἄρα τὸν α μετρεῖ, κατὰ

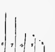
κγ



τρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ε τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας. ὁ ε ἄρα τοὺς α β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν α β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς α β, οἱ α β ἄρα, ἐλάχιστοι εἰσί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ

ΟΙ ἐλάχιστοι ἀριθμοί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ α β, λέγω ὅτι οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. εἰ γὰρ μή, εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ α β, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ γ, καὶ ὁσάκις μὲν ὁ γ τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ δ. ὁσάκις δὲ ὁ γ τὸν β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, καὶ ἐπεὶ ὁ γ τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας. ὁ γ ἄρα τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ γ τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ γ, δύο ἀριθμοὺς τοὺς δ ε πολλαπλασιάσας, τοὺς α β πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, οἱ δ ε ἄρα, τοῖς α β, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς α β ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ α β ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κε

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμός, πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α β, τὸν δὲ α μετρείτω τις ἀριθμός, ὁ γ. λέγω ὅτι καὶ οἱ β γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. εἰ γὰρ μή, εἰσὶν οἱ β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ δ, καὶ ἐπεὶ ὁ δ τὸν γ μετρεῖ, ὁ δὲ γ τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ δ ἄρα τὸν α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν β. ὁ δ ἄρα τοὺς α β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς α β ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει. οἱ γ β ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κϛ

ΕΑΝ δύο ἀριθμοί, πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, πρός τινα ἀριθμὸν τὸν γ ἔστωσαν πρῶτοι, καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω. λέγω ὅτι οἱ γ δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. εἰ γὰρ μή, εἰσὶν οἱ γ δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ ε, καὶ ἐπεὶ οἱ γ α, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τὸν δὲ γ μετρεῖ, τις ἀριθμὸς ὁ ε, οἱ ε α ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὲ ὁ ε τὸν δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, καὶ ὁ ζ ἄρα τὸν δ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ε μονάδας. ὁ ε ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν ε ζ τῷ ἐκ τῶν α β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ζ. οἱ δὲ α ε, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα. τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος, τὸν ἑπόμενον, ὁ ε ἄρα, τὸν β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε ἄρα, τοὺς β γ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς γ δ ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει, οἱ γ δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι,



κζ

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν, πρῶτος ἔσται.

κζ

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α β, καὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, λέγω ὅτι οἱ β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. κείσθω γὰρ τῷ α ἴσος ὁ δ, καὶ ἐπεὶ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ α τῷ δ, ~~καὶ ὁ α τῷ δ~~, καὶ οἱ β δ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἑκάτερος ἄρα τῶν α δ, πρὸς τὸν β, πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν δ α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν δ α γενόμενος ἀριθμός ἐστιν, ὁ γ. οἱ γ β ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

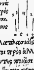


κη

Εὰν δύο ἀριθμοὶ, πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

κη

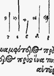
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς γ δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν α τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν ε ποιείτω, ὁ δὲ γ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ζ ποιείτω, λέγω ὅτι οἱ ε ζ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν α β, πρὸς τὸν γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν α β ἄρα γενόμενος, πρῶτος ἐστὶν πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ἐκ τῶν α β γενόμενος, ἐστὶν ὁ ε, οἱ ε γ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ε δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἑκάτερος ἄρα τῶν γ δ, πρὸς τὸν ε, πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν γ δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ε, πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν γ δ γενόμενος, ἐστὶν ὁ ζ. οἱ ε ζ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κθ

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινὰ, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α β, καὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ ποιείτω, τὸν δὲ γ πολλαπλασιάσας τὸν ε ποιείτω, ὁ δὲ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. λέγω ὅτι οἵ τε γ δ, καὶ οἱ ε ζ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκεν, οἱ γ β ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, ἐπεὶ ἄρα οἱ γ β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, οἱ γ δ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. πάλιν. ἐπεὶ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ὁ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ πεποίηκεν. οἱ α δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ α γ, πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς β δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοί εἰσι, καὶ ὁ ἐκ τῶν α γ ἄρα γενόμενος, πρὸς τὸν ἐκ τῶν β δ, πρῶτός ἐστι, καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν α γ, ὁ ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν β δ, ὁ ζ, οἱ ε ζ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ



λ

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν, πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ

αὐτῶν

αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοί, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

λ̄



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ αβ βγ, λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ αγ, πρὸς ἑκάτερον τῶν αβ βγ, πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ γα αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω. καὶ ἔστω ὁ δ, ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τοὺς γα αβ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν βγ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν βα, ὁ δ ἄρα, τοὺς αβ βγ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς γα αβ ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει, οἱ αβ αγ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὁ γα ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν αβ βγ, πρῶτός ἐστιν. ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ γα αβ, πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι. λέγω ὅτι καὶ οἱ αβ βγ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. εἰ γὰρ μή, εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ αβ βγ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ δ, καὶ ἐπεὶ ὁ δ ἑκάτερον τῶν αβ βγ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν γα μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν αβ, ὁ δ ἄρα τοὺς γα αβ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς αβ βγ, ἀριθμούς, ἀριθμός τις μετρήσει, οἱ αβ βγ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν. Ἔστω πρῶτος ἀριθμός, ὁ α, καὶ τὸν β μὴ μετρείτω. λέγω ὅτι οἱ β α, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ β α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ γ, ὁ γ οὐκ ἔστι μονάς, καὶ ἐπεὶ ὁ γ τὸν β μετρεῖ, ὁ δὲ α τὸν β οὐ μετρεῖ, ὁ γ ἄρα τῷ α, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός, καὶ ἐπεὶ ὁ γ τοὺς β α μετρεῖ, καὶ τὸν α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τοὺς β α, μετρήσει τις ἀριθμός, οἱ α β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα

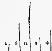


λβ

Ἐὰν δύο ἀριθμοί, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν, μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, τὸν γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ γ, μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ δ. λέγω ὅτι ὁ δ, ἕνα τῶν α β μετρεῖ. τὸν γὰρ α, μὴ μετρείτω, καὶ ἔστι πρῶτος ὁ δ, οἱ α δ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ὁσάκις ὁ δ τὸν γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε. ἐπεὶ οὖν ὁ δ τὸν γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ ε μονάδας, ὁ δ ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν δ ε, τῷ ἐκ τῶν α β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν ε. οἱ δὲ δ α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις. ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. ὁ δ ἄρα, τὸν β μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν ὁ δ τὸν β μὴ μετρῇ, τὸν α μετρήσει. ὁ δ ἄρα, ἕνα τῶν α β μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ



λγ

Ἅπας σύνθετος ἀριθμός, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Ἔστω σύνθετος ἀριθμός, ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ β, καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ β, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός, μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ γ, καὶ ἐπεὶ ὁ β τὸν γ μετρεῖ, καὶ ὁ γ ἄρα τὸν α μετρεῖ, καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ γ, δῆλον

6 4

ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τὶς αὐτὸν ἀριθμὸς, τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως, ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν α μετρήσει, εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν α ἀριθμὸν, ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς, ληφθήσεται τὶς ἄρα, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν α μετρήσει. ἅπας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ



Ἄλλως.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς, ὁ α, λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν, ὁ β. λέγω ὅτι ὁ β, πρῶτός ἐστιν, εἰ γὰρ μὴ, σύνθετος ἐστὶν. μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινὸς. μετρείσθω. καὶ ἔστω ὁ γ ὁ μετρῶν αὐτὸν. ὁ γ ἄρα τοῦ β, ἐλάσσων ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ ὁ γ τὸν β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ β τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ γ ἄρα τὸν α μετρεῖ. ἐλάσσων ὢν τοῦ β, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ β, σύνθετος ἀριθμὸς ἐστὶ πρῶτος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ

λδ

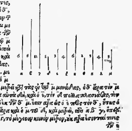
Ἅπας ἀριθμὸς, ἤτοι πρῶτος ἐστὶν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Ἔστω ἀριθμὸς, ὁ α, λέγω ὅτι ὁ α ἤτοι πρῶτος ἐστὶν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται, εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ α, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τὶς αὐτὸν πρῶτος ἀριθμὸς. ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτος ἐστὶν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λε

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ α β γ. δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ. οἱ α β γ γὰρ, ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ α β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν α β γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ δ, καὶ ὁσάκις ὁ δ, ἕκαστον τῶν α β γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν ε ζ η. καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ε ζ η, ἕκαστον τῶν α β γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας, οἱ ε ζ η, τοὺς α β γ ἰσάκις μετροῦσιν, οἱ ε ζ η ἄρα τοῖς α β γ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ε ζ η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς τοῖς α β γ, ἔσονταί τινες τῶν ε ζ η, ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες, τοῖς α β γ. ἔστωσαν οἱ θ κ λ. ἰσάκις ἄρα ὁ θ, τὸν α μετρεῖ, καὶ ἑκάτερος τῶν κ λ ἑκάτερον τῶν β γ. ὁσάκις δὲ ὁ θ τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ μ. καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν κ λ, ἑκάτερον τῶν β γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ μ μονάδας. ὁ μ ἄρα τοὺς α β γ μετρεῖ, καὶ ἐπεὶ ὁ θ τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ μ μονάδας, καὶ ὁ μ ἄρα τὸν α μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μ ἑκάτερον τῶν β γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν κ λ μονάδας, ὁ μ ἄρα τοὺς α β γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ θ τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ μ μονάδας, ὁ θ ἄρα τὸν μ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ ε, τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν ε δ, τῷ ἐκ τῶν θ μ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ μ πρὸς τὸν δ, μείζων δὲ ὁ ε τοῦ θ, μείζων ἄρα καὶ ὁ μ τοῦ δ, καὶ μετρεῖ, τοὺς α β γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὑπόκειται γὰρ ὁ δ, τῶν α β γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν ε

λε

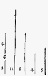


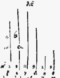
τῶν ε ζ ὑ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες, τοῖς α β γ. οἱ ε ζ ἢ ἄρα, ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, τοῖς α β γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, οἱ α β, δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν, οἱ α β γὰρ, ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ α β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, καὶ ὁ β ἄρα τὸν α πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. οἱ α β ἄρα, τὸν γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον, εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τινὰ ἀριθμὸν οἱ α β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ γ, μετρείτωσαν τὸν δ, καὶ ὁσάκις ὁ α τὸν δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁσάκις δὲ ὁ β τὸν δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ. ὁ μὲν α ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ δὲ β τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν α ε, τῷ ἐκ τῶν β ζ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν ε. οἱ δὲ α β, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις. ὅτε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων, τὸν ἐλάσσονα, ὁ β ἄρα, τὸν ε μετρεῖ. ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον, καὶ ἐπεὶ ὁ α, τοὺς β ε πολλαπλασιάσας, τοὺς γ δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ β πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ. μετρεῖ δὲ ὁ β τὸν ε, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ γ τὸν δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ α β, μετροῦσι τινὰ ἀριθμὸν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ γ, ὅταν οἱ α β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν. ὁ γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β μετρεῖται. μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β, οἱ ε ζ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν β ε, τῷ ἐκ τῶν α ζ. καὶ ὁ α τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, καὶ ὁ β ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. οἱ α β ἄρα, τὸν γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ α β, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ γ. μετρείτωσαν τὸν δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ α τὸν δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η. ὁσάκις δὲ ὁ β τὸν δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ θ. ὁ μὲν α ἄρα τὸν η πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ δὲ β τὸν θ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν α η, τῷ ἐκ τῶν β θ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν η. ὡς δὲ ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ἄρα ὁ ζ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν η. οἱ δὲ ζ ε, ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις. ὅτε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα. ὁ ε ἄρα, τὸν η μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ α τοὺς ε η πολλαπλασιάσας, τοὺς γ δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ ε τὸν η μετρεῖ, καὶ ὁ γ ἄρα τὸν δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ α β, μετρήσουσι τινὰ ἀριθμὸν, ἐλάσσονα τοῦ γ. ὁ γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

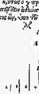




λζ

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ᾽ αὐτῶν μετρούμενος, τὸν αὐτὸν μετρήσει.

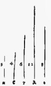
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, ἀριθμόν τινα τὸν γδ μετρείτωσαν. ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. λέγω ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γδ μετρεῖ. εἰ γὰρ οὔ, μετρεῖ ὁ ε τὸν γδ, ὁ ε τὸν ζδ μετρῶν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα, τὸν γζ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, τὸν ε μετροῦσιν, ὁ δὲ ε τὸν δζ μετρεῖ, καὶ οἱ α β ἄρα τὸν δζ μετρήσουσι, μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν γδ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν γζ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ε. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ ε, τὸν γδ, μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



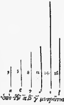
Τριῶν

λϛ

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, οἱ α β γ, δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν α β, ἐλάχιστος μετρούμενος, ὁ δ, ὁ δὴ γ τὸν δ, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ α β, τὸν δ, οἱ ἄρα α β γ, τὸν δ μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τινὰ ἀριθμὸν οἱ α β γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ δ, μετρείτωσαν τὸν ε. ἐπεὶ οὖν οἱ α β γ, τὸν ε μετροῦσι, καὶ οἱ α β ἄρα, τὸν ε μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν α β μετρούμενος, τὸν ε μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν α β μετρούμενος ἐστὶν ὁ δ, δ ἄρα τὸν ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα οἱ α β γ, μετροῦσι τινὰ ἀριθμὸν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ δ. οἱ α β γ, ἄρα ἐλάχιστον τὸν δ μετροῦσι. μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ γ τὸν δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν γ δ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ ε. ἐπεὶ οὖν οἱ α β, τὸν δ μετροῦσιν, ὁ δὲ δ τὸν ε μετρεῖ, καὶ οἱ α β ἄρα τὸν, ε μετροῦσι. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ γ τὸν ε, καὶ οἱ α β γ ἄρα, τὸν ε μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσι τινὰ οἱ α β γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ε μετρείτωσαν τὸν ζ. ἐπεὶ οἱ α β γ τὸν ζ μετροῦσι, καὶ οἱ α β, ἄρα τὸν ζ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν α β μετρούμενος ἐστὶν, ὁ δ, ὁ δ ἄρα, τὸν ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ γ τὸν ζ. οἱ δ γ ἄρα, τὸν ζ μετροῦσιν, ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν δ γ μετρούμενος, μετρήσει τὸν ζ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν δ γ μετρούμενος ἐστὶν, ὁ ε. ὁ ε ἄρα, τὸν ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα οἱ α β γ, μετροῦσι τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ ε. ὁ ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β γ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



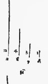
λζ



λθ

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος, ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ β μετρείσθω. λέγω ὅτι ὁ α, ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ β. ὁσάκις γὰρ ὁ β τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ γ. ἐπεὶ ὁ β τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ δ μονὰς τὸν γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ δ μονὰς, τὸν γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν α. ἐναλλὰξ ἄρα. ἰσάκις ἡ δ μονὰς τὸν β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ γ, τὸν α. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ δ μονὰς τοῦ β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ γ τοῦ α, ἡ δὲ δ μονὰς, τοῦ β ἀριθμοῦ, μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον, αὐτῷ καὶ ὁ γ ἄρα, τοῦ α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ β. ὥστε ὁ α μέρος ἔχει τὸ γ, ὁμώνυμον ὄντα, τῷ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ



μ

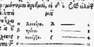
Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν, τὸν β καὶ τῷ β μέρει, ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς, ὁ γ. λέγω ὅτι ὁ γ, τὸν α μετρεῖ. ἐπεὶ γὰρ ὁ β τοῦ α μέρος ἐστὶ, καὶ ὁμώνυμον τῷ γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δ μονὰς τοῦ γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ, καὶ ὁ β, τοῦ α, ἰσάκις ἄρα ἡ δ μονὰς, τὸν γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν α. ἐναλλὰξ ἄρα. ἰσάκις ἡ δ μονὰς, τὸν β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ γ, τὸν α, ὁ γ ἄρα τὸν α μετρεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἀριθμὸν

μα

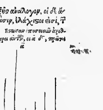
Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη. Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη, τὰ α β γ, δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὤν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη, ~~ἔστωσαν δὲ~~ τὰ α β γ. ἔστωσαν τοῖς α β γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί, οἱ δ ε ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν δ ε ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ η. ἐπεὶ οὖν ὁ η ὑπὸ τῶν δ ε ζ μετρεῖται, ὁ η ὁμώνυμα μέρη ἕξει τοῖς δ ε ζ. τοῖς δὲ δ ε ζ, ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ, τὰ α β γ. ὁ η ἄρα ἔχει, τὰ α β γ, μέρη. λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὤν. εἰ γὰρ μὴ ὁ η ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ α β γ μέρη, ἔσται τοῦ η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ α β γ μέρη, ἔστω ὁ θ, ἐπεὶ ὁ θ ἔχει τὰ α β γ μέρη, ὁ θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται, τοῖς α β γ μέρεσι, τοῖς δὲ α β γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν, οἱ δ ε ζ. ὁ θ ἄρα ὑπὸ τῶν δ ε ζ μετρεῖται, καί ἐστιν ἐλάσσων τοῦ η. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται τις, τοῦ η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἕξει τὰ α β γ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ
ΟΓΔΟΟΝ.

α

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ. οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν, οἱ α δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. λέγω ὅτι οἱ α β γ δ, ἐλάχιστοι εἰσί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν α β γ δ, οἱ ε ζ η θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς, καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, τοῖς ε ζ η θ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν α β γ δ, τῷ πλήθει τῶν ε ζ η θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν δ, ὁ ε πρὸς τὸν θ. οἱ δὲ α δ, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι ἀριθμοί, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ἰσάκις. ὅ τε ἡγούμενος, τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος, τὸν ἑπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ α, τὸν ε, ὁ μείζων, τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ ε ζ η θ, ἐλάσσονες ὄντες τῶν α β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς. οἱ α β γ δ, ἄρα, ἐλάχιστοι εἰσι, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

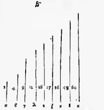


β

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ. Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ α πρὸς τὸν β. δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ α, πρὸς τὸν β λόγῳ. ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, τὸν δὲ

β πολλα-

β πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε ποιείτω. καὶ ἔτι ὁ α τοὺς γ δ ε πολλαπλασιάσας, τοὺς ζ η θ ποιείτω, ὁ δὲ β, τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν κ ποιείτω, καὶ ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας τὸν δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δή ὁ α, δύο τοὺς α β πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. πάλιν. ἐπεὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ δὲ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκεν, ἑκάτερος ἄρα τῶν α β, τὸν β πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν δ ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. καὶ ἐπεὶ ὁ α τοὺς γ δ πολλαπλασιάσας, τοὺς ζ η, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η. ὡς δὲ ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ἦν ὁ α, πρὸς τὸν β. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η. πάλιν. ἐπεὶ ὁ α, τοὺς δ ε πολλαπλασιάσας, τοὺς η θ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν θ. ἀλλ᾽

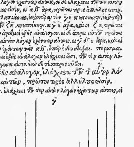


ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν θ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, τὸν ε πολλαπλασιάσαντες, τοὺς θ κ πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὅτε ζ πρὸς τὸν η, καὶ ὁ η πρὸς τὸν θ, καὶ ὡς ἄρα ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὕτως ὅτε η πρὸς τὸν θ. καὶ ὁ θ πρὸς τὸν κ, οἱ γ δ ε ἄρα, καὶ οἱ ζ η θ κ, ἀνάλογον εἰσίν, ἐν τῷ τοῦ α πρὸς τὸν β λόγῳ. λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ α β ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν α β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν γ ε πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τὸν γ ε πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν ζ κ, πεποίηκεν. οἱ γ ε ἄρα, καὶ οἱ ζ κ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον. οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοι εἰσί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ γ δ ε ἄρα, καὶ οἱ ζ η θ κ, ἐλάχιστοι εἰσί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν, τετράγωνοι εἰσίν. ἐὰν δὲ τέσσαρες κύβοι. γ.

ΕΑΝ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον. ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ α β γ δ. λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ α δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. εἰλήφθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ μὲν ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν α β γ δ λόγῳ οἱ ε ζ. τρεῖς δέ, οἱ η θ κ, καὶ αἰεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους. ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πλῆθος, ἴσον γένηται τῷ πλήθει, τῶν α β γ δ. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ λ μ ν ξ. οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν, οἱ λ ξ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ ε ζ πρῶτοι εἰσίν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν η κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τὸν η κ πολλαπλασιάσας τὸν ἑκάτερον τῶν λ ξ πε-



ποίηκεν,

ἑκάτερον

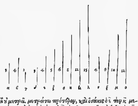
ποίηκεν, οἱ ῑ κ̄ ἄρα πρῶτοι. καὶ οἱ λ̄ ξ̄, καὶ ἐπεὶ οἱ ᾱ β̄ γ̄ δ̄, ἐλάχιστοι εἰσὶν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ λ̄ μ̄ ν̄ ξ̄ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς ᾱ β̄ γ̄ δ̄, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ᾱ β̄ γ̄ δ̄, τῷ πλήθει τῶν λ̄ μ̄ ν̄ ξ̄. ἕκαστος ἄρα τῶν ᾱ β̄ γ̄ δ̄, ἑκάστῳ τῶν λ̄ μ̄ ν̄ ξ̄ ἴσος ἐστὶν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν ᾱ, τῷ λ̄, ὁ δὲ δ̄, τῷ ξ̄. καὶ ἐπεὶ οἱ λ̄ ξ̄, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν λ̄, τῷ ᾱ, ὁ δὲ ξ̄ τῷ δ̄, καὶ οἱ ᾱ δ̄, ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

δ

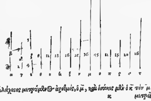
Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ τε τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄, καὶ ὁ τοῦ γ̄, πρὸς τὸν δ̄, καὶ ἔτι ὁ τοῦ ε̄, πρὸς τὸν ζ̄. δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἔν τε τῷ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄ λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ γ̄ πρὸς τὸν δ̄. καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ ε̄, πρὸς τὸν ζ̄. εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν β̄ γ̄, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ η̄, καὶ ὁσάκις μὲν ὁ β̄ τὸν η̄ μετρεῖ, τοσαυτάκις ὁ ᾱ τὸν θ̄ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ γ̄ τὸν η̄ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ δ̄ τὸν κ̄



μετρείτω. ὁ δὲ ε̄ τὸν κ̄, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον, καὶ ὁσάκις ὁ ε̄ τὸν κ̄ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ ζ̄ τὸν λ̄ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ ᾱ τὸν θ̄ μετρεῖ, καὶ ὁ β̄ τὸν η̄, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ᾱ πρὸς τὸν β̄, οὕτως ὁ θ̄ πρὸς τὸν η̄. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ὁ γ̄ πρὸς τὸν δ̄, οὕτως ὁ η̄ πρὸς τὸν κ̄, καὶ ἔτι ὡς ὁ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄, οὕτως ὁ κ̄ πρὸς τὸν λ̄. οἱ θ̄ η̄ κ̄ λ̄ ἄρα, ἑξῆς εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄, καὶ ἐν τῷ τοῦ γ̄ πρὸς τὸν δ̄, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄ λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ θ̄ η̄ κ̄ λ̄, ἑξῆς ἐλάχιστοι, ἔν τε τοῖς τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄, καὶ τοῦ γ̄, πρὸς τὸν δ̄, καὶ ἔτι τοῦ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν θ̄ η̄ κ̄ λ̄ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄, καὶ τοῦ γ̄, πρὸς τὸν δ̄, καὶ ἔτι τοῦ ε̄, πρὸς τὸν ζ̄ λόγοις. ἔστωσαν οἱ ν̄ ξ̄ μ̄ ο̄. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ᾱ πρὸς τὸν β̄, οὕτως ὁ ν̄ πρὸς τὸν ξ̄, οἱ δὲ ᾱ β̄ ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος, τὸν ἑπόμενον, ὁ β̄ ἄρα τὸν ξ̄ μετρεῖ.

δ

διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ γ̄, τὸν ξ̄ μετρεῖ, οἱ γ̄ β̄ ἄρα, τὸν ξ̄ μετροῦσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τῶν ὑπὸ β̄ γ̄ μετρούμενος τὸν ξ̄ μετρήσει, ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν β̄ γ̄ μετρούμενος ἐστὶν, ὁ η̄, ὁ η̄ ἄρα τὸν ξ̄ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν θ̄ η̄ κ̄ λ̄ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς, ἔν τε τῷ τοῦ ᾱ πρὸς τὸν β̄, καὶ ἐν τῷ τοῦ γ̄, πρὸς τὸν δ̄, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄ λόγῳ. μὴ μετρείτω δὴ ὁ ε̄, τὸν



κ̄. καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν ε̄ κ̄ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ μ̄, καὶ ὁσάκις μὲν ὁ κ̄ τὸν μ̄ μετρεῖ

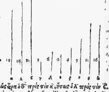


μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν η θ, ἑκάτερον τῶν ν ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ ε τὸν μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ ζ τὸν ο μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ η τὸν ν μετρεῖ, καὶ ὁ θ τὸν ξ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ θ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ ξ πρὸς τὸν ν. ὡς δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ξ πρὸς τὸν ν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ν πρὸς τὸν μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ ε τὸν μ μετρεῖ, καὶ ὁ ζ τὸν ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ μ πρὸς τὸν ο. οἱ ξ ν μ ο ἄρα ἑξῆς εἰσὶν ἐν τοῖς τοῦ α, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ γ πρὸς τὸν δ, καὶ τοῦ ε, πρὸς τὸν ζ λόγοις. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ξ ν μ ο ἑξῆς ἐλάχιστοι, ἐν τοῖς α β, γ δ, ε ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν ξ ν μ ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς α β, γ δ, ε ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ π ρ σ τ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ π πρὸς τὸν ρ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, οἱ δὲ α β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ὁ β ἄρα τὸν ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ γ, τὸν ρ μετρεῖ. οἱ β γ ἄρα, τὸν ρ μετροῦσι. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν β γ μετρούμενος, τὸν ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν β γ μετρούμενος ἐστιν, ὁ η, ὁ η ἄρα, τὸν ρ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ η πρὸς τὸν ρ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν σ. καὶ ὁ κ ἄρα τὸν σ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν σ. οἱ ε κ ἄρα, τὸν σ μετροῦσι. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν ε κ μετρούμενος, τὸν σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν ε κ μετρούμενός ἐστιν, ὁ μ. ὁ μ ἄρα τὸν σ μετρεῖ, ὁ μείζων, τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν ξ ν μ ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς, ἔν τε τοῖς τοῦ α πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ἔτι τοῦ ε πρὸς τὸν ζ λόγοις. οἱ ξ ν μ ο ἄρα, ἑξῆς ἐλάχιστοι εἰσὶν, ἐν τοῖς α β, γ δ, ε ζ λόγοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α πλευραὶ ἔστωσαν, οἱ γ δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ, λέγω ὅτι ὁ α πρὸς τὸν β, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ γ πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν ζ, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς γ ε, δ ζ λόγοις, οἱ η θ κ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν γ πρὸς τὸν ε, οὕτως τὸν η πρὸς τὸν θ. ὡς δὲ τὸν δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως τὸν θ πρὸς τὸν κ. οἱ ἄρα η θ κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τοὺς τῶν πλευρῶν λόγους. ἀλλ' ὁ τοῦ η, πρὸς τὸν κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ η πρὸς τὸν θ, καὶ τοῦ τοῦ θ πρὸς τὸν κ. ὁ η ἄρα πρὸς τὸν κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. λέγω οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν κ. ὁ δ γὰρ τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν λ ποιείτω. ἐπεὶ ὁ δ τὸν μὲν γ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας, τὸν λ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν λ. ὡς δὲ ὁ γ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ η πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν λ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ λ πρὸς τὸν β. ἀλλ' ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ. καὶ ὡς ἄρα ὁ θ πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ λ πρὸς τὸν β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ η πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν λ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ η πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ δὲ η πρὸς τὸν κ λόγον ἔχει, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

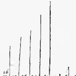
Non habet exemplar aliud, et videtur nihil huc pertinere.



ϛ

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνά-

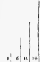
ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ ε. ὁ δὲ α τὸν β, μὴ μετρείτω, λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει, ὅτι μὲν οὖν οἱ α β γ δ ε, ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ α τὸν β μετρεῖ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. λέγω γὰρ, ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ α τὸν γ. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ α β γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, οἱ ζ η θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ζ η θ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς α β γ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν α β γ, τῷ πλήθει τῶν ζ η θ. δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν θ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ α τὸν β. οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ ζ τὸν η, οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ζ, ἡ γὰρ μονάς, πάντα μετρεῖ ἀριθμόν, καὶ εἰσιν οἱ ζ θ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. οὐδὲ ὁ ζ ἄρα τὸν θ μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν γ, οὐδὲ ὁ α ἄρα τὸν γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ζ

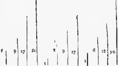
Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ. ὁ δὲ α τὸν δ μετρείτω, λέγω ὅτι, καὶ ὁ α τὸν β μετρεῖ. εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ α τὸν β, οὐδὲ ἄλλος, οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ ὁ α τὸν δ μετρεῖν. μετρεῖ δὲ ὁ α τὸν δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



η

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ γ δ. καὶ πεποιήσθω, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς α β, μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς ε ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει, οἱ α β γ δ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοί, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, τοῖς α β γ δ. οἱ η θ κ λ. οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ η λ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ δ, τοῖς η θ κ λ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν α β γ δ, τῷ πλήθει τῶν η θ κ λ. δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν λ. ὡς δὲ ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ἄρα ὁ η πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ. οἱ δὲ η λ, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοί, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, ἰσάκις ἄρα τὸν ε μετρεῖ

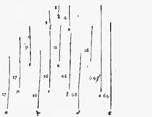


τρεῖ, ὁ η, καὶ ὁ λ, τὸν ζ, ὁσάκις δὲ ὁ η τὸν ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν θ κ, ἑκάτερον τῶν μ ν, μετρείτω. οἱ η θ κ λ ἄρα, τοῖς ε μ ν ζ, ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ η θ κ λ, ἄρα τοῖς ε μ ν ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ η θ κ λ, τοῖς α γ δ β, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ α γ δ β, ἄρα τοῖς ε μ ν ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ α γ δ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. καὶ οἱ ε μ ν ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς α β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς ε ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ α β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν, οἱ γ δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ ε μονάς. λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς α β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν α β, καὶ τῆς ε μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν α γ δ β λόγῳ ὄντες, οἱ ζ η, τρεῖς δέ, οἱ θ κ λ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν, τῷ πλήθει τῶν α γ δ β. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ μ ν ξ ο. φανερὸν δή, ὅτι ὁ μὲν ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν θ πεποίηκεν, τὸν δὲ θ πολλαπλασιάσας, τὸν μ πεποίηκε, καὶ ὁ η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν λ πεποίηκε, τὸν δὲ λ πολλαπλασιάσας, τὸν ο πεποίηκε, καὶ ἐπεὶ οἱ μ ν ξ ο, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς η ζ, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ α γ δ β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς η ζ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν μ ν ξ ο, τῷ πλήθει τῶν α γ δ β. ἕκαστος ἄρα τῶν μ ν ξ ο ἑκάστῳ τῶν α γ δ β ἴσος ἐστίν, ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν μ τῷ α, ὁ δὲ ο τῷ β. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν θ πεποίηκεν, ὁ ζ ἄρα τὸν θ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε μονὰς τὸν ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ἡ ε μονάς, τὸν ζ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ ζ τὸν θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν θ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ζ πρὸς τὸν θ πολλαπλασιάσας, τὸν μ πεποίηκεν, ὁ θ ἄρα τὸν μ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε μονὰς τὸν ζ ἀριθμόν, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ἡ ε μονὰς τὸν ζ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ θ τὸν μ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν θ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν θ, καὶ ὁ θ πρὸς τὸν μ, ὁ δὲ μ τῷ α, ἴσος ἐστίν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν ζ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν θ, καὶ ὁ θ πρὸς τὸν α, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ε μονὰς πρὸς τὸν η ἀριθμόν, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ λ πρὸς τὸν β. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς α β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν α β, καὶ μονάδος τῆς ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ι

ΕΑΝ δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς

ὅσοι ἄρα ἴσοι τῷ πλήθει ἐμπίπτουσιν ἑκατέρου μεταξὺ καὶ μονάδος.

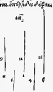
27 · 36 · 48 64
9. 16
3 4 ... 8 16

τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, καὶ μονάδος τῆς γ μεταξὺ, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ δ ε, καὶ οἱ ζ η, λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν α β, καὶ μονάδος τῆς γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς α β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὁ δ γὰρ τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν θ ποιείτω. ἑκάτερος δὲ τῶν δ ζ τὸν θ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν κ λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γ μονὰς πρὸς τὸν δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, ἰσάκις ἄρα ἡ γ μονὰς τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ δ τὸν ε, ἡ δὲ γ μονὰς, τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας. καὶ ὁ δ ἄρα τὸν ε μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας, ὁ δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκε. πάλιν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γ μονὰς πρὸς τὸν δ ἀριθμόν, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν α, ἰσάκις ἄρα ἡ γ μονὰς τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ ε, τὸν α. ἡ δὲ γ μονὰς τὸν δ ἀριθμὸν μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ δ μονάδας. καὶ ὁ ε ἄρα τὸν α μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ δ μονάδας. ὁ δ ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκε, τὸν δὲ η πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν ε πεποίηκε, τὸν δὲ ζ πολλαπλασιάσας, τὸν θ. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν η. καὶ ὡς ἄρα ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν η. πάλιν. ἐπεὶ ὁ δ ἑκάτερον τῶν ε θ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν α κ πεποίηκεν, ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν κ. ἀλλ' ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ἄρα ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν κ. πάλιν. ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν δ ζ τὸν θ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν κ λ πεποίηκεν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν λ. ἀλλ' ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν κ. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ ζ ἑκάτερον τῶν η θ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν λ β πεποίηκεν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ θ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ λ πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. καὶ ὡς ἄρα ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ λ πρὸς τὸν β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὅτε α πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ λ πρὸς τὸν β. οἱ α κ λ β ἄρα, κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον. ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν α β, καὶ τῆς γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς α β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ια

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

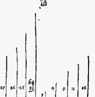


Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοί, οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α πλευρὰ ἔστω ὁ γ, τοῦ δὲ β, ὁ δ. λέγω ὅτι τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ γ γὰρ τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ γ, ὁ γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ γ ἑκάτερον τῶν γ δ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν α ε πεποίηκεν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν ε. πάλιν. ἐπεὶ ὁ γ τὸν δ πολλα-

δ πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκεν, ὁ δὲ δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ γ δ, ἕνα ἀριθμόν, καὶ τὸν αὐτὸν τὸν δ πολλαπλασιάσαντες, τοὺς ε β πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν β. ἀλλ' ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν ε. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν β. τῶν α β ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐστὶν ἀριθμός, ὁ ε. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ α πρὸς τὸν β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α ε β, ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α πρὸς τὸν ε. ὡς δὲ ὁ α πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πλευρά, πρὸς τὴν δ πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ

Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοί, οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α πλευρὰ ἔστω ὁ γ, τοῦ δὲ β, ὁ δ, λέγω ὅτι τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ γὰρ γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν ε ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ ποιείτω. ὁ δὲ δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. ἑκάτερος δὲ τῶν γ δ τὸν ζ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν θ κ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ γ, ὁ γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκε, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκε, τὸν δὲ η πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ γ ἑκάτερον τῶν γ δ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν ε ζ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η. πάλιν. ἐπεὶ ὁ γ ἑκάτερον τῶν ε ζ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν α θ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ οὕτως ὁ α πρὸς τὸν θ. ὡς δὲ ὁ ε πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. καὶ ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν θ. πάλιν. ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν γ δ, τὸν ζ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν θ κ πεποίηκεν.



ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ. πάλιν. ἐπεὶ ὁ δ, ἑκάτερον τῶν ζ η πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν κ β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. καὶ ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὅτε α, πρὸς τὸν θ, καὶ ὁ θ πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ πρὸς τὸν β. τῶν α β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ θ κ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α θ κ β, ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α πρὸς τὸν θ. ὡς δὲ ὁ α πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ α ἄρα, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινάς, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινάς, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ α β γ, ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν γ. καὶ οἱ α β γ, ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες, τοὺς δ ε ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ δ ε ζ πολλαπλασιάσαντες

λαπλασιάσαντες τοὺς ν̄ θ̄ κ̄ ποιείτωσαν. λέγω ὅτι οἵτε δ̄ ε̄ ζ̄ καὶ οἱ ν̄ θ̄ κ̄, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ μὲν γὰρ α̅ τὸν β̅ πολλαπλασιάσας, τὸν λ̄ ποιείτω. ἑκάτερος δὲ τῶν α̅ β̅, τὸν λ̄ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν μ̄ ν̄ ποιείτω. καὶ πάλιν. ὁ μὲν β̅ τὸν γ̄ πολλαπλασιάσας, τὸν ξ̄ ποιείτω. ἑκάτερος δὲ τῶν β̅ γ̄, τὸν ξ̄ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν ο̄ π̄ ποιείτω. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι οἱ δ̄ λ̄ ε̄, καὶ οἱ μ̄ ν̄ θ̄. ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ α̅ πρὸς τὸν β̅ λόγῳ. καὶ ἔτι οἱ ε̄ ξ̄ ζ̄, καὶ οἱ θ̄ ο̄ π̄ κ̄, ἑξῆς εἰσιν ἐν τῷ τοῦ β̅ πρὸς τὸν γ̄ λόγῳ. καί ἐστιν ὡς ὁ α̅, πρὸς τὸν β̅, οὕτως ὁ β̅ πρὸς τὸν γ̄. καὶ οἱ δ̄ λ̄ ε̄ ἄρα, τοῖς ε̄ ξ̄ ζ̄, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. καὶ ἔτι οἱ η̄ μ̄ ν̄ θ̄ τοῖς θ̄ ο̄ π̄ κ̄. καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν δ̄ λ̄ ε̄ πλῆθος, τῷ τῶν ε̄ ξ̄ ζ̄ πλήθει. τὸ δὲ τῶν η̄ μ̄ ν̄ θ̄ τῷ τῶν θ̄ ο̄ π̄ κ̄. δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν. ὡς μὲν ὁ δ̄ πρὸς τὸν ε̄, οὕτως ὁ ε̄ πρὸς τὸν ζ̄. ὡς δὲ ὁ η̄ πρὸς τὸν θ̄ οὕτως ὁ θ̄ πρὸς τὸν κ̄. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ



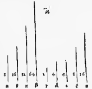
ιδ

ΕΑΝ τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ, οἱ α̅ β̅, πλευραὶ δὲ αὐτῶν, οἱ γ̄ δ̄. ὁ δὲ α̅ τὸν β̅ μετρείτω. λέγω ὅτι καὶ ὁ γ̄ τὸν δ̄ μετρεῖ, ὁ γ̄ γὰρ τὸν δ̄ πολλαπλασιάσας τὸν ε̄ ποιείτω. οἱ α̅ ε̄ β̅ ἄρα, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ γ̄ πρὸς τὸν δ̄ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ α̅ ε̄ β̅, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ α̅ τὸν β̅, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α̅, τὸν ε̄, καί ἐστιν ὡς ὁ α̅ πρὸς τὸν ε̄, οὕτως ὁ γ̄ πρὸς τὸν δ̄. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ γ̄ τὸν δ̄. ἀλλὰ δὴ, μετρείτω ὁ γ̄ τὸν δ̄. λέγω ὅτι καὶ ὁ α̅ τὸν β̅ μετρεῖ, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ α̅ ε̄ β̅, ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ γ̄ πρὸς τὸν δ̄ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ γ̄ πρὸς τὸν δ̄, οὕτως ὁ α̅ πρὸς τὸν ε̄, μετρεῖ δὲ ὁ γ̄ τὸν δ̄, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α̅, τὸν ε̄. καί εἰσιν οἱ α̅ ε̄ β̅, ἑξῆς ἀνάλογον. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ α̅ τὸν β̅. ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ, τὴν πλευρὰν μετρήσει. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιε

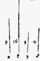
ΕΑΝ κύβος ἀριθμὸς, κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει. κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α̅, κύβον ἀριθμὸν τὸν β̅ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν α̅ πλευρὰ ἔστω ὁ γ̄, τοῦ δὲ β̅, ὁ δ̄, λέγω ὅτι ὁ γ̄ τὸν δ̄ μετρήσει. ὁ γ̄ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε̄ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ γ̄ τὸν δ̄ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ̄ ποιείτω, ὁ δὲ δ̄ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν η̄ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν γ̄ δ̄ τὸν ζ̄ πολλαπλασιάσας ἑκά-



τέρον τὸν θ τὸν κ ποιείτω. φανερὸν δή, ὅτι οἱ ε ζ η, καὶ οἱ α θ κ β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ γ πρὸς τὸν δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ α θ κ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ α τὸν β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν θ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ γ τὸν δ. ἀλλὰ δή, μετρείτω ὁ γ τὸν δ. λέγω ὅτι καὶ ὁ α τὸν β μετρήσει, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ α θ κ β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ γ πρὸς τὸν δ λόγῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ γ τὸν δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν θ, καὶ ὁ α ἄρα τὸν θ μετρεῖ. ὥστε καὶ τὸν β μετρεῖ ὁ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

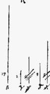
ιϛ

ΕΑΝ τετράγωνος ἀριθμὸς, τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ᾽ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. Ἔστωσαν τετράγωνοι, οἱ α β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ γ δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ α τὸν β. λέγω ὅτι, οὐδὲ ὁ γ τὸν δ μετρήσει. εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ γ τὸν δ, μετρήσει καὶ ὁ α τὸν β, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ α τὸν β, οὐδ᾽ ἄρα ὁ γ τὸν δ μετρήσει. μὴ μετρείτω δὴ πάλιν, ὁ γ τὸν δ. λέγω ὅτι, οὐδ᾽ ὁ α τὸν β μετρήσει. εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ α τὸν β, μετρήσει καὶ ὁ γ τὸν δ, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ γ τὸν δ, οὐδ᾽ ἄρα ὁ α τὸν β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



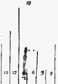
ιζ

ΕΑΝ κύβος ἀριθμὸς, κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδ᾽ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει, κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ᾽ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει. Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν α πλευρὰ ἔστω ὁ γ, τοῦ δὲ β ὁ δ. λέγω ὅτι ὁ γ τὸν δ, οὐ μετρήσει. εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ γ τὸν δ, καὶ ὁ α τὸν β μετρήσει, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ α τὸν β, οὐδ᾽ ἄρα ὁ γ τὸν δ μετρεῖ. ἀλλὰ δή, μὴ μετρείτω ὁ γ τὸν δ, λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ α τὸν β μετρήσει. εἰ γὰρ ὁ α τὸν β μετρεῖ, καὶ ὁ γ τὸν δ μετρήσει, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ γ τὸν δ, οὐδ᾽ ἄρα ὁ α τὸν β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιη

ΔΥΟ ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α πλευραὶ ἔστωσαν, οἱ γ δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ ε ζ, καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ. λέγω οὖν ὅτι τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ γ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν ε, ἢ ὁ δ πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ε, ὁ δ πρὸς τὸν ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ γ δ, ὁ δ ἄρα τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ε τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ὁ δ δὴ τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε, τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν η πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν η. ἀλλ᾽ ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ζ. καὶ ὡς ἄρα ὁ



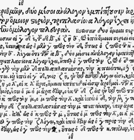
δ πρὸς

δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ε τὸν μὲν δ πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν, τὸν δὲ ζ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν β. ἐδείχθη δὲ, καὶ ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν η. καὶ ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν β. οἱ α η β ἄρα, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι. τῶν α β ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ α πρὸς τὸν β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ἤπερ ὁ γ πρὸς τὸν ε, ἢ ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ γὰρ οἱ α η β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ α πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν η, καὶ ἔστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν η, οὕτως ὅ τε γ πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἢ ὁ δ πρὸς τὸν ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ

ΔΥΟ ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ, οἱ α β, καὶ τοῦ μὲν α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ γ δ ε, τοῦ δὲ β, οἱ ζ η θ, καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μὲν γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η. ὡς δὲ ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν θ. λέγω ὅτι τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι ὁ ε πρὸς τὸν θ. ὁ γ γὰρ τὸν μὲν δ πολλαπλασιάσας, τὸν κ ποιείτω, ὁ δὲ ζ τὸν η πολλαπλασιάσας, τὸν λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ γ δ, τοῖς ζ η, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν γ δ, ἐστὶν ὁ κ, ἐκ δὲ τῶν ζ η, ὁ λ, οἱ κ λ ἄρα, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. τῶν κ λ ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, ἔστω ὁ μ. ὁ μ ἄρα ἐστὶν, ὁ ἐκ τῶν δ ζ. ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν μ, ὁ μ πρὸς τὸν λ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ, τὸν μὲν γ πολλαπλασιάσας, τὸν κ πεποίηκε, τὸν δὲ ζ πολλαπλασιάσας τὸν μ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν μ. ἀλλ' ὡς ὁ κ πρὸς τὸν μ, οὕτως ὁ μ πρὸς τὸν λ, οἱ κ μ λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἐν τῷ τοῦ γ πρὸς τὸν ζ λόγῳ, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν η. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η πρὸς τὸν θ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ δ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν θ, οἱ κ μ λ ἄρα, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἔν τε τῷ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ τῷ τοῦ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι τοῦ ε, πρὸς τὸν θ λόγῳ, ἑκάτερος δὴ τῶν ε θ, τὸν μ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν ν ξ, ποιείτω. καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ γ δ ε, ὁ ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν γ δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν. ὁ δὲ ἐκ τῶν γ δ, ἐστὶν ὁ κ, ὁ ε ἄρα τὸν κ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ θ τὸν λ πολλαπλασιάσας, τὸν ἐκ τῶν ζ η τὸν β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ ε τὸν κ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν μ πολλαπλασιάσας τὸν ν πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κ πρὸς τὸν μ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν ν. ὡς δὲ ὁ κ πρὸς τὸν μ, οὕτως ὅ τε γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι ὁ ε πρὸς τὸν θ. ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν ε θ τὸν μ πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν ν ξ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ ν πρὸς τὸν ξ. ἀλλ' ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὅ τε γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως

ιβ

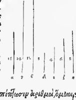


ὅ τε α

ὅτι ὁ α πρὸς τὸν ν, καὶ ὁ ν πρὸς τὸν ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ θ τὸν μ πολλαπλασιάσας, τὸν ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν λ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ξ πρὸς τὸν β. ἀλλ᾽ ὡς ὁ μ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὅτε γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε πρὸς τὸν θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως οὐ μόνον ὁ ξ πρὸς τὸν β, ἀλλὰ καὶ ὁ α πρὸς τὸν ν, καὶ ὁ ν πρὸς τὸν ξ. οἱ α ν ξ β ἄρα, ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις. λέγω ὅτι καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. τουτέστιν, ἤπερ ὁ γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ζ, ἢ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α ν ξ β, ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α πρὸς τὸν ν. ἀλλ᾽ ὡς ὁ α πρὸς τὸν ν, οὕτως ἐδείχθη ὅτε γ πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι ὁ ε, πρὸς τὸν θ, καὶ ὁ α πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. τουτέστιν, ἤπερ ὁ γ ἀριθμὸς, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ἔτι ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ

ΕΑΝ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται ἀριθμοί. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς, ὁ γ, λέγω ὅτι οἱ α β, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β, οἱ δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, ὁ α πρὸς τὸν γ. ὡς δὲ ὁ α πρὸς τὸν γ, ὁ γ πρὸς τὸν β. ἰσάκις ἄρα ὁ δ, τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ ε τὸν γ, ὁσάκις δὲ ὁ δ τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, ὁ ζ ἄρα τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. τὸν δὲ ε πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὥστε ὁ α ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ δ ζ. πάλιν, ἐπεὶ οἱ δ ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, τοῖς γ β. ἰσάκις ἄρα ὁ δ τὸν γ μετρεῖ, καὶ ὁ ε, τὸν β. ὁσάκις δὲ ὁ ε τὸν β μετρεῖ. τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁ ε ἄρα τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ η μονάδας, ὁ η ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν, ὁ β ἄρα, ἐπίπεδός ἐστιν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν, οἱ ε η, οἱ α β ἄρα ἐπίπεδοι εἰσὶν ἀριθμοί. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν ζ η, τὸν ε πολλαπλασιάσας, ἑκάτερον τῶν γ β πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ἄρα, ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, οἱ α β ἄρα, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν. αἱ γὰρ αὐτῶν πλευραὶ, ἀνάλογόν εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κα

ΕΑΝ δύο ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί. Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ γ δ, λέγω ὅτι οἱ α β, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων, τοῖς α γ δ β, οἱ ε ζ η, οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ ε η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ἐπεὶ τῶν ε η, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ ζ, οἱ ε η ἄρα ἀριθμοί, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. ἔστωσαν δὴ τοῦ μὲν ε πλευραὶ οἱ θ κ, τοῦ δὲ η οἱ λ μ, φανερὸν ἄρα δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι οἱ ε ζ η, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τε τῷ τοῦ θ πρὸς τὸν λ λόγῳ, καὶ τῷ τοῦ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ἐπεὶ οἱ ε ζ η, ἐλάχιστοί εἰσιν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ, διίσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ ε πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν δ, οἱ δὲ ε η, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅτε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν, ὅτε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, ἰσάκις ἄρα ὁ ε τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ η τὸν δ. ὁσάκις δὴ ὁ ε τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ν. ὁ ν ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν.

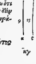


πεποίηκεν, ὁ δὲ ε, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν θ κ. ὁ ν ἄρα, τὸν ἐκ τῶν θ κ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν, οἱ θ κ ν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ ε ζ η ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς γ δ β, ἰσάκις ἄρα ὁ ε τὸν γ μετρεῖ, καὶ ὁ η τὸν β. ὁσάκις δὲ ὁ η τὸν β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ξ, ὁ ν ἄρα, τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ξ μονάδας, ὁ ξ ἄρα τὸν η πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν, ὁ δὲ η ἐστὶν, ὁ ἐκ τῶν λ μ. ὁ ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν λ μ πολλαπλασιάσας τὸν β πεποίηκεν, ~~ὁ ν δὲ ε πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκεν.~~ στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ λ μ ξ, οἱ α β ἄρα, στερεοί εἰσι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ ν ξ, τὸν ε πολλαπλασιάσαντες, τοὺς α γ πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ν πρὸς τὸν ξ, ὁ α πρὸς τὸν γ, τουτέστιν ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἀλλ᾽ ὡς ὁ ε πρὸς τὸν ζ, ὁ θ, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ κ πρὸς τὸν μ, καὶ ὡς ἄρα ὁ θ πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν μ καὶ ὁ ν πρὸς τὸν ξ. καί εἰσιν, οἱ μὲν θ κ ν, πλευραὶ τοῦ α, οἱ δὲ ξ λ μ, πλευραὶ τοῦ β. οἱ α β ἄρα, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κβ

ΕΑΝ τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται. Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ α, τετράγωνος ἔστω. λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ τῶν α γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ β, οἱ α γ ἄρα, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι, τετράγωνος δὲ, ὁ α. τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κγ

ΕΑΝ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ, ὁ δὲ α, κύβος ἔστω. λέγω ὅτι καὶ ὁ δ κύβος ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τῶν α δ, δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσὶν ἀριθμοί, οἱ β γ οἱ α δ ἄρα, ὅμοιοι εἰσὶν στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ, ὁ α, κύβος ἄρα καὶ ὁ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ

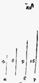


κδ

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ γ πρὸς

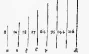
γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὸν δ, ὁ δὲ α, τετράγωνος ἔστω, λέγω ὅτι καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ, τετράγωνοι εἰσίν, οἱ γ δ ἄρα, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσί. τῶν γ δ ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, ὁ α πρὸς τὸν β, καὶ τῶν α β ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καὶ ἔστιν ὁ α τετράγωνος καὶ ὁ β ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ



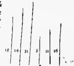
κε

ΕΑΝ δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ γ, πρὸς κύβον ἀριθμόν, τὸν δ. κύβος δὲ ἔστω, ὁ α, λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ β, κύβος ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ κύβοι εἰσίν, οἱ γ δ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσίν. τῶν γ δ ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, ὅσοι δὲ εἰς τοὺς γ δ, μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὥστε καὶ τῶν α β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ ἐμπιπτέτωσαν οἱ ε ζ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ α ε ζ β, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ α, κύβος ἄρα καὶ ὁ β, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



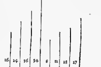
κς

ΟΙ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, οἱ α β. λέγω ὅτι ὁ α πρὸς τὸν β, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β ἐπίπεδοι εἰσί, τῶν α β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς, ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, οἱ δ ε ζ οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν, οἱ δ ζ, τετράγωνοι εἰσί, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ζ οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ εἰσὶν οἱ δ ζ, τετράγωνοι. ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κζ

ΟΙ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν. Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί, οἱ α β, λέγω ὅτι ὁ α, πρὸς τὸν β, λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν, ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσί, τῶν α β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, ἐμπιπτέτωσαν οἱ γ δ. καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ ε ζ η θ, οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν, οἱ ε θ, κύβοι εἰσί, καὶ ἔστιν ὡς ὁ ε πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ ὁ α ἄρα πρὸς τὸν β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς, πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΕΝΝΑΤΟΝ.

α

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἀριθμοὶ οἱ α β, καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω, λέγω ὅτι ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν. ὁ γὰρ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, ὁ δ ἄρα, τετράγωνός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν γ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, τῶν α β ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο μεταξὺ ἀριθμῶν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας. ὥστε καὶ τῶν δ γ, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ δ, τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



β

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.

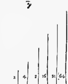
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, τετράγωνον, τὸν γ ποιείτωσαν. λέγω ὅτι οἱ α β, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. ὁ γὰρ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω. ὁ δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ δ πρὸς τὸν γ, καὶ ἐπεὶ ὁ δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ γ. οἱ δ γ ἄρα, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. τῶν δ γ ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός, καί ἐστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β. καὶ τῶν α β ἄρα, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, οἱ α β ἄρα, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



γ

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ β, κύβος ἐστίν. εἰλήφθω γὰρ τοῦ α πλευρά, ὁ γ, καὶ ὁ γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω. φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ γ, τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ γ ἄρα τὸν δ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μήν, καὶ ἡ μονὰς, τὸν γ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ πρὸς τὸν δ. πάλιν ἐπεὶ ὁ γ τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκεν, ὁ δ ἄρα τὸν α μετρεῖ, κατὰ τὰς



ἐν αὐτῷ γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ δ πρὸς τὸν α. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ γ πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν α. τῶν ἄρα μονάδος, καὶ τοῦ α ἀριθμοῦ, δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, οἱ γ δ. πάλιν ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν, ὁ α ἄρα τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς, τὸν α, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ α, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. καὶ τῶν α, β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται, καὶ ἔστιν ὁ α κύβος, καὶ ὁ β ἄρα, κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας, ποιῇ τινὰ, ὁ γενόμενος, κύβος ἔσται.

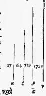
Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ γ, κύβος ἐστίν. ὁ α γὰρ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, ὁ δ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν γ. καὶ ἐπεὶ οἱ α β, κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν α β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὥστε καὶ τῶν γ δ, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ δ, κύβος ἄρα καὶ ὁ γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ε

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς, κύβος ἔσται.

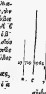
Κύβος γὰρ ὁ α, ἀριθμόν τινα τὸν β πολλαπλασιάσας, κύβον τὸν γ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ β, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν δ πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ δ πρὸς τὸν γ. καὶ ἐπεὶ οἱ δ γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι. τῶν δ γ ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ δ πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν α β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ἔστι κύβος ὁ α, κύβος ἄρα ἐστὶ, καὶ ὁ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ϛ

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, κύβον τὸν β ποιείτω. λέγω ὅτι καὶ ὁ α, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ γ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ β πρὸς τὸν γ. καὶ ἐπεὶ β γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. τῶν β γ ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσὶν ἀριθμοί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν α β ἄρα, δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσὶν ἀριθμοί, καὶ ἔστι κύβος ὁ β κύβος ἄρα ἐστὶ, καὶ ὁ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



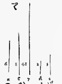
ζ

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας, ποιῇ τινὰ, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α

ἀριθμὸν

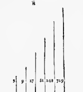
ἀριθμόν τινα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ γ στερεός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινὸς μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ δ. καὶ ὁσάκις ὁ δ τὸν α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε. ὁ ε ἄρα τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ δὴ α ἐστὶν, ὁ ἐκ τῶν δ ε, ὁ ἄρα ἐκ τῶν δ ε τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ β ἄρα τὸν ἐκ τῶν δ ε πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ γ ἄρα στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ δ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



η

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος, ἀπὸ τῆς μονάδος, τετράγωνός ἐστιν. καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος, κύβος. καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος, κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ ε ζ, λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος, ὁ β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες. ὁ δὲ τέταρτος ὁ γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ὁ δὲ ἕβδομος ὁ ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ α πρὸς τὸν β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ α τὸν β. ἡ δὲ μονὰς τὸν α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. καὶ ὁ α ἄρα τὸν β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ α μονάδας, ὁ α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε. τετράγωνος ἄρα ἐστὶν, ὁ β. καὶ ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ β τετράγωνός ἐστι, καὶ ὁ δ ἄρα τετράγωνός ἐστι, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες, τετράγωνοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ γ, κύβος ἐστὶ, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν γ. ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ β τὸν γ, ἡ δὲ μονὰς, τὸν α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ α μονάδας. ὁ α ἄρα τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε, τὸν δὲ β πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκε. κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ γ, καὶ ἐπεὶ οἱ γ δ ε ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ γ κύβος, καὶ ὁ ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ, καὶ τετράγωνος. ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ ζ, κύβος τέ ἐστι, καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες, κύβοι τέ εἰσι, καὶ τετράγωνοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

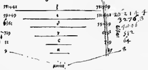


θ

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες, τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ α β γ δ ε ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα, ὁ α τετράγωνος ἔστω. λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες, τετράγωνοι ἔσονται, ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ β, τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται. λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ α τετράγωνος, καὶ ὁ γ ἄρα τετράγωνός ἐστι. πάλιν. ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ β τετράγωνος, καὶ ὁ δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν, ἀλλὰ δὴ, ἔστω ὁ α κύβος. λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ

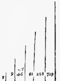
πάντες κύβοι εἰσίν, ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ γ κύβος ἐστί, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται, λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν α μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν β. ἡ δὲ μονὰς τὸν α μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ α ἄρα τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ὁ α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ α κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, ποιῇ τινά, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί, καὶ ὁ β ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ α β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ α κύβος, καὶ ὁ δ ἄρα κύβος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ ε κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ι

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοί, οἱ α β γ δ ε ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα, ὁ α, μὴ ἔστω τετράγωνος. λέγω ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, πλὴν τοῦ τρίτου τοῦ ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ γ τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ β τετράγωνος, οἱ β γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ α πρὸς τὸν β, οἱ α β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὥστε οἱ α β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι, καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ β. τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ α ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ γ τετράγωνος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων, ἀλλὰ δὴ, μὴ ἔστω ὁ α κύβος. λέγω δὴ, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ὁ δ κύβος, ἔστι δὲ καὶ ὁ γ κύβος. τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καί ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ β ἄρα, πρὸς τὸν γ, λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον, οἱ β γ ἄρα ὅμοιοι στερεοί. καί ἐστιν ὁ γ κύβος, καὶ ὁ β ἄρα κύβος ἐστί, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς, πρὸς τὸν α, ὁ α πρὸς τὸν β, ἡ δὲ μονὰς τὸν α μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ α ἄρα τὸν β μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, κύβον τὸν β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται, κύβος ἄρα καὶ ὁ α ὅπερ οὐχ ὑπόκειται, οὐκ ἄρα ὁ δ, κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστί, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

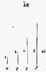


ια

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων, τὸν μείζονα μετρεῖ, κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς α̅ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ β̅ γ̅ δ̅ ε̅. λέγω ὅτι τῶν β̅ γ̅ δ̅ ε̅ ὁ ἐλάσσων ὁ β̅ τὸν ε̅ μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν γ̅ δ̅. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α̅ μονὰς πρὸς τὸν β̅, οὕτως ὁ δ̅ πρὸς τὸν ε̅, ἰσάκις ἄρα ἡ α̅ μονὰς τὸν β̅ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ δ̅ τὸν ε̅. ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ α̅ μονὰς τὸν δ̅ μετρεῖ, καὶ ὁ β̅ τὸν ε̅. ἡ δὲ α̅ μονὰς τὸν δ̅ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ δ̅ μονάδας, καὶ ὁ β̅ ἄρα τὸν ε̅ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ β̅ τὸν μείζονα τὸν ε̅ μετρεῖ, κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιβ

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται. Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α̅ β̅ γ̅ δ̅. λέγω ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ δ̅ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ α̅ μετρηθήσεται. μετρείσθω γὰρ ὁ δ̅ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ ε̅. λέγω ὅτι ὁ ε̅ καὶ τὸν α̅ μετρεῖ. μὴ γὰρ μετρείτω ὁ ε̅ τὸν α̅, καὶ ἐστὶν ὁ ε̅ πρῶτος. ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν, οἱ ε̅ α̅ ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ἐπεὶ ὁ ε̅ τὸν δ̅ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν ζ̅, ὁ ε̅ ἄρα τὸν ζ̅ πολλαπλασιάσας, τὸν δ̅ πεποίηκε. πάλιν ἐπεὶ ὁ α̅ τὸν δ̅ μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ γ̅ μονάδας, ὁ α̅ ἄρα τὸν γ̅ πολλαπλασιάσας, τὸν δ̅ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ε̅ τὸν ζ̅ πολλαπλασιάσας, τὸν δ̅ πεποίηκεν, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α̅ γ̅, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν ε̅ ζ̅. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α̅, πρὸς τὸν ε̅, ὁ ζ̅ πρὸς τὸν γ̅. οἱ δὲ α̅ ε̅, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅτε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ ε̅, τὸν γ̅. μετρείτω αὐτὸν, κατὰ τὸν η̅, ὁ ε̅ ἄρα τὸν η̅ πολλαπλασιάσας, τὸν γ̅ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ α̅ τὸν β̅ πολλαπλασιάσας, τὸν γ̅ πεποίηκεν, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α̅ β̅, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν ε̅ η̅. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α̅, πρὸς τὸν ε̅, ὁ η̅ πρὸς τὸν β̅, οἱ δὲ α̅ ε̅ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, αὐτοῖς ἰσάκις, ὅτε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ ε̅, τὸν β̅, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν θ̅. ὁ ε̅ ἄρα τὸν θ̅ πολλαπλασιάσας, τὸν β̅ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α̅ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β̅ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν θ̅ ε̅, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ α̅. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε̅ πρὸς τὸν α̅, ὁ α̅ πρὸς τὸν θ̅, οἱ δὲ α̅ ε̅, πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅτε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ε̅, τὸν α̅. ἀλλὰ μὴν, καὶ οὐ μετρεῖ. ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα οἱ α̅ ε̅, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. σύνθετοι ἄρα, οἱ δὲ σύνθετοι, ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τινὸς μετροῦνται, οἱ α̅ ε̅ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται, καὶ ἐπεὶ ὁ ε̅ πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ᾽ ἑαυτοῦ, ὁ ε̅ ἄρα τοὺς α̅ ε̅ μετρεῖ. ὥστε καὶ ὁ ε̅, τὸν α̅ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ, καὶ τὸν δ̅, ὁ ε̅ ἄρα, τοὺς α̅ δ̅ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ δ̅ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ α̅ μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



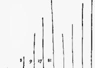
ιγ

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ, ὁ μέγιστος ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, οἱ α̅ β̅ γ̅ δ̅, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ α̅, πρῶτος ἔστω. λέγω ὅτι ὁ μέγιστος

 αὐτῶν ὁ δ̅

αὐτῶν ὁ δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν α β γ. εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ ε, καὶ ὁ ε, μηδενὶ τῶν α β γ ἔστω ὁ αὐτός. φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ ε πρῶτος ἐστὶ καὶ μετρεῖ τὸν δ, καὶ τὸν α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὁ ε πρῶτός ἐστι. σύνθετος ἄρα. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρώτου, πλὴν τοῦ α. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ ε, ὁ δὲ ε τὸν δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν δ μετρήσει. ὥστε καὶ τὸν α μετρήσει, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ α ἄρα τὸν ε μετρεῖ, καὶ ἐπεὶ ὁ ε τὸν δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν, κατὰ τὸν ζ. λέγω ὅτι ὁ ζ οὐδενὶ τῶν α β γ, ἔστιν ὁ αὐτός, εἰ γὰρ ὁ ζ ἑνὶ τῶν α β γ ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, καὶ εἷς ἄρα τῶν α β γ, μετρεῖ τὸν δ κατὰ τὸν ε. ἀλλὰ εἷς τῶν α β γ, τὸν δ μετρεῖ κατά τινα τῶν α β γ, καὶ ὁ ε ἄρα ἑνὶ τῶν α β γ, ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ ζ ἑνὶ τῶν α β γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι μετρεῖται ὁ ζ ὑπὸ τοῦ α, δεικνύντες πάλιν, ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ ζ πρῶτος, εἰ γὰρ ἔστι πρῶτος καὶ μετρεῖ τὸν δ, καὶ τὸν α μετρήσει, πρῶτον ὄντα μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ ζ, σύνθετος ἄρα. ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ α. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν ζ μετρεῖ, ὁ δὲ ζ τὸν δ μετρεῖ, κἀκεῖνος ἄρα τὸν δ μετρήσει, ὥστε καὶ τὸν α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὁ α ἄρα τὸν ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ε τὸν δ μετρεῖ κατὰ τὸν ζ, ὁ ε ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α γ ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν ε ζ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν γ. ὁ δὲ α, τὸν ε μετρεῖ, καὶ ὁ ζ ἄρα τὸν γ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ η, οὐδενὶ τῶν α β ἔστιν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ τὸν γ μετρεῖ κατὰ τὸν η, ὁ ζ ἄρα τὸν η πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκεν, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α β ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν ζ η. ἀνάλογον ἄρα, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ζ, ὁ η πρὸς τὸν β. μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ η τὸν β. μετρείτω αὐτὸν, κατὰ τὸν θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ θ τῷ α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ η τὸν β μετρεῖ κατὰ τὸν θ, ὁ η ἄρα τὸν θ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν θ η, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τοῦ α τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν α, ὁ α πρὸς τὸν η, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν η. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ θ τὸν α, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ δ, ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν α β γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ

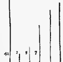


ιδ

ΕΑΝ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν β γ δ μετρείσθω. λέγω ὅτι ὁ α, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν β γ δ. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ ε, καὶ ὁ ε, μηδενὶ τῶν β γ δ, ἔστω ὁ αὐτός, καὶ ἐπεὶ ὁ ε τὸν α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν, κατὰ τὸν ζ, ὁ ε ἄρα τὸν ζ πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε. καὶ μετρεῖται ὁ α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν, τῶν β γ δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλα-

ιδ



σιάσαντες

συνθέντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρήσει τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει, οἱ β γ δ ἄρα, ἕνα τὸν ε ζ, μετρήσουσι, τὸν μὲν οὖν ε, οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ ε, πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν β γ δ ὁ αὐτός. τὸν ζ ἄρα μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ α. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὁ γὰρ α, ὑπόκειται ἐλάχιστος, ὑπὸ τῶν β γ δ μετρούμενος, οὐκ ἄρα τὸν α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, παρὲξ τῶν β γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε

EAN τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες, πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ α β γ. λέγω ὅτι δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν, πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν α β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ β γ, πρὸς τὸν α, καὶ ἔτι οἱ α γ, πρὸς τὸν β. εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ δύο οἱ δε εζ. φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν δε ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν α πεποίηκε, τὸν δὲ εζ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ εζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ δε εζ, ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ δζ ἄρα, πρὸς ἑκάτερον τῶν δε εζ, πρῶτός ἐστιν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτός ἐστιν, οἱ δζ δε ἄρα πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν εζ. καὶ ὁ ἐκ τῶν ζδ δε ἄρα πρὸς τὸν εζ, καὶ ὁ ἐκ τῶν ζδ δε ἄρα πρὸς τὸν εζ, πρῶτός ἐστιν, ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν, πρῶτός ἐστιν. ὥστε ὁ ἐκ τῶν ζδ δε, καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ, πρῶτός ἐστιν. ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν δζ δε, ὁ ἀπὸ τοῦ δε ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν δε εζ, ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ δε, μετὰ τοῦ ἐκ τῶν δε εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ, πρῶτός ἐστιν, καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ δε, ὁ α, ὁ δὲ ἐκ τῶν δε εζ, ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ εζ ὁ γ, οἱ α β ἄρα συντεθέντες, πρὸς τὸν γ, πρῶτοί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ β γ πρὸς τὸν α, πρῶτοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ α, γ πρὸς τὸν β, πρῶτοί εἰσιν, ἐπεὶ γὰρ ὁ δζ, πρὸς ἑκάτερον τῶν δε, εζ, πρῶτός ἐστιν, ὥστε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ δζ, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν δε, εζ, πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ δζ, ἴσοι εἰσίν, οἱ ἀπὸ τῶν δε, εζ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δε, εζ, καὶ οἱ ἀπὸ τῶν δε, εζ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν δε, εζ, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν δε εζ, πρῶτοί εἰσιν, διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν δε, εζ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ τῶν δε εζ, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν δε εζ, πρῶτοί εἰσιν, ἔτι διελόντι, οἱ ἀπὸ τῶν δε εζ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν δε εζ, πρῶτοί εἰσιν, καί ἐστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ δε, ὁ α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν δε εζ ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ εζ, ὁ γ, οἱ α γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν β, πρῶτοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ις

EAN δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β πρὸς ἄλλον τινά. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ β πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ α β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ α τὸν β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, ὁ α ἄρα, τοὺς α β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἄτοπόν ἐστιν, οὐκ ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν β ἐστιν, οὕτως ὁ β πρὸς τὸν γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιζ

ΕΑΝ ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά. Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α β γ δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν, οἱ α δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς ἄλλον τινά, εἰ γὰρ δυνατόν. ἔστω ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ὁ α πρὸς τὸν δ, ὁ β πρὸς τὸν ε. οἱ δὲ α δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ἰσάκις, ὅτε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα, ὁ α τὸν β. καί ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ὁ β πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ β ἄρα τὸν γ μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ α τὸν γ μετρεῖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, ὁ γ πρὸς τὸν δ. μετρεῖ δὲ ὁ β τὸν γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ γ τὸν δ. ἀλλ' ὁ α τὸν γ μετρεῖ. ὥστε καὶ ὁ α τὸν δ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ α ἄρα, τοὺς α δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ πρὸς ἄλλον τινά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

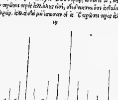
ιζ



ιη

ΔΥΟ ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοί, οἱ α β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς, τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν, οἱ δὴ α β, ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ α β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ ποιείτω, ὁ α δὴ τὸν γ, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ, μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν δ, ὁ α ἄρα τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν α δ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ β πρὸς τὸν δ, τοῖς α β ἄρα, τρίτος ἀριθμὸς προσηύρηται ὁ δ, ἀλλὰ δή, μὴ μετρείτω ὁ α τὸν γ. λέγω ὅτι τοῖς α β, ἀδύνατόν ἐστιν τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσηυρήσθω ὁ δ, ὁ ἄρα ἐκ τῶν α δ, ἴσος ἐστί, τῷ ἐκ τοῦ β, ὁ δὲ ἐκ τοῦ β ἐστὶν ὁ γ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν α δ ἴσος ἐστί, τῷ γ. ὥστε ὁ α, τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν. ὁ α ἄρα τὸν γ μετρεῖ κατὰ τὸν δ. ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς α β, τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ α τὸν γ μὴ μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη



ιθ

ΤΡιῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοί, οἱ α β γ καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς, τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν, οἱ δὴ α β γ, ἤτοι ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ α γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ.

*ἀνάλογον μὴ ἑξῆς εἰσί, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσί. ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. *εἰ μὲν οὖν οἱ α β γ, ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ α γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς, τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. *ἔστωσαν οὖν ἀνάλογον μὴ ἑξῆς εἰσί, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι, λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστὶν ἀδύνατον, εἰ γὰρ μὴ, προσευρήσθω, καὶ ἔστω δ. ὡς οὖν ὁ α πρὸς τὸν β, γ πρὸς τὸν δ, ὡς δὲ ὁ β πρὸς τὸν γ, δ πρὸς ε, ἐξ ἴσου ἄρα ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν ε.



ἀλλὰ μὴν οἱ α γ πρῶτοι εἰσί, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ α, τὸν γ ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ α ἄρα τοὺς α γ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον. τοῖς α β γ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον. πάλιν, οἱ α β γ ἀνάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μὲν, οἱ δὲ α γ ἄκροι μὴ πρῶτοι. λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστι. *ὁ β γὰρ τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν δ ποιείτω. ὁ δὲ α τὸν δ, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν ε, ὁ α ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ β τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν α ε, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν β γ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ πρὸς τὸν ε. τοῖς α β γ ἄρα, τέταρτος προσεύρηται ἀνάλογον, ὁ ε. ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ α τὸν δ. λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς α β γ, τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσευρήσθω ὁ ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν α ε, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν β γ. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν β γ, ἐστὶν ὁ δ, καὶ ὁ ἐκ τῶν α ε ἄρα ἴσος ἐστὶ, τῷ δ. ὁ α ἄρα τὸν ε πολλαπλασιάσας, τὸν δ πεποίηκεν, ὁ α ἄρα τὸν δ μετρεῖ, κατὰ τὸν ε, ὥστε μετρεῖ ὁ α, τὸν δ. ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς α β γ τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμὸν προσευρεῖν, ὅταν ὁ α, τὸν δ μὴ μετρῇ. *ἀλλὰ μὴ ἔστ' ἀνάλογον ἑξῆς οἱ α β γ οὔτε πρῶτοι οἱ α γ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ β τὸν γ πολλαπλασιάσας τὸν δ ποιείτω, ὁμοίως δείξομεν ἐὰν ὁ α τὸν δ μετρῇ, ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quia Zampertus Græcũ sine dubio exemplar secutus, exacta diuisione mẽbrorũ hic utitur, & singula membra demonstrationibus exequitur, uoluimus eam lectionẽ inserere, est enim pernecessaria, licet neutrũ nostrũ exemplar tale quicquã haberet.



κ

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσί, παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ α β γ. λέγω ὅτι τῶν α β γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν α β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω, ὁ δε, προσκείσθω τῷ δε μονάς, ἡ δζ, ὁ δὴ εζ, ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος, εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ α β γ εζ, πλείους τῶν α β γ. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ εζ, πρῶτος. ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου, τοῦ η. λέγω ὅτι ὁ η, οὐδενὶ τῶν α β γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ η ἑνὶ τῶν α β γ ἐστὶν ὁ αὐτός, οἱ δὲ α β γ, τὸν δε μετροῦσι, καὶ ὁ η ἄρα, τὸν δε μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν εζ, καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν δζ, μονάδα μετρήσει ὁ η, ἀριθμὸς ὤν. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ η ἑνὶ τῶν α β γ ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους, τῶν α β γ, οἱ α β γ η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

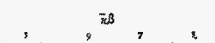


κα



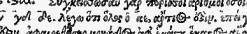
Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι. Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ αβ, βγ, γδ, δε. λέγω ὅτι ὅλος ὁ αε, ἄρτιός ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν αβ βγ γδ δε ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ, ὥστε καὶ ὅλος ὁ αε, ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν, ὁ αε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ



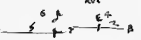
Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται. Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδήποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ αβ βγ γδ δε. λέγω ὅτι ὅλος ὁ αε, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν αβ βγ γδ, δε περισσός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου, ἕκαστος τῶν λοιπῶν, ἄρτιος ἔσται. ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν, ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, ἄρτιον, καὶ ὅλος ἄρα ὁ αε, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ



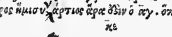
Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται. Συγκείσθωσαν γὰρ ἀριθμοὶ περισσοὶ ὁποσοιοῦν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ αβ βγ γδ. λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ αδ, περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ γδ μονὰς ἡ δε. λοιπὸς ἄρα ὁ γε, ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ αγ, ἄρτιος, καὶ ὅλος ἄρα ὁ αε ἄρτιός ἐστι. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς, ἡ δε. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ αδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κδ



Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς, ἄρτιος ἔσται. Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ αβ ἄρτιος ἀφῃρήσθω, ὁ βγ. λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ γα, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ βγ, ἔχει μέρος ἥμισυ, ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ αγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

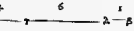
κε



Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

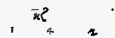
Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ αβ, περισσὸς ἀφῃρήσθω, ὁ βγ. λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ γα, περισσός ἐστιν. ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ βγ μονὰς, ἡ γδ, ὁ δβ ἄρα, ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ αβ, ἄρτιος, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ αδ, ἄρτιός ἐστι, καὶ ἔστι μονὰς ἡ γδ. ὁ γα ἄρα, περισσός ἐστι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ



Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ, περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ αβ, περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ βγ. λέγω ὅτι, ὁ λοιπὸς ὁ γα, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς, ἡ βδ. λοιπὸς ἄρα ὁ αδ, ἄρτιός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ γδ, ἄρτιός ἐστιν. ὥστε καὶ λοιπὸς, ὁ αγ, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ



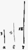
Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ, ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται. Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ βγ. λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ γα, περισσός ἐστιν. ἀφῃρήσθω γὰρ μονὰς ἡ αδ. ὁ δβ ἄρα, ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ βγ ἄρτιος, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ γδ, ἄρτιός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ δα. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ γα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν περισσὸς

κη

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας, ποιῇ τινά, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται. περιττὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, ἄρτιον τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ ποιείτω. λέγω δὴ ὁ γ, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ α μονάδες, καί ἐστιν ὁ β ἄρτιος, ὁ γ ἄρα, σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος, ἄρτιός ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη



κθ

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς, περιττὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινά, ὁ γενόμενος περιττὸς ἔσται. περιττὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, περιττὸν τὸν β πολλαπλασιάσας τὸν γ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ γ περιττός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ α τὸν β πολλαπλασιάσας, τὸν γ πεποίηκεν, ὁ γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ α μονάδες, καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν α β, περιττός, ὁ γ ἄρα σύγκειται ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περιττόν. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν ὧν τὸ πλῆθος περιττόν, περιττός ἐστιν. ὥστε ὁ γ, περιττός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

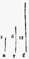
κθ



λ

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς, ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. περιττὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, ἄρτιον τὸν β μετρείτω, λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β μετρεῖ, μετρείτω αὐτόν, κατὰ τὸν γ. λέγω ὅτι ὁ γ, οὐκ ἐστὶ περιττός, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω, καὶ ἐπεὶ ὁ α τὸν β μετρεῖ κατὰ τὸν γ, ὁ α ἄρα τὸν γ πολλαπλασιάσας, τὸν β πεποίηκεν. ὁ ἄρα β σύγκειται ἐκ περιττῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περιττόν ἐστι, ὁ β ἄρα περιττός ἐστι, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος, οὐκ ἄρα ὁ γ περιττός ἐστιν, ἄρτιος ἄρα ὁ γ. ὥστε ὁ α τὸν β μετρεῖ, ἀρτιάκις. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ

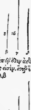


λα

Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς, πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ, πρῶτος ἔσται.

Περιττὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, πρός τινα ἀριθμὸν τὸν β, πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ β διπλάσιος ἔστω, ὁ γ. λέγω ὅτι ὁ α, καὶ πρὸς τὸν γ, πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ α γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω καὶ ἔστω ὁ δ, καί ἐστιν ὁ α περιττός, περιττὸς ἄρα καὶ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ περιττὸς ὢν, τὸν γ μετρεῖ, καί ἐστιν ὁ γ ἄρτιος, καὶ τὴν ἥμισυν, ἄρα τοῦ γ μετρήσει ὁ δ. τοῦ δὲ γ, ἥμισύς ἐστιν ὁ β, ὁ δ ἄρα τὸν β μετρεῖ, μετρεῖ δὲ, καὶ τὸν α. ὁ δ ἄρα, τοὺς α β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον, οὐκ ἄρα ὁ α πρὸς τὸν γ πρῶτος οὐκ ἔστιν. οἱ α γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα



Addit hic quædã Zambertus quæ non inueniũtur Euclidis.

λβ

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν, ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Ἀπὸ γὰρ δυάδος τοῦ α, δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοί, οἱ β γ δ. λέγω ὅτι οἱ β γ δ ἀρτιάκις ἄρτιοι εἰσὶ μόνον, ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν β γ, ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, φανερόν. ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω δή, ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονάς, ἡ ε. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ α, πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν α β γ δ, ὁ δ ὑπὸ

λβ



οὐδενὸς

οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πλὴν ἐξ τῶν α β γ, καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν α β γ, ἄρτιος. ὁ δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερος τῶν α β γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ

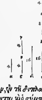
ΕΑν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν. λέγω ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον, ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν. ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὤν, μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔσται ὁ α, καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὤν. ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ὁ α ἄρα, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ

ΕΑν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω, μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν. λέγω ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅτι μὲν οὖν ὁ α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος φανερόν. τὸν γὰρ ἥμισυν, οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις ἐστὶ περισσός. ἐὰν γὰρ τὸν α τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν α, κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὐ καταντήσομεν εἴς τινα περισσὸν ἀριθμὸν ὃς μετρήσει τὸν α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ α, τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων. ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ α, καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ, καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, ὁ α ἄρα, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε

ΕΑν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου, ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ, πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ ἅπαντας. Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ α βγ δ εζ, ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ βγ, καὶ τοῦ εζ τῷ α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ηγ ζθ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ βη πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ εθ, πρὸς τοὺς α βγ δ. κείσθω γὰρ τῷ μὲν βγ ἴσος, ὁ ζκ, τῷ δὲ δ, ἴσος ὁ ζλ, καὶ ἐπεὶ ὁ ζκ τῷ βγ ἴσος ἐστὶν, ὧν ὁ ζθ, τῷ ηγ ἴσος. λοιπὸς ἄρα ὁ θκ, λοιπῷ τῷ ηβ, ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ εζ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν γβ, καὶ ὁ βγ, πρὸς τὸν α, ἴσος δὲ ὁ μὲν δ, τῷ ζλ, ὁ δὲ βγ τῷ ζκ, ὁ δὲ α τῷ ζθ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εζ, πρὸς τὸν λζ, οὕτως ὁ λζ πρὸς τὸν ζκ, καὶ ὁ ζκ, πρὸς ζθ, διελόντι ὡς ὁ ελ πρὸς τὸν λζ, οὕτως ὁ λκ, πρὸς τὸν ζκ, καὶ ὁ κθ, πρὸς τὸν ζθ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι, πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κθ, πρὸς τὸν ζθ, οὕτως οἱ ελ λκ κθ, πρὸς τοὺς λζ κζ θζ, ἴσος δὲ ὁ μὲν κθ, τῷ βη, ὁ δὲ ζθ, τῷ α, οἱ δὲ λζ κζ θζ, τοῖς δ βγ α, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ βη πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ εθ πρὸς τὸν δ βγ α. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ, πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



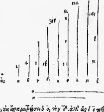
λς

ΕΑΝ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν, ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινά, ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ α β γ δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω, ὁ ε, καὶ ὁ ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζη ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ζη τέλειός ἐστιν. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ α β γ δ, τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ ε εἰλήφθωσαν, ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ ε θκ λ μ. δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ α πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε πρὸς τὸν μ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ε δ, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν α μ, καὶ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν ε δ, ὁ ζη, καὶ ὁ ἐκ τῶν α μ ἄρα ἐστὶν ὁ ζη, ὁ α ἄρα τὸν μ πολλαπλασιάσας, τὸν ζη πεποίηκεν, ὁ μ ἄρα τὸν ζη μετρεῖ, κατὰ τὰς ἐν τῷ α μονάδας, καὶ ἐστι δυὰς ὁ α, διπλάσιος ἄρα ἐστὶν, ὁ ζη, τοῦ μ, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ μ λ θκ ε, ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων οἱ ε θκ λ μ ζη, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογον εἰσὶν, ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ θκ, καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ζη, τῷ πρώτῳ τῷ ε, ἴσος ἑκάτερος τῶν θν ζξ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ, πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ, πρὸς τοὺς πρὸ αὐτοῦ πάντας. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ νκ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ξη, πρὸς τοὺς μ λ κθ ε, καὶ ἐστὶν ὁ νκ, ἴσος τῷ ε, καὶ ὁ ξη ἄρα ἴσος ἐστὶ, τοῖς μ λ κθ ε. ἔστι δὲ καὶ ὁ ζξ τῷ ε ἴσος. ὁ δὲ ε τοῖς α β γ δ καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ ζη, ἴσος ἐστὶ τοῖς τε ε κθ λ μ, καὶ τοῖς α β γ δ, καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. λέγω ὅτι ὁ ζη, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν α β γ δ ε θκ λ μ, καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τις τὸν ζη, ὁ ο, καὶ ὁ ο, μηδενὶ τῶν α β γ δ ε θκ λ μ, ἔστω ὁ αὐτὸς, καὶ ὁσάκις ὁ ο τὸν ηζ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ π. ὁ π ἄρα τὸν ο πολλαπλασιάσας, τὸν ζη πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ε τὸν δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζη πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν π, ὁ ο πρὸς τὸν δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α β γ δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ α πρῶτός ἐστιν, ὁ δ ἄρα, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲξ τῶν α β γ, καὶ ὑπόκειται ὁ ο οὐδενὶ τῶν α β γ, ὁ αὐτὸς, οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ ο, τὸν δ. ἀλλ' ὡς ὁ ο πρὸς τὸν δ, ὁ ε πρὸς τὸν π. οὐδὲ ὁ ε ἄρα τὸν π μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὁ ε πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν, οἱ ε π ἄρα, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι, καὶ ἐλάχιστοι. οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ἰσάκις. ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ε πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ. ἰσάκις ἄρα ὁ ε τὸν ο μετρεῖ, καὶ ὁ π τὸν δ, ὁ δὲ δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, παρὲξ τῶν α β γ, ὁ π ἄρα, ἑνὶ τῶν α β γ, ἐστὶν ὁ αὐτὸς. ἔστω τῷ β ὁ αὐτὸς. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ β γ δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ ε, οἱ ε θκ λ, καὶ εἰσὶν οἱ ε θκ λ, τοῖς β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν λ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν β λ ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν δ ε. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν δ ε ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν π ο, καὶ ὁ ἐκ τῶν π ο, ἄρα ἴσος ἐστὶ, τῷ ἐκ τῶν β λ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ π πρὸς τὸν β ὁ λ πρὸς τὸν ο. καὶ ἔστιν ὁ π, τῷ β, ὁ αὐτὸς, καὶ ὁ λ ἄρα τῷ ο ἐστὶν ὁ αὐτὸς. ὅπερ ἀδύνατον. ὁ γὰρ ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτὸς. οὐκ ἄρα τὸν ζη, μετρεῖ τις ἀριθμὸς, παρὲξ τῶν α β γ δ ε θκ λ μ, καὶ τῆς μονάδος, καὶ ἐδείχθη ὁ ζη, τοῖς α β γ δ ε θκ λ μ, καὶ τῇ μονάδι, ἴσος, τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν, τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ

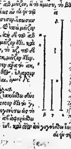


ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ
ΔΕΚΑΤΟΝ.

Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα, τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται. Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις, μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυνται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε, καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν, μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ, δυνάμει μόνον.

Καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει, εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα, ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτά, ἄλογοι. εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί. εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ ΑΒ Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ, λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ, ἀφαιρεθῇ μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔστιν ἔλασσον, τοῦ Γ μεγέθους. Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον, ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους, μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ, μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ, εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα, τὰ ΔΖ ΖΗ ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω. ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις, ἰσοπληθεῖς γένωνται, ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν. ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ ΚΘ ΘΒ, διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι, ταῖς ΔΖ ΖΗ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ, τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ἡμίσεος, τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ, λοιποῦ τοῦ ΘΑ, μεῖζόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ, τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ, λοιποῦ τοῦ ΑΚ, μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ, τῷ Γ. καὶ τὸ Γ ἄρα, τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ, τοῦ Γ. καταλέλειπται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους, τὸ ΑΚ μέγεθος, ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεα ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.



~~Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεα ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.~~ ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ ΑΒ Γ. ἔστω δὲ τὸ Γ, ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον, ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους, μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ. καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, τὰ ΜΘ ΘΗ ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ ΕΒ. καὶ ἀπὸ τοῦ ΕΑ, μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, τὸ ΕΔ. καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν ἐν τῷ

αἱ ἐν τῷ ζμ διαιρέσεις, ἴσαι γίνωνται, ταῖς ἐν τῷ αβ διαιρέσεσι, γεγονέτωσαν ὡς αἱ βε εδ δα, καὶ τῷ δα ἕκαστον τῶν κλ λν νξ ἔστω ἴσον. καὶ τοῦτο γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τοῦ κξ, ἴσαι γίνωνται, ταῖς τοῦ ζμ, καὶ ἐπεὶ τὸ βε μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ αβ, τὸ βε, μεῖζον ἐστὶ τοῦ εα, πολλῷ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ δα. ἀλλὰ τῷ δα, ἴσον ἐστὶ, τὸ ξν, τὸ βε ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ νξ. πάλιν. ἐπεὶ τὸ εδ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ ἐστὶ τοῦ εα, μεῖζον ἐστὶ τοῦ δα. ἀλλὰ τὸ δα, ἴσον ἐστὶ τῷ νλ, τὸ δε ἄρα, μεῖζον ἐστὶ τοῦ νλ, ὅλον ἄρα τὸ δβ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ξκ. ἀλλὰ τοῦ βα, μεῖζον ἐστὶ τὸ μζ. πολλῷ ἄρα τὸ μζ μεῖζον ἐστὶ, τοῦ ξκ. καὶ ἐπεὶ τὰ ξν νλ λκ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ τὰ μθ θη ηζ, ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ μζ, τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ξκ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κλ, πρὸς τὸ ζη, οὕτως τὸ ξκ πρὸς τὸ ζμ. μεῖζον δὲ τὸ ζμ, τοῦ κξ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ηζ, τοῦ λκ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ζη, ἴσον τῷ γ, τὸ δὲ κλ, τῷ αδ, τὸ γ ἄρα μεῖζον ἐστὶ τοῦ αδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἀνίσων τῶν αβ γδ, καὶ ὄντος ἐλάσσονος τοῦ αβ, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. λέγω ὅτι ἀσύμμετρα ἐστὶ, τὰ αβ γδ μεγέθη. εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ ε, καὶ τὸ μὲν αβ, τὸ δζ καταμετροῦν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον, τὸ γζ, τὸ δὲ γζ, τὸ βη καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον, τὸ αη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ ε, γεγονέτω καὶ λελείφθω τὸ αη, ἔλασσον τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ε τὸ αβ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ αβ τὸ δζ μετρεῖ, καὶ τὸ ε ἄρα τὸ δζ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ γδ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ γζ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ γζ, τὸ βη μετρεῖ, καὶ τὸ ε ἄρα, τὸ βη μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ αβ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ αη μετρήσει, τὸ μεῖζον, τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ αβ γδ μεγέθη, μετρήσει τι μέγεθος, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ, τὰ αβ γδ μεγέθη, ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων. &c. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

γ

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ αβ γδ, ὧν ἔλασσον, τὸ αβ, δεῖ δὴ τῶν αβ γδ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, τὸ αβ γδ ἤτοι μετρεῖ τὸ γδ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν τὸ αβ, τὸ γδ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ αβ ἄρα, κοινὸν μέτρον ἐστὶ, τῶν αβ γδ. καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ αβ μεγέθους, τὸ αβ οὐ μετρήσει, μὴ μετρείτω δὴ τὸ αβ, τὸ γδ. ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάττονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον, μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα, τὰ αβ γδ, καὶ τὸ μὲν αβ τὸ γδ, καταμετροῦν, λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ εγ, τὸ δὲ εγ, τὸ ζβ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον, τὸ αζ, τὸ δὲ αζ, τὸ γε μετρείτω. ἐπεὶ οὖν τὸ αζ τὸ γε μετρεῖ ἀλλὰ τὸ γε, τὸ ζβ μετρεῖ. καὶ τὸ αζ ἄρα τὸ ζβ μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, καὶ ὅλον ἄρα τὸ αβ μετρήσει τὸ αζ. ἀλλὰ τὸ αβ, τὸ δε μετρεῖ. καὶ τὸ αζ ἄρα τὸ εδ μετρήσει. μετρεῖ δὲ, καὶ τὸ γε, καὶ ὅλον ἄρα τὸ γδ, μετρεῖ. τὸ αζ ἄρα τὰ αβ γδ μετρεῖ. τὸ αζ ἄρα, τῶν αβ γδ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μὴ, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ αζ, ὃ μετρήσει, τὰ αβ γδ. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ η. ἐπεὶ οὖν τὸ η τὸ αβ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ αβ τὸ εδ μετρεῖ, καὶ τὸ η ἄρα τὸ εδ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ γδ. λοιπὸν ἄρα τὸ γε, μετρήσει τὸ η, ἀλλὰ τὸ γε, τὸ ζβ μετρεῖ, καὶ τὸ η ἄρα, τὸ ζβ μετρήσει, μετρεῖ δὲ, καὶ ὅλον τὸ αβ

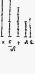
πὸν ἄρα, τὸ αζ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ αζ, τὰ αβ γδ μεγέθη μετρήσει. τὸ αζ ἄρα, τῶν αβ γδ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί. δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν αβ γδ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται, τὸ αζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

δ

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ α β γ, δεῖ δὴ τῶν α β γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. εἰλήφθω γὰρ τῶν α β, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ δ. τὸ δὴ δ, τὸ γ, ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ δ τὸ γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ α β, τὸ δ ἄρα τὰ α β γ μετρεῖ. τὸ δ ἄρα, τῶν α β γ, κοινὸν μέτρον ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ δ μεγέθους, τὰ α β γ οὐ μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τὰ α β γ μεῖζον τοῦ δ μέγεθος, τὸ ε. καὶ ἐπεὶ τὰ α β γ μετρεῖ, καὶ τὰ α β μετρήσει. καὶ τὸ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ δ, τὸ μεῖζον, τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἀδύνατον. μὴ μετρείτω δὴ τὸ δ, τὸ γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ γ δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ α β γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδή, καὶ τὰ α β, μετρήσει. ὥστε καὶ τὸ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον, τὸ δ μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ τὸ γ. ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει, τὰ γ δ. σύμμετρα ἄρα ἐστί, τὰ γ δ. εἰλήφθω αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. καὶ ἔστω τὸ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ ε τὸ δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ δ, τὰ α β μετρεῖ, καὶ τὸ ε ἄρα, τὰ α β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ γ, τὸ ε ἄρα τῶν α β γ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ ε μεῖζον μέγεθος, τὸ ζ, καὶ μετρείτω τὰ α β γ. καὶ ἐπεὶ τὸ ζ τὰ α β γ μετρεῖ, καὶ τὰ α β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν α β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει, τὸ δὲ τῶν α β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ δ, τὸ ζ ἄρα, τὸ δ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸ γ. τὸ ζ ἄρα, τὰ γ δ, μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν γ δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ ζ, τὸ δὲ τῶν γ δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί, τὸ ε, τὸ ζ ἄρα, τὸ ε μετρεῖ. τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ ε μεγέθους μέγεθος, τὰ α β γ δ μεγέθη μετρεῖ, τὸ ε ἄρα, τῶν α β γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν. ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ δ, τὸ γ. ἐὰν δὲ μετρῇ αὐτὸ τὸ δ. τριῶν ἄρα μεγεθῶν δοθέντων συμμέτρων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

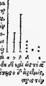




πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μετρήσει μέτρον. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλειόνων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἔστω σύμμετρα μεγέθη, τὰ α β, λέγω ὅτι τὸ α πρὸς τὸ β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ α β μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ γ, καὶ ὁσάκις τὸ γ τὸ α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ δ, ὁσάκις δὲ τὸ γ, τὸ β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ γ τὸ α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν δ μετρεῖ, καὶ τὸ γ μέγεθος, τὸ α. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸ α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν δ. ἀνάπαλιν ἄρα. ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ τὸ γ τὸ β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν ε, κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν ε μετρεῖ, καὶ τὸ γ, τὸ β. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ πρὸς τὸ β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν ε, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὴν μονάδα. δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ α πρὸς τὸ β, οὕτως ὁ δ ἀριθμός,



πρὸς τὸν

πρὸς τὸν ε. τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ α β πρὸς ἄλληλα, λόγον ἔχει ὃν ὁ δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΑΝ δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.



Δύο γὰρ μεγέθη πρὸς ἄλληλα τὰ α β, λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ε. λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ α β μεγέθη. ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ α. καὶ ἑνὶ αὐτῶν, ἴσον ἔστω τὸ γ. ὅσαι δὲ εἰσὶν ἐν τῷ ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ γ συγκείσθω τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ δ μονάδες, τοσαῦτα εἰσὶ καὶ ἐν τῷ α μεγέθη ἴσα τῷ γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ δ ταὐτὸ μέρος ἐστὶ, καὶ τὸ γ, τοῦ α. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ πρὸς τὸ α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς, τὸν δ ἀριθμὸν, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ γ, τὸ α. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ γ πρὸς τὸ α, οὕτως ἡ μονὰς, πρὸς τὸν δ ἀριθμὸν, ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ δ ἀριθμὸς, πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν. ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ ε μονάδες, τοσαῦτα εἰσὶ καὶ ἐν τῷ ζ μεγέθη ἴσα τῷ γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ οὕτως ἡ μονὰς, πρὸς τὸν ε ἀριθμόν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὴν μονάδα, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς τὸ α πρὸς τὸ ζ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε. ἀλλ' ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως τὸ α πρὸς τὸ β, καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως καὶ τὸ α, πρὸς τὸ ζ. τὸ α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν β ζ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ β, τῷ ζ. μετρεῖ δὲ τὸ γ, τὸ ζ. μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ α, τὸ γ ἄρα, τὰ α β μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ α, τῷ β. ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



πόρισμα.

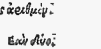
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ δ ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν δ ἀριθμὸν, πρὸς τὸν ε ἀριθμὸν. οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν α ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ β. ἔσται ὡς ἡ α πρὸς τὴν ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β. τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ α πρὸς τὴν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ δ ἀριθμὸς, πρὸς τὸν ε ἀριθμόν. γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ε ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α εὐθείας, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β εὐθείας.



ἄλλως.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ α β, πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ γ, πρὸς ἀριθμὸν τὸν δ. λέγω ὅτι, σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη, ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ α. καὶ ἑνὶ αὐτῶν, ἴσον ἔστω τὸ ε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ε, πρὸς τὸ α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, τὸ α πρὸς τὸ β. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν δ, τὸ ε, πρὸς τὸ β, μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς, τὸν δ. μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ ε, τὸ β, μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ε, τὸ α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν γ. τὸ ε ἄρα ἑκάτερον τῶν α β μετρεῖ. τὰ α β ἄρα σύμμετρά ἐστι. καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ ε.

ΤΑ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα, λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ α β. λέγω ὅτι τὸ α πρὸς τὸ β, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει τὸ α πρὸς τὸ β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ α τῷ β. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς, πρὸς ἀριθμόν. τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



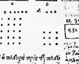
η

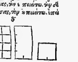
ΕΑΝ δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. δύο γὰρ μεγέθη τὰ α β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ α β μεγέθη. εἰ γὰρ σύμμετρά ἐστι, τὸ α τῷ β λόγον ἕξει ὃν περ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ α β μεγέθη. ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ

ΤΑ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα, πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν αἱ α β μήκει σύμμετροι, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, λόγον ἔχει ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β μήκει, ἡ α ἄρα πρὸς τὴν β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ γ πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν δ ἀριθμόν, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς α πρὸς τὴν β λόγου, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς α τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον (τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.) τοῦ δὲ τοῦ γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν δ ἀριθμὸν λόγου, διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ γ τετραγώνου, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δ τετράγωνον. δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ γ ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμόν. ἄλλως.



Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ α, τῇ β μήκει, λόγον ἔχει, ὃν ~~τετράγωνος~~ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν ε ποιείτω, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας τὸν ζ ποιείτω, ὁ δὲ δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν η ποιείτω. 

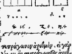
ἐπεὶ οὖν ὁ γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκεν, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας τὸν ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, τουτέστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ πρὸς τὸν δ, τουτέστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, ἀλλ᾽ ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β, οὕτως ἦν ὁ ε πρὸς τὸν ζ. δι᾽ ἴσου ἄρα. ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως ἦν ὁ ε πρὸς τὸν η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν ε, η τετράγωνος.

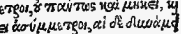
ὁ μὲν γὰρ

ὁ μὲν γὰρ ε, ἀπὸ τοῦ γ ἐστὶν, ὁ δὲ η, ἀπὸ τοῦ δ. τὸ ἀπὸ τῆς α ἄρα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ γ τετράγωνος, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δ τετράγωνον, λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν, ἡ α, τῇ β μήκει. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δ τετράγωνον, ἀλλ᾽ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον λόγος διπλασίων, τοῦ τῆς α, πρὸς τὴν β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δ ἀριθμοῦ, τετράγωνον ἀριθμὸν, λόγος, διπλασίων ἐστὶ, τοῦ τοῦ γ ἀριθμοῦ, πρὸς τὸν δ ἀριθμὸν λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν δ ἀριθμόν. ἡ α ἄρα πρὸς τὴν β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ γ, πρὸς ἀριθμὸν τὸν δ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν, ἡ α, τῇ β μήκει.

ἄλλως.

Ἀλλὰ δὴ, ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, ὁ ε, πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν η, λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν, ἡ α τῇ β μήκει. ἔστω γὰρ τοῦ μὲν ε πλευρὰ, ὁ γ, τοῦ δὲ η, ὁ δ, καὶ ὁ γ τὸν δ πολλαπλασιάσας τὸν ζ ποιείτω. οἱ ε ζ η ἄρα, ἑξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, ἐν τῷ τοῦ γ πρὸς τὸν δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν α β, μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ ὑπὸ τῶν α β. τῶν δὲ ε η ὁ ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν β, αἱ α β ἄρα, σύμμετροι εἰσὶ, λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ ε, πρὸς ἀριθμὸν τὸν ζ, τουτέστιν ὃν ὁ γ πρὸς τὸν δ. ὡς γὰρ ὁ γ πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ὁ γὰρ γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας, τὸν ε πεποίηκε, τὸν δὲ δ πολλαπλασιάσας, τὸν ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε πρὸς τὸν ζ. ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ α, τῇ β μήκει, λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ α, τῇ β μήκει. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. πάλιν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β τετράγωνον, λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν, ἡ α τῇ β μήκει. εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ α, τῇ β μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐκ ἔχει δὲ, οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ α, τῇ β μήκει. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ ἑξῆς.





Πόρισμα.

ΚΑΙ φανερὸν ἔσται ἐκ τῶν δεδειγμένων, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι, πάντως καὶ δυνάμει. αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι, οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι, οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι. πάντως καὶ μήκει. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι, οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει. πάλιν. ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ᾽ ἁπλῶς ὃν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν τὰ τετρά-

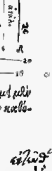
γωνα. τουτέστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ᾽ ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει. ὥστε αἱ μὲν μήκει σύμμετροι, πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει, οὐ πάντως καὶ μήκει. εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι, οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι, δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι, μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε, οὐχ αἱ μήκει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι, δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι. αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι. εἰ γὰρ εἰσὶ σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι, ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετροι. ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει.

Λῆμμα.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους, λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν ὅμοιοι εἰσὶν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ τουτέστιν, οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

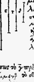
ι

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει. Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ α, δεῖ δὴ τῇ α, προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ, καὶ δυνάμει. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ, οἱ β γ, πρὸς ἀλλήλους, λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. τουτέστι, μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ β πρὸς τὸν γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ τετράγωνον. ἐμάθομεν γάρ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α, τῷ ἀπὸ τῆς δ. καὶ ἐπεὶ ὁ β πρὸς τὸν γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α, τῇ δ μήκει. εἰλήφθω τῶν α δ μέση ἀνάλογον ἡ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε. ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν, ἡ α, τῇ δ μήκει. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τετραγώνον, τῷ ἀπὸ τῆς ε τετραγώνῳ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α, τῇ ε δυνάμει. τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ᾽ ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον εἰ τῇ α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ δ. τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος. ἄλογος δὲ ἡ ε. ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ, τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.

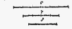


ια

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται. Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ α β γ δ, ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, τὸ α δὲ τῷ β σύμμετρον ἔστω. λέγω ὅτι καὶ τὸ γ, τῷ δ σύμμετρόν ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ α τῷ β, τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ γ τῷ δ. ἀλλὰ δὴ τὸ α τῷ β, ἀσύμμετρον ἔστω. λέγω ὅτι καὶ τὸ γ τῷ δ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ α τῷ β. τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔστιν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ γ πρὸς τὸ δ,



τὸ δ, ἔξει τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ γ πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ α πρὸς τὸ β λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ α, τῷ β. ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον, τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γ, τῷ δ. ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς.



ιβ

ιβ

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν α β, τῷ γ ἔστω σύμμετρον, λέγω ὅτι καὶ τὸ α τῷ β ἐστὶ σύμμετρον. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ α τῷ γ, τὸ α ἄρα πρὸς τὸ γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ δ, πρὸς τὸν ε. πάλιν ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ β τῷ γ, τὸ γ ἄρα πρὸς τὸ β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ δ πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η. εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ θ κ λ ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν δ πρὸς τὸν ε, οὕτως τὸν θ πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ τὸν ζ πρὸς τὸν η, οὕτως τὸν κ πρὸς τὸν λ, ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ πρὸς τὸν ε, ἀλλ' ὡς ὁ δ πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ, ἔστιν ἄρα, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ γ πρὸς τὸ β, οὕτως ὁ ζ πρὸς τὸν η, ἀλλ' ὡς ὁ ζ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν λ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γ πρὸς τὸ β, οὕτως ὁ κ πρὸς τὸν λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ α πρὸς τὸ γ, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν κ, δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν λ. τὸ α ἄρα πρὸς τὸ β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ θ, πρὸς ἀριθμὸν τὸν λ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ α, τῷ β. τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

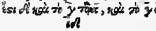




ιγ

ιγ

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν, σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.



In altero exemplari lemma est, itaque variat numerus deinceps

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη, τὰ α β ἄλλο δὲ τὸ γ. καὶ τὸ μὲν α, τῷ γ, σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ β τῷ γ ἀσύμμετρον. λέγω ὅτι καὶ τὸ α τῷ β, ἀσύμμετρόν ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστιν σύμμετρον τὸ α τῷ β, ἔστι δὲ καὶ τὸ γ τῷ α, καὶ τὸ γ ἄρα τῷ β σύμμετρόν ἐστιν. ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

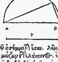
ιδ

ιδ



Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται. Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ α β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ α, ἑτέρῳ τινὶ τῷ γ ἀσύμμετρον ἔστω, λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ β, τῷ γ ἀσύμμετρόν ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρον τὸ β τῷ γ, ἀλλὰ καὶ τὸ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ α ἄρα τῷ γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ β τῷ γ. ἀσύμμετρον ἄρα. ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα τὸ δ' ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν, τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

λῆμμα.



λῆμμα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ αβ γ, ὧν μείζων ἔστω, ἡ αβ, δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται

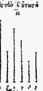
ζον δύναται ἡ αβ τῆς γ. γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον, τὸ αδβ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ γ ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὀρθή, ἡ ὑπὸ α δ β γωνία. καὶ ὅτι ἡ αβ τῆς αδ, τουτέστι τῆς γ, μεῖζον δύναται τῇ δβ.

Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως. ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι, αἱ αδ δβ, καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. ἐκκείσθωσαν γὰρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν, τὴν ὑπὸ α δ β. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ. φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς αδ δβ δυναμένη ἐστὶν, ἡ αβ.

ιε

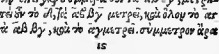
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἔστωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β γ δ, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ, καὶ ἡ α μὲν τῆς β μεῖζον δυνάσθω, τῷ ἀπὸ τῆς ε, ἡ δὲ γ τῆς δ μεῖζον δυνάσθω, τῷ ἀπὸ τῆς ζ. λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ γ τῇ ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ γ τῇ ζ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α, ἴσα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν ε β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς γ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δ ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ε β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν δ ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ. διελόντι ἄρα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ε πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ ζ πρὸς τὴν δ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ β, πρὸς τὴν ε, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν ε, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν ζ. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ γ τῇ ζ, εἴτε ἀσύμμετρος ἡ α τῇ ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ γ τῇ ζ. ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.



ις

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται, κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται. Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ αβ βγ, λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ αγ ἑκατέρῳ τῶν αβ βγ σύμμετρόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ αβ βγ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ δ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ, τὰ αβ βγ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ αγ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ αβ βγ. τὸ δ ἄρα, τὰ αβ βγ, καὶ τὸ αγ μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ, ἑκατέρῳ τῶν αβ βγ. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ, ἑνὶ τῶν αβ βγ ἔστω σύμμετρον. ἔστω δὴ τῷ αβ, λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ αβ βγ, σύμμετρά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ αγ αβ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω καὶ ἔστω τὸ δ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ, τὰ αβ αγ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ βγ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ αβ, τὸ δ ἄρα, τὰ αβ βγ μετρήσει. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ αβ βγ. ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται καὶ τὰ ἑξῆς.

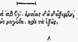


ιζ

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ αβ βγ, λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ αγ ἑκατέρῳ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρόν ἐστιν. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ γα αβ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, τὸ δ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ, τὰ

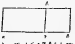
γα αβ

γα, αβ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ βγ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ βα. τὸ δ ἄρα, τὰ αβ βγ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ αβ βγ, ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἀδύνατον ἐστίν. οὐκ ἄρα τὰ γα αβ, μετρήσει τι μέγεθος. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ γα αβ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὰ αγ γβ, ἀσύμμετρά ἐστι. τὸ αγ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ δὴ τὸ αγ, ἑνὶ τῶν αβ, βγ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρῶτον τῷ αβ, λέγω ὅτι καὶ τὰ αβ, βγ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ δ. ἐπεὶ οὖν τὸ δ τὰ αβ βγ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ αγ μετρήσει, μετρεῖ δὲ καὶ τὸ αβ. τὸ δ ἄρα, τὰ γα αβ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ, τὰ γα αβ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα τὰ αβ βγ μετρήσει τι μέγεθος. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ αβ βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ αγ, καὶ λοιπῷ τῷ βγ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη. καὶ τὰ ἑξῆς.



λῆμμα

ΕΑΝ παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γινομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.



Παρὰ γάρ τινα εὐθεῖαν τὴν αβ, παραβεβλήσθω τὸ αδ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ δβ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ, τὸ αδ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ. καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ τετράγωνον ἐστὶ τὸ δβ, ἴση ἐστὶν, ἡ δγ, τῇ βγ. καί ἐστιν τὸ αδ, τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον. καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη

ΕΑΝ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος, μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον, παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ α βγ, ὧν μείζων, ἡ βγ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς α, ἴσον παρὰ τὴν βγ παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν βδ δγ. σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ βδ, τῇ δγ μήκει. λέγω ὅτι ἡ βγ τῆς α, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. τετμήσθω γὰρ ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον. καὶ κείσθω τῇ δε ἴση, ἡ εζ. λοιπὴ ἄρα ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ βζ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ βγ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ δ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βδ δγ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εδ τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εγ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν βδ δγ, μετὰ τοῦ τετράκις ἀπὸ τῆς εδ, ἴσον ἐστὶ, τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς εγ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετράκις ὑπὸ τῶν βδ δγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον. τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς δε, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς δζ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ δζ τῆς δε. τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς εγ, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ βγ, τῆς εγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν α, δζ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς α μεῖζόν ἐστι, τῷ ἀπὸ τῆς δζ. ἡ βγ ἄρα τῆς α, μεῖζον δύναται τῇ δζ.



Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ βγ τῇ δζ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ βδ τῇ δγ μήκει, σύμμετρος

κει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βγ, τῇ δγ μήκει. ἀλλὰ ἡ δγ ταῖς γδ βζ, ἐστὶ σύμμετρος μήκει. ἴση γάρ ἐστιν ἡ γδ τῇ βζ. καὶ ἡ βγ ἄρα ταῖς βζ γδ ἐστὶ σύμμετρος μήκει. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ζδ σύμμετρός ἐστιν ἡ γβ μήκει, ἡ βγ ἄρα τῆς α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἀλλὰ δὴ ἡ βγ, τῆς α, μεῖζον δυνάσθω, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς α, ἴσον παρὰ τὴν βγ. παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν βδ δγ, δεικτέον ὅτι σύμμετρος ἐστὶν ἡ βδ, τῇ δγ μήκει. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ βγ, τῆς α, μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς ζδ. δύναται δὲ ἡ βγ τῆς α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βγ, τῇ ζδ μήκει. ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ βζ δγ, σύμμετρος ἐστὶν ἡ βγ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ζβ δγ, τῇ δγ, σύμμετρός ἐστιν μήκει. ἴση γάρ ἐστιν ἡ βζ, τῇ δγ. καὶ ἡ βγ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ δγ. δῆλον ὅτι ἄρα ἡ βδ τῇ δγ, ἐστὶ σύμμετρος μήκει. ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος, μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ α βγ, ὧν μείζων ἡ βγ. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς α, ἴσον παρὰ τὴν βγ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν βδ δγ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ βδ, τῇ δγ μήκει, λέγω ὅτι ἡ βγ, τῆς α, μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, τῷ πρότερον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ βγ τῆς α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς δζ. δεικτέον οὖν ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ βγ, τῇ δζ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ βδ, τῇ δγ, ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ βγ, τῇ δγ μήκει. ἀλλὰ ἡ δγ, σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς βζ δγ, καὶ ἡ βγ ἄρα ἀσύμμετρος ἐστὶ συναμφοτέραις ταῖς βζ δγ. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ζδ, ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ βγ μήκει. καὶ ἡ βγ τῆς α, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ζδ, ἡ βγ ἄρα τῆς α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ βγ τῆς α μεῖζον, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς α, ἴσον παρὰ τὴν βγ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω, τὸ ὑπὸ τῶν βδ δγ, δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ βδ, τῇ δγ μήκει. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ βγ τῆς α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς δζ. [illegible] ἀλλ' ἡ βγ, τῆς α, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βγ, τῇ δζ μήκει. ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ βζ δγ, ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ βγ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ βζ δγ, τῇ δγ σύμμετρός ἐστιν μήκει, καὶ ἡ βγ ἄρα, τῇ δγ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ὥστε καὶ διελόντι ἡ βδ τῇ δγ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιθ



Λῆμμα.

Ἐπειδὴ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δηλαδὴ δύνανται καὶ μήκει σύμμετροι εἶναι, καὶ ἀσύμμετροι, φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει. αἱ γὰρ μήκει σύμμετροι, πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται, καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει,

μήκει

μήκει ἢ ἀσύμμετρος, λέγονται καὶ οὕτως ῥηταὶ, δυνάμει μόνον σύμμετροι. Πρόκλου σχόλιον.

Ῥητὰς καλεῖ, τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσιν, τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ᾽ ὃ ῥηταί. ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ, μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει. εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων, εὐθειῶν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

κ

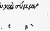


Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν αβ βγ, ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ αγ, λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ αγ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αδ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ αδ, καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αβ, τῇ βγ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ αβ τῇ βδ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βδ, τῇ βγ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ δα, πρὸς τὸ αγ, σύμμετρος δ᾽ ἐστὶν ἡ βδ, τῇ βγ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ δα, τῷ αγ. ῥητὸν δὲ τὸ δα, ῥητὸν ἄρα, καὶ τὸ αγ. τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν. καὶ τὰ ἑξῆς.

κα

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον, τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει.

κα



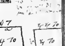
Ῥητὸν γὰρ τὸ αγ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν εἰρημένων τρόπων, τὴν αβ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν, τὴν βγ, λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ βγ καὶ σύμμετρος τῇ βα μήκει. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αδ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ αδ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ αγ σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδ τῷ αγ. καί ἐστιν ὡς τὸ δα, πρὸς τὸ αγ, οὕτως ἡ δβ, πρὸς τὴν βγ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δβ τῇ βγ. ἴση δ᾽ ἡ βδ τῇ βα, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αβ, τῇ βγ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ αβ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βγ, καὶ σύμμετρος τῇ βα μήκει. ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητήν. καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.



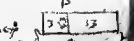
Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι. δυνάσθω γὰρ ἡ α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, ἴσον ἔστω χωρίῳ, λέγω ὅτι ἡ α, ἄλογός ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὴ ἡ α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον. οὕτως γὰρ ἐν τοῖς ὅροις, οὐκ ἔστι δέ. ἄλογος ἄρα ἡ α ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λῆμμα.

Μέση ἐστὶν ἄλογος, ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον, ὑπὸ ῥητῶν, δυνάμει μόνον, συμμέτρων. ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν α β, περιεχέσθω χωρίον. δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι, τὸ τοιοῦτον χωρίον. εἰλήφθω γὰρ τῶν α β μέση ἀνάλογον ἡ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς γ ὥστε ἡ γ, δύναται τὸ ὑπὸ τῶν α β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι, τοῦ κ τοῦ ς στοιχείου. ἀσύμμετρος δὲ ἡ α τῇ β μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α, τῷ ἀπὸ τῆς γ. ῥητὸν δὲ [illegible] ἀπὸ τῆς α. ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α β, ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ γ. μέση δὲ ἐκλήθη. ὅτι ἄλογος οὖσα μέσον δύο ῥητῶν τῶν α β, ἀνάλογον ἐστίν. Est scholium.



κβ

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ, ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση. Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν, τῶν αβ βγ, ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ αγ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέση. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον,



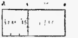
αβ τετράγωνον, τὸ αδ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ, τὸ αδ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αβ, τῇ βγ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ αβ τῇ βδ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δβ τῇ βγ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ αδ, πρὸς τὸ αγ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδ τῷ αγ. ῥητὸν δὲ τὸ δα. ἄλογον ἄρα ἐστὶν τὸ αγ. ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ αγ, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέση, διὰ τὸ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι, τῷ ὑπὸ τῶν αβ βγ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι, τῶν αβ βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



λῆμμα.

ΕΑΝ ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ζε εκ, λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζε εκ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ζε τετράγωνον, τὸ δζ, καὶ συμπεπληρώσθω, τὸ κδ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως τὸ ζδ, πρὸς τὸ δκ. καὶ ἐστι τὸ μὲν ζδ, τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τὸ δὲ δκ, τὸ ὑπὸ τῶν δε εκ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ζε εκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζε εκ. ὁμοίως δὲ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν κε εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τουτέστιν ὡς τὸ κδ πρὸς τὸ δζ, οὕτως ἡ κε, πρὸς τὴν εζ.



κγ

ΤΟ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον, τῇ παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ α, ῥητὴ δὲ, ἡ γβ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α, ἴσον παρὰ τὴν βγ παραβεβλήσθω χωρίον, τὸ βδ, πλάτος ποιοῦν, τὴν γδ, λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν, ἡ γδ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ βγ μήκει. ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ κζ. δύναται δὲ καὶ τὸ βδ. ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ βδ, τῷ κζ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν γδ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τῷ ἀπὸ τῆς εκ. ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τῷ ἀπὸ τῆς γδ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς εζ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ εζ. τῇ εκ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ὡς δὲ ἡ εζ πρὸς τὴν εκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ζε εκ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τῷ ὑπὸ τῶν ζε εκ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς εζ, σύμμετρον τὸ ἀπὸ τῆς γδ ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, ὡς ἄρα δέδεικται. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ζε εκ σύμμετρόν ἐστι, τὸ ὑπὸ τῶν δγ γβ, ἴσα γάρ εἰσι τῷ ἀπὸ τῆς α. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ὑπὸ τῶν δγ γβ περιεχομένῳ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δγ γβ, οὕτως ἐστὶν ἡ δγ πρὸς τὴν γβ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ δγ τῇ γβ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γδ καὶ ἀσύμμετρος, τῇ γβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ



κδ

ΗΤῇ μέσῃ σύμμετρος, μέση ἐστίν.

Ἔστω μέση ἡ α, καὶ τῇ α σύμμετρος ἔστω ἡ β, λέγω ὅτι καὶ ἡ β μέση ἐστίν. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ, ἡ γδ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ γε, πλάτος ποιοῦν, τὴν εδ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εδ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β, ἴσον παρὰ τὴν δγ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον, τὸ γζ, πλάτος ποιοῦν, τὴν δζ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β, σύμμετρον ἐστὶ

τρον ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α, τῷ ἀπὸ τῆς β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α, ἴσον ἐστὶ, τὸ εγ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β, ἴσον τὸ γζ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ εγ, τῷ γζ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ εγ πρὸς τὸ γζ, οὕτως ἡ εδ πρὸς τὴν δζ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εδ, τῇ δζ μήκει. ῥητὴ δ' ἐστὶν ἡ εδ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δγ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δζ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δγ μήκει. αἱ γδ δζ ἄρα, ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι. καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ δυναμένη μέση. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν γδ δζ δυναμένη, μέση ἐστίν. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν γδ δζ, ἡ β, μέση ἄρα ἐστὶν ἡ β.



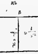
πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση. ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις, καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην, καὶ σύμμετρον αὐτῇ, μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει. ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι, πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι, καὶ μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι. εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. *Εἰσὶ δὲ πάλιν, καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι. καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι. ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἑπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροι εἰσίν, οὕτω δεικτέον, ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. αἱ ἄρα μέσαι, σύμμετροι εἰσίν.

Nō habet exē plar alterū.

κε'

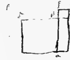
Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν. Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν αβ βγ περιεχέσθω ὀρθογώνιον, τὸ αγ, λέγω ὅτι τὸ αγ μέσον ἐστίν. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αδ. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ αδ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αβ τῇ βγ μήκει, ἴση δὲ ἡ αβ, τῇ βδ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βδ, τῇ βγ μήκει. ὥστε καὶ τὸ δα, τῷ αγ, σύμμετρόν ἐστι. μέσον δὲ, τὸ αδ, μέσον ἄρα καὶ τὸ αγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



κϛ'

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητὸν, ἢ μέσον ἐστίν. Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν αβ βγ, ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ αγ, λέγω ὅτι τὸ αγ, ἤτοι ῥητόν ἐστιν, ἢ μέσον. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν αβ βγ τετράγωνα, τὰ αδ βε. μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αδ βε. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ ζη. καὶ τῷ μὲν αδ, ἴσον παρὰ τὴν ζη παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ηθ, πλάτος ποιοῦν, τὴν ζθ. τῷ δὲ αγ ἴσον παρὰ τὴν θμ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ μκ πλάτος ποιοῦν, τὴν θκ. καὶ ἔτι τῷ βε ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν κν παραβεβλήσθω τὸ νλ, πλάτος ποιοῦν, τὴν κλ. ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ζθ θκ κλ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αδ βε, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν αδ, τῷ ηθ, τὸ δὲ βε, τῷ νλ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν ηθ νλ. καὶ παρὰ ῥητὴν, τὴν ζη παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ζθ κλ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ ζη μήκει. ἐπεὶ οὖν σύμμετρόν ἐστι τὸ αδ τῷ βε, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ηθ, τῷ νλ. ἔστιν ἄρα καὶ





ἄρα καὶ ὡς τὸ κθ, πρὸς τὸ λ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς τὴν κλ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζθ, τῇ κλ μήκει. αἱ ζθ κλ ἄρα ῥηταί εἰσι, μήκει σύμμετροι. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ζθ κλ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βδ τῇ βε, ἡ δὲ ξβ, τῇ βγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βξ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ δβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ δα πρὸς τὸ αγ, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βξ, οὕτως τὸ αγ, πρὸς τὸ γξ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γξ πρὸς τὸ αγ, οὕτως τὸ αγ, πρὸς τὸ αδ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν αδ, τῷ κθ, τὸ δὲ αγ, τῷ μκ, τὸ δὲ γξ τῷ νλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ κθ πρὸς τὸ μκ, οὕτως τὸ μκ, πρὸς τὸ νλ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ζθ, πρὸς τὴν θκ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς τὴν κλ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζθ κλ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς θκ, ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ζθ κλ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ θκ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι θμ, τουτέστι τῇ ζη, μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ νθ, εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ζη μήκει, αἱ κθ θμ ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ θν. τὸ θν ἄρα, ἤτοι ῥητόν ἐστιν, ἢ μέσον. ἴσον δὲ τὸ θν, τῷ αγ. τὸ αγ ἄρα, ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστί. τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει καὶ τὰ ἑξῆς.

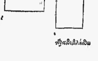
κζ





Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, μέσον τὸ αβ, μέσου τοῦ αγ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ δβ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ, καὶ τῷ αβ, ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, τὸ ζθ, πλάτος ποιοῦν, τὴν εθ, τῷ δὲ αγ ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ ζη. λοιπὸν ἄρα τὸ βδ, λοιπῷ τῷ κθ, ἴσον ἐστίν. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ βδ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ, καὶ τὸ κθ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αβ αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν αβ, τῷ ζθ ἴσον, τὸ δὲ αγ, τῷ ζη, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ζθ ζη. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν θε εη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει, καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δβ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ κθ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ κθ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ, καὶ σύμμετρος τῇ εζ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ εη ῥητή ἐστιν, καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εη, τῇ ηθ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εη πρὸς τὴν ηθ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν εη ηθ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη, τῷ ὑπὸ τῶν εη ηθ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς εη, σύμμετρά ἐστι, τὰ ἀπὸ τῶν εη ηθ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν εη ηθ σύμμετρον ἐστὶ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εη ηθ, διπλάσιον γάρ ἐστιν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν εη ηθ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν εη ηθ. καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν εη ηθ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν εη ηθ, ὅπερ ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς εθ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν εη ηθ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν εη ηθ, ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εθ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν, ἡ εθ. ἀλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ.

κη



Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιοῦν, καὶ ἄλλου τινὸς, δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν, οὕτως τὸν πρὸς ἄλλον τινά. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ, οἱ αβ γδ, λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιοῦν. ἄλλος δέ τις ὁ γε. δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον. ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν δγ γε, παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, τὸ δε. καὶ τὸ δε ἴσον παρὰ τὴν αβ,

Hæc exēplar alterū nō habebat, nec uidetur esse auctoris.

παραβεβλήσθω

παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον, τὸ βζ παραλληλογράμμῳ. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον αὐτῷ, τῶν δὲ ἴσων, καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αε πρὸς τὴν γδ, οὕτως ὁ γε, πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ α β, καὶ εἰλήφθω τῶν α β μέση ἀνάλογον, ἡ γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ. καὶ ἐπεὶ αἱ α β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς γ μέσον ἐστί. μέση ἄρα ἡ γ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ, αἱ δὲ α β δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ αἱ γ δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστι μέση ἡ γ, μέση ἄρα καὶ ἡ δ, αἱ γ δ ἄρα μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι.

κη

α	πλ.		9
γ	πλ.	πλ.	54
β	πλ.		6
δ	πλ.	πλ.	24

λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ β πρὸς τὴν δ. ἀλλ' ὡς ἡ α πρὸς τὴν γ, ἡ γ πρὸς τὴν β, καὶ ὡς ἄρα ἡ γ πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β πρὸς τὴν δ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γ δ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς β, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ δ. εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κθ

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

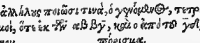
Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ α β γ, καὶ εἰλήφθω τῶν α β μέση ἀνάλογον ἡ δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ β πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν ε. ἐπεὶ αἱ α β, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δ, μέσον ἐστί. μέση ἄρα ἡ δ, καὶ ἐπεὶ αἱ β γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ β πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν ε, αἱ δ ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί, μέση δὲ, ἡ δ, μέση ἄρα καὶ ἡ ε, αἱ δ ε ἄρα, μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ β πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ δ πρὸς τὴν ε, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ β πρὸς τὴν δ, ἡ γ πρὸς τὴν ε. ὡς δὲ ἡ β πρὸς τὴν δ, ἡ δ πρὸς τὴν α, καὶ ὡς ἄρα ἡ δ πρὸς τὴν α, ἡ γ πρὸς τὴν ε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α γ ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν δ ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν α γ. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ ε. εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κθ

α	πλ.		16
δ	πλ.	πλ.	128
β	πλ.		8
γ	πλ.		6
ε	πλ.	πλ.	72

λῆμμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοί, οἱ αβ βγ. ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι, ἢ περιττοί, καὶ ἐπεὶ ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ αγ ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω ὁ αγ δίχα, κατὰ τὸ δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ αβ βγ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι, ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνου, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τοῦ βδ τετραγώνῳ, καὶ ἔστι τετράγωνος, ὁ ἐκ τῶν αβ βγ. ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος, τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ τε ἐκ τῶν αβ βγ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ γδ, οἳ συντεθέντες, ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ βδ τετράγωνον.

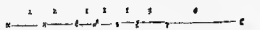


πόρισμα.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ βδ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ γδ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ὑπὸ τῶν αβ βγ, εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ αβ βγ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ὦσιν, ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ βδ, καὶ ὁ ἀπὸ

καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ γδ, ὧν ἡ ὑπεροχή, ὁ ὑπὸ τῶν αβ βγ, οὐκ ἔστι τετράγωνος. λῆμμα.

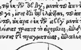
Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον. ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν αβ βγ ὡς ἔφαμεν τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ γα. καὶ τετμήσθω ὁ γα δίχα κατὰ τὸ δ. φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ἐκ τῶν αβ βγ τετράγωνος, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γδ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τοῦ βδ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς, ἡ δε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν αβ βγ τετράγωνος, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἐλάσσων ἐστὶ, τοῦ ἀπὸ τοῦ βδ τετραγώνου. λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν αβ βγ τετράγωνος, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, οὐκ ἔσται τετράγωνος, εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ βε, ἢ ἐλάσσων,



οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῇ ἡ μονάς. ἔστω εἰ δυνατὸν πρότερον ὁ ἐκ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ βε, καὶ ἔστω διπλασίων, ὁ ηα, τῆς δε μονάδος. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ αγ, ὅλου τοῦ γδ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ αη ἐστὶ διπλασίων τοῦ δε, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ηγ λοιποῦ τοῦ εγ, ἐστὶ διπλασίων. δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ηγ τῷ ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ηβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ βε τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ βε τετραγώνῳ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ηβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, συνάγεται ὁ αβ, ἴσος τῷ ηβ, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἴσος ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τοῦ βε. λέγω δὴ ὅτι, οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ βε. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ βζ ἴσος. καὶ τοῦ δζ διπλάσιος κείσθω ὁ θα. συναχθήσεται πάλιν διπλάσιος ὁ θγ, τοῦ γζ. ὥστε καὶ τὸν θγ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ ζ. καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν θβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ζγ, ἴσον γίνεσθαι, τῷ ἀπὸ τοῦ βζ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ζβ. συναχθήσεται ἄρα ἴσος, ὁ ἐκ τῶν αβ γβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, τῷ ἐκ τῶν θβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γζ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι, τοῦ ἀπὸ βε. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τοῦ βε, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ, οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ γε τετράγωνός ἐστι. δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὰ εἰρημένα ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας, ἔτι πλέον αὐτὴν μηκύνωμεν. λῆμμα.

Non habet alterũ exẽplar

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας, δέον ποιῆσαι, ὡς τὸν ἀριθμὸν, πρὸς τὸν ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ ἄλλης τινός. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, οἱ α β, εὐθεῖα δὲ ἡ γ. καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὸ προκείμενον, πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ α πρὸς τὸν β ἡ γ εὐθεῖα, πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν δ, καὶ εἰλήφθω τῶν γδ μέση ἀνάλογον, ἡ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ α πρὸς τὸν β, ἡ γ εὐθεῖα πρὸς τὴν δ, ἀλλ' ὡς ἡ γ πρὸς τὴν δ, τὸ ἀπὸ τῆς γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε. ὡς ἄρα ὁ α πρὸς τὸν β, τὸ ἀπὸ τῆς γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε τετράγωνον.



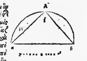
λ

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ, ἡ αβ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ, οἱ γδ δε. ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν γε, μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον, τὸ αζβ καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ δγ πρὸς τὸν γε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ, οὕτως ὁ γδ πρὸς τὸν γε, τὸ ἀπὸ τῆς βα ἄρα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζα λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ δγ πρὸς ἀριθμὸν τὸν γε. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς αζ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ. ῥη-

τὴ ἄρα

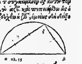
τῇ ἄρα καὶ ἡ αζ. καὶ ἐπεὶ ὁ δγ πρὸς τὸν γε λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς βα ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ αζ μήκει. αἱ αβ αζ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ δγ πρὸς τὸν γε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζα. ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ γδ, πρὸς τὸν δε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ὁ δὲ γδ πρὸς τὸν δε, λόγον ἔχει ὃν



τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ ἄρα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ βζ μήκει, καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αζ ζβ, ἡ αβ ἄρα τῆς αζ μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς βζ, συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ βα αζ. ὥστε τὴν μείζονα τὴν βα, τῆς ἐλάσσονος τῆς αζ, μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς βζ, συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς, δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

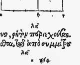
Ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ αβ καὶ δύο τετράγωνοι, οἱ γε εδ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν γδ, μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον, τὸ αζβ. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ δγ πρὸς τὸν γε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ αβ αζ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ὁ δγ πρὸς τὸν γε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ. ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ γδ πρὸς τὸν δε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ὁ δὲ γδ πρὸς τὸν δε, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ βζ μήκει. καὶ δύναται ἡ αβ, τῆς αζ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς βζ, ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, αἱ αβ βζ, ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ αβ τῆς αζ μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ τῆς ζβ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.



λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης. Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι, αἱ αβ βγ ἐν λόγῳ τινὶ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βγ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον τὸ βδ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αδ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ αδ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ βε παραλληλόγραμμον, καὶ ἔστι τὸ μὲν αδ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἴση γὰρ ἡ βγ, τῇ βδ. τὸ δὲ βε, τὸ ἀπὸ τῆς βγ. ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

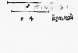
Non habet exemplar alterū



λα

Εὑρεῖν δύο μέσας, δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας. ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ α β, ὥστε τὴν α μείζονα οὖσαν, τῆς ἐλάσσονος τῆς β, μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν α β ἴσον ἔστω, τὸ ἀπὸ τῆς γ, μέσον δὲ, τὸ ὑπὸ τῶν α β, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ. μέση ἄρα καὶ ἡ γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β, ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ῥητὸν δὲ, τὸ ἀπὸ τῆς β. ῥητὸν ἄρα, καὶ

λα



ἄρα, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ δ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν α β, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον, τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, οὕτως ἡ γ, πρὸς τὴν δ. σύμμετρος δὲ ἡ α, τῇ β δυνάμει μόνον, σύμμετρος ἄρα, καὶ ἡ γ, τῇ δ δυνάμει μόνον. καὶ ἐστὶ μέση ἡ γ, μέση ἄρα καὶ ἡ δ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ γ πρὸς τὴν δ, ἡ δὲ α τῆς β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ γ ἄρα τῆς δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ γ δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ γ τῆς δ, μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. ὅταν ἡ α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης. Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ αβ βγ γδ. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ γδ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ αε. καὶ κείσθω τῇ βγ ἴση, ἡ αε. καὶ διὰ τοῦ ε σημείου, τῇ αδ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ εκ. διὰ δὲ τῶν β γ δ σημείων, τῇ αε παράλληλοι ἤχθωσαν, αἱ ζβ θγ κδ, καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ αζ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ βθ παραλληλόγραμμον. ὡς δὲ ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ βθ, πρὸς τὸ γκ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ αζ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γκ παραλληλόγραμμον, καὶ ἔστι τὸ μὲν αζ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἴση γὰρ ἡ αε, τῇ βγ, τὸ δὲ γκ, τὸ ὑπὸ τῶν βγ γδ. ἴση γὰρ ἡ βγ, τῇ γθ. ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Non habet alterū exēplar

λβ

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ αἱ α β γ, δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὴν α, τῆς γ μεῖζον δύνασθαι, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν α β ἴσον ἔστω, τὸ ἀπὸ τῆς δ. * μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν α β. * μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δ. καὶ ἡ δ ἄρα, μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν β γ, ἴσον ἔστω, τὸ ὑπὸ τῶν δ ε. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α β, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν β γ, οὕτως ἡ α πρὸς τὴν γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν α β, ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς δ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν β γ ἴσον ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α πρὸς τὴν γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ ε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς δ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ ε, οὕτως ἡ δ, πρὸς τὴν ε, καὶ ὡς ἄρα ἡ α πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ δ, πρὸς τὴν ε, σύμμετρος δὲ ἡ α τῇ γ, δυνάμει μόνον, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ δ, τῇ ε, δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ δ. μέση ἄρα καὶ ἡ ε. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν γ, ἡ δ πρὸς τὴν ε, ἡ δὲ α τῆς γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ δ ἄρα τῆς ε, μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β γ, τὸ ὑπὸ τῶν δ ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν β γ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δ ε. εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ δ ε μέσον περιέχουσαι. ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται, καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. ὅταν ἡ α τῆς γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

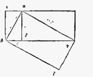
Sic habet exēplar latinum.

λβ				
α	πλ.	64		
δ	πλ.	πλ.	3072	
β	πλ.	48		
ε	πλ.	πλ.	[illegible]	
γ	πλ.	28		

λῆμμα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ αδ, λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν γβ βδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βα, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν βγ γδ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς γα, καὶ τὸ

γα, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βδ δγ, ἴσον ἐστὶ ὑπὸ τῶν βα αγ. καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν γβ βδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βα. ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ αδ, τὰ αβδ αδγ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ αβγ, καὶ ἀλλήλοις, καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ αβδ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βδ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γβ βδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βγ γδ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ αδ, πρὸς τὴν δγ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βδ δγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δα. λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βγ αδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βα αγ. ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ, τῷ αγδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βγ αδ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν βα αγ. καὶ ὅτι ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ εγ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ αζ, ἴσον ἔσται τὸ εγ, τῷ αζ. ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι, τοῦ αβγ τριγώνου, καὶ ἔστι τὸ μὲν εγ, τὸ ὑπὸ τῶν βγ αδ. τὸ δὲ αζ, τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βγ αδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βα αγ. Λῆμμα εἰς τὸ λγ.



Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τῆς μείζονος, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος. εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ ε. λέγω ὅτι ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν βα αε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αβ βε. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὸ αγ δβ, καὶ διὰ τοῦ ε σημείου, ποτέρᾳ τῶν αγ δβ παράλληλος ἤχθω ἡ εζ, φανερὸν δὴ ὅτι ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως τὸ αζ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ζβ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν αζ, τὸ ὑπὸ τῶν βα αε. ἴση γὰρ ἡ αγ, τῇ αβ, τὸ δὲ ζβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βε. ἴση γὰρ ἡ δβ, τῇ αβ. ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς τὴν εβ. οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν βα αε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αβ βε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Non habet exemplar alterũ.

λγ

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν, μέσον. λγ

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ αβ βγ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν αβ, τῆς ἐλάσσονος τῆς βγ, μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ καὶ τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ τῷ ἀφ᾽ ὁποτέρας τῶν βδ δγ ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον, τὸ αζβ, καὶ ἤχθω τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς, ἡ εζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ ζβ, καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοι εἰσὶν αἱ αβ βγ, καὶ ἡ αβ τῆς βγ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ β τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς βγ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν αβ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αε, τῇ εβ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εβ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν βα αε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αβ βε. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ αε, τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βε, τῷ ἀπὸ τῆς βζ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. αἱ αζ ζβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αζ ζβ, ῥητόν ἐστι, καὶ



ἐστι, καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, τῷ ἀπὸ τῆς βδ ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ζε, τῇ βδ. διπλῆ ἄρα ἡ βγ τῆς ζε, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ὑπὸ τῶν αβ εζ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ εζ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αβ εζ, τῷ ὑπὸ τῶν αζ ζβ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ αζ ζβ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λῆμμα.

Non habet alterũ exẽplar

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλάχιστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, διπλάσιον ἔσται, τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος, καὶ τῆς ἡμισείας, τῆς ἐλαχίστης. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, αἱ αβ βγ. ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ δ, λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ διπλάσιόν ἐστιν τοῦ ὑπὸ τῶν αβ βδ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς ἡ βε. καὶ κείσθω τῇ βα ἴση, ἡ βε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν δγ, οὕτως τὸ εζ πρὸς τὸ δγ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως τὸ βκ, πρὸς τὸ δκ. καὶ ἔστιν ἡ βγ τῆς δγ, διπλασίων, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ βκ, τοῦ δκ, καὶ ἔστι τὸ μὲν βκ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἴση γὰρ ἡ αβ τῇ βε. τὸ δὲ δκ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βδ. ἴση γὰρ τῇ μὲν βδ ἡ δγ, τῇ δὲ αβ, ἡ δζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



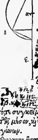
λδ

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, ῥητόν.

λδ

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ αβ βγ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν αβ, τῆς βγ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, τὸ αδβ ἡμικύκλιον. καὶ τετμήσθω, ἡ βγ δίχα κατὰ τὸ ε. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αβ, τῷ ἀπὸ τῆς βε, ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζβ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ, τῇ ζβ μήκει, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς, ἡ ζδ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ αδ δβ. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αζ τῇ ζβ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα αζ. τῷ ὑπὸ τῶν αβ βζ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα αζ, τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βζ, τῷ ἀπὸ τῆς δβ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τῷ ἀπὸ τῆς δβ. † αἱ αδ δβ ἄρα, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. † καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ βγ, τῆς δζ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, τοῦ ὑπὸ τῶν αβ ζδ. ὥστε καὶ σύμμετρον. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ὑπόκειται γὰρ οὕτως. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζδ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ ζδ, ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ, ῥητόν ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ αδ δβ ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, ῥητόν.

Non habet exemplar alterũ

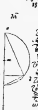


λε

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν, μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ αβ βγ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν αβ τῆς βγ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον, τὸ αδβ. καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω ὁμοίως τοῖς ἐπάνω εἰρημένοις, καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αζ τῇ ζβ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ αδ τῇ δβ δυνάμει καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, μέσον, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζβ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀφ' ἑκατέρας

ἑκατέρας τῆς βε, τῆς δζ. ἴση ἄρα ἡ δζ τῇ βε. διπλῆ ἄρα ἡ βγ, τῆς ζδ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ὑπὸ τῶν αβ ζδ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζδ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν αδ δβ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αβ τῇ βγ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ γβ τῇ βε, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ αβ τῇ βε μήκει. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ὑπὸ τῶν αβ βε, ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βε, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ ζδ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, τῷ ὑπὸ τῶν αδ δβ. εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι. ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν, μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.



Ἀρχὴ, τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων. λϛ

EAN δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

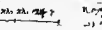
Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ αβ βγ, λέγω ὅτι ἡ αγ ἄλογός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αβ, τῇ βγ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, τῷ ἀπὸ τῆς βγ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν αβ βγ σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βγ σύμμετρα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ. τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρόν ἐστιν, καὶ συνθέντι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἀσύμμετρόν ἐστι, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε καὶ ἡ αγ, ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.



λζ

EAN δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ αβ βγ, ῥητὸν περιέχουσαι, λέγω ὅτι ὅλη ἡ αγ ἄλογός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αβ τῇ βγ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. συνθέντι ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἀσύμμετρόν ἐστι, τῷ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ὑπόκειται δὲ ῥητὸν περιέχουσαι. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἄλογος ἄρα, ἡ αγ. καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων, πρώτη.

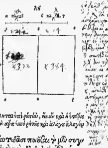


λη

EAN δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ αβ βγ μέσον περιέχουσαι, λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ αγ. ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ δε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον παρὰ τὴν δε παραβεβλήσθω, τὸ δζ, πλάτος ποιοῦν, τὴν δη. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον ἐστὶ, τοῖς τε ἀπὸ τῶν αβ βγ, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν δε, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βγ ἴσον, τὸ εθ. λοιπὸν ἄρα τὸ ζθ, ἴσον ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν αβ βγ, μέσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ. μέσον δὲ ὑπόκειται, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον τὸ εθ. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον τὸ θζ, μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν εθ θζ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δε παράκειται, * ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δθ θη καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αβ τῇ βγ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βγ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ,

ἀσύμμετρον



ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἐστὶ τὸ εθ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἐστὶ, τὸ θζ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ εθ τῷ θζ. ὥστε καὶ ἡ δθ τῇ θη, ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί. αἱ δθ θη ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ δη, ἄλογος ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ δε, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστιν, ἄλογον ἄρα ἐστὶ, τὸ δζ χωρίον. ὥστε καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος ἐστι, δύναται δὲ τὸ δζ ἡ αγ, ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων, δευτέρα. ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ, τὸ μέσον τὸ περιέχειν τὸ ὑπὸ αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητόν. δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. εἰ γὰρ ἐστὶ ῥητὸν καὶ παραβέβληται ἐπὶ ῥητὴν, ἔσται αὖ καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή, ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

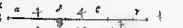
Addit exemplar alterũ.

λθ

ΕΑΝ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ αβ βγ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ αγ. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ. ἄλογον ἄρα ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε καὶ ἡ αγ, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μείζων.





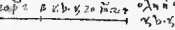
Addit exemplar alterum.

ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσου, καὶ δέον ἐστὶν ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τεθῆναι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, οὕτω δεικτέον. φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ αβ βγ. εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται, ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ αβ βγ. ὑποκείσθω μείζων ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ βγ ἴση ἡ βδ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ βδ ἴσα ἐστὶ, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ βδ, καὶ τῷ ἀπὸ δα, ἴση δὲ ἡ δβ τῇ βγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ βγ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ μείζονά ἐστι, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, τῷ ἀπὸ τῆς δα.

μ

ΕΑΝ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, ῥητὸν, ἡ ὅλη εὐθεῖα, ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ αβ βγ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ αγ. ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ μέσον ἐστί. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. ὥστε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἀσύμμετρόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αγ. ἄλογος ἄρα ἡ αγ. καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. * ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε,



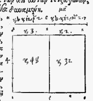
Addit exemplar alterũ.

ἐκάλεσε, διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία τὸ μὲν ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον, καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσε.*

μα

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν, μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

μα

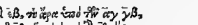


Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ αβ βγ, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων, λέγω ὅτι ἡ αγ ἄλογός ἐστι. ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ δε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν δε, τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ ἴσον τὸ δζ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον, τὸ ηθ. ὅλον ἄρα τὸ δθ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ, καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, καὶ ἴσον τῷ δζ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ δζ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δε, παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ δη. καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε, μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ηκ, ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ζη, τουτέστι, τῇ δε, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δζ, τῷ ηθ. ὥστε καὶ ἡ δη, τῇ ηκ, ἀσύμμετρός ἐστι, καί εἰσι ῥηταί. αἱ δη ηκ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἄλογος ἄρα ἐστὶν, ἡ δκ, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων, ῥητὴ δὲ ἡ δε. ἄλογον ἄρα ἐστὶ, τὸ δθ. καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ, ἄλογός ἐστι. δύναται δὲ τὸ δθ, ἡ αγ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. *καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ.*

Addit exemplar alterũ.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη, προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον. Λῆμμα.

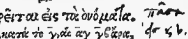
Ἐκκείσθω εὐθεῖα, ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν γ δ. ὑποκείσθω δὲ μείζων, ἡ αγ, τῆς δβ, λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ. τετμήσθω γὰρ ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς δβ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ δγ. λοιπὴ ἄρα ἡ αδ, λοιπῆς τῆς γβ, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ αε, τῇ εβ. ἐλάττων ἄρα ἡ δε, τῆς εγ. τὰ γ δ ἄρα σημεῖα, οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γε ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εβ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αγ γβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εγ, ἴσον ἐστὶ, τῷ ὑπὸ τῶν αδ δβ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δε. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἔλασσόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς εγ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν αδ δβ. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἔλαττόν ἐστι, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, μεῖζόν ἐστι, τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ. ἐπεὶ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



μβ

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ αβ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα, κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, λέγω ὅτι ἡ αβ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους. εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ δ. ὥστε καὶ τὰς αδ δβ, ῥητὰς εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ αγ τῇ δβ, οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ αδ, τῇ γβ, ἡ αὐτή. καὶ ἔσται ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ βδ, πρὸς τὴν δα. καὶ ἔσται ἡ αβ κατὰ τὸ αὐτὸ, τῇ κατὰ τὸ γ διαιρέσει, διαιρεθεῖσα καὶ

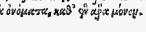


ἐπὶ τὸ δ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ αγ, τῇ δβ ἐστὶν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο, καὶ τὰ γ δ σημεῖα, οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αβ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα. μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται, καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον.

μγ

Η ἐκ δύο μέσων πρώτη, καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται, εἰς τὰ ὀνόματα. Ἔστω δὴ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἡ αβ διῃρημένη ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὰς αγ γβ μέσας εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας. λέγω ὅτι ἡ αβ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ ἐπὶ τὸ δ, ὥστε καὶ τὰς αδ δβ, μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη, κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα, καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον.

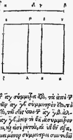
μγ



μδ

Η ἐκ δύο μέσων δευτέρα, καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἡ αβ, διῃρημένη ἐπὶ τὸ γ, ὥστε τὰς αγ γβ, μέσας εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας. φανερὸν δὴ ὅτι τὸ γ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς διχοτομίας. ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ αβ, κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω ἐπὶ τὸ δ. ὥστε τὴν αγ, τῇ δβ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν αγ. δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς αδ δβ, μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω τὸ εκ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αγ γβ ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ εη λοιπὸν ἄρα τὸ θκ ἴσον ἐστί, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ δβ ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ ελ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ μκ, ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσον ἄρα τὸ εη, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εθ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θν, ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος, τῇ εζ μήκει, καὶ ἐπεὶ αἱ αγ γβ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ μήκει. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αγ σύμμετρά ἐστι, τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ. δυνάμει γὰρ εἰσὶ σύμμετροι, αἱ αγ γβ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αγ γβ σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ ἄρα, ἀσύμμετρά ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον ἐστί, τὸ εη. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον τὸ θκ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστί, τὸ εη, τῷ θκ, ὥστε καὶ ἡ εθ, τῇ θν, ἀσύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ εἰσὶ ῥηταί, αἱ εθ θν ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ἡ εν ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, διῃρημένη ἐπὶ τὸ θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ εμ μν, ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἔσται ἡ εν, ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη τό τε θ, καὶ μ. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ

μδ



εθ τῇ μν

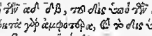
εθ τῇ μν, ἡ αὐτή, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, μείζονα ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ μείζονα ἐστὶ τοῦ δὶς ὑπὸ αδ δβ, πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τουτέστι τὸ εκ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τουτέστι τοῦ μκ. ὥστε καὶ ἡ εθ τῆς μν μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα εθ, τῇ μν, οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή.

με

Η Μείζων καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω μείζων ἡ αβ, διῃρημένη κατὰ τὸ γ, ὥστε τὰς αγ γβ, δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας, τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ γβ, μέσον. λέγω ὅτι ἡ αβ, κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ δ, ὥστε καὶ τὰς αδ δβ, δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ τῶν αδ δβ, ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ ἄρα, ῥητῷ ὑπερέχει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. καθ᾽ ἓν τὸ αὐτὸ ἄρα διαιρεῖται μόνον.

με

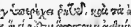


μς

Η Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη, ἡ αβ, διῃρημένη κατὰ τὸ γ. ὥστε τὰς αγ γβ, δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσον, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν αγ γβ, ῥητόν, λέγω ὅτι ἡ αβ, κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ δ. ὥστε καὶ τὰς αδ δβ, δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, μέσον, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν αδ δβ, ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ, ῥητῷ ὑπερέχουσι, μέσα ὄντα. ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον ἢ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. καθ᾽ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται.

μς

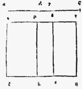


μζ

Η Δύο μέσα δυναμένη, καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται, εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη, ἡ αβ διῃρημένη κατὰ τὸ γ, ὥστε τὰς αγ γβ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ μέσον. καὶ ἔτι ἀσύμμετρον, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν, λέγω ὅτι ἡ αβ, κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα. εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ δ. ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν αγ, τῇ δβ, μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν αγ. καὶ κείσθω ῥητή, ἡ εζ. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν εζ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον τὸ εη, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον τὸ θκ. ὅλον ἄρα τὸ εκ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν εζ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ δβ, ἴσον τὸ ελ. λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ λοιπῷ τῷ μκ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ εη. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ θε, καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θν, ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, καὶ τὸ εη ἄρα τῷ θκ, ἀσύμμετρόν ἐστιν. ὥστε καὶ ἡ εθ τῇ θν ἀσύμμετρός ἐστιν, καὶ

μς



εἰσὶ ῥηταί. αἱ ἄρα δθ, θβ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ εθ τῇ μν ἡ αὐτή. ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται. ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

ὅροι δεύτεροι.

Υποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῷ μήκει.

Ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

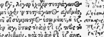
Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῷ μήκει. ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει, τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

Addit exemplar alterū.

*Ἐξ ὧν ἴσων τῶν οὕτω καταλαμβανομένων ἕξ ὅρων, τίθει πρώτας τῇ τάξει τὰς ἐφ᾽ ὧν ἡ μεῖζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς ἐφ᾽ ὧν τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου δεῖ τὸ προσκεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου. καὶ ἔστω πρώτην μὲν, ἐφ᾽ ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ. δευτέραν δὲ ἐφ᾽ ἧς τὸ ἔλαττον δεῖ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον. τρίτην δὲ ἐφ᾽ ἣν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων ἐστὶ σύμμετρον τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν. καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην. καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

μη

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ αγ, γβ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν αβ, πρὸς μὲν τὸν βγ, λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν γα, λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ δ. καὶ τῇ δ σύμμετρος ἔστω μήκει, ἡ εζ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ εζ, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ βα ἀριθμὸς πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ὁ δὲ βα, πρὸς τὸν αγ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ ἄρα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τῷ ἀπὸ τῆς ζη καί ἐστι ῥητὴ ἡ εζ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ βα πρὸς τὸν αγ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς εζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ ζη μήκει, αἱ εζ ζη ἄρα, ῥηταί εἰσιν, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ εη. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ βα ἀριθμὸς πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. μείζων δὲ ὁ βα, τοῦ αγ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζη. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς εζ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζη θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ βα, πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αβ, πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ αβ πρὸς τὸν βγ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ θ μήκει. ἡ εζ ἄρα τῆς ζη, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ εζ ζη. καὶ σύμμετρος ἡ εζ τῇ δ μήκει. ἡ εη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

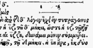


μθ

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ αγ γβ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν αβ, πρὸς μὲν τὸν βγ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

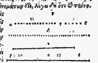
νος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. πρὸς δὲ τὸν γα, λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ δ. καὶ τῇ δ σύμμετρος ἔστω ἡ ζη μήκει, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζη. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ γα ἀριθμὸς πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, τῷ ἀπὸ τῆς ζη, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ γα ἀριθμός, πρὸς τὸν αβ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ζη μήκει. αἱ ζη ηθ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ζθ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ αβ ἀριθμός, πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηθ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, μείζων δὲ ὁ βα, τοῦ αγ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζη. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ηθ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζη, θ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ βα, πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηθ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ἀλλ᾽ ὁ αβ, πρὸς τὸν βγ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ θ μήκει, ὥστε ἡ ηθ, τῆς ζη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ηθ ζη, δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τὸ ζη ἔλαττον ὄνομα σύμμετρον ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ δ μήκει. ἡ ζθ ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

μθ



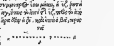
ν

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοί, οἱ αγ γβ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν αβ πρὸς μὲν τὸν βγ λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν αγ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμός, ὁ δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν βα αγ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα, ἡ ε. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε, τῷ ἀπὸ τῆς ζη, ῥητὴ δὲ ἡ ε. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ δ πρὸς τὸν αβ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ε, τῇ ζη μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ βα ἀριθμὸς πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τῷ ἀπὸ τῆς ηθ, ῥητὴ δὲ ἡ ζη, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ αβ πρὸς τὸν αγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θη λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη τῇ ηθ, μήκει. αἱ ζη ηθ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ ζθ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, ὡς δὲ ὁ βα πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ ηθ. ὁ δὲ δ πρὸς τὸν αγ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ε, τῇ ηθ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ βα πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη, τοῦ ἀπὸ τῆς ηθ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ζη, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ηθ κ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ αβ πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ. ὁ δὲ αβ πρὸς τὸν βγ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἡ ζη τῇ κ μήκει, ἡ ζη ἄρα τῆς ηθ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί εἰσιν αἱ ζη ηθ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι, τῇ ε μήκει. ἡ ζθ ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.



να

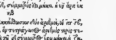
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ αγ γβ, ὥστε τὸν αβ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ δ, καὶ τῇ δ σύμμετρος ἔστω μήκει, ἡ εζ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εζ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ βα ἀριθμὸς, πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τῷ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ βα, πρὸς τὸν αγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ ζη μήκει. αἱ εζ ζη ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ εη, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ βα πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, μείζων δὲ ὁ βα τοῦ αγ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζη. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσα, τὰ ἀπὸ τῶν ζη θ.



ἀναστρέψαντι ἄρα, ὡς ὁ αβ ἀριθμὸς, πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ αβ, πρὸς τὸν βγ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ εζ, τῇ θ μήκει. ἡ εζ ἄρα τῆς ηζ, μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ εζ ζη, ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ εζ, τῇ δ, σύμμετρός ἐστι μήκει. ἡ εη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

νβ

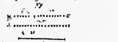
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ αγ γβ, ὥστε τὸν αβ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν, λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ῥητὴ, ἡ δ. καὶ τῇ δ σύμμετρος ἔστω μήκει, ἡ ζη. ῥητὴ ἄρα ἡ ζη. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ γα πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζε. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζε. καὶ ἐπεὶ ὁ γα πρὸς τὸν αβ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ηζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζε λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. αἱ εζ ζη ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ εη. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ γα πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζε, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ὁ βα πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς εζ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζη. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ηζ θ.



ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αβ ἀριθμὸς, πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ αβ πρὸς τὸν βγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς εζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ θ μήκει. ὥστε ἡ εζ, τῆς ζη, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ εζ ζη ῥηταὶ, δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τὸ ζη, ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ δ μήκει. ἡ εη ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

νγ

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ αγ γβ. ὥστε τὸν αβ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν, λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς, ὁ δ μὴ τετράγωνος ὢν μὴ ἔχων πρὸς ἑκάτερον τῶν βα αγ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα, ἡ ε.

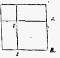


καὶ γεγονέτω ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ε, τῇ ζη δυνάμει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ε, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ δ πρὸς τὸν αβ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ε, τῇ ζη μήκει.

ζη μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ βε, πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη, τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὴ ἄρα ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ βε πρὸς τὸν αγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηθ μήκει. αἱ ζη ηθ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ζθ. δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ βε πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θη. δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ δ πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ὁ δὲ δ πρὸς τὸν αγ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμός, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ε, τῇ ηθ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ζη ἀσύμμετρος. ἑκατέρα ἄρα τῶν ζη ηθ, ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ βε πρὸς τὸν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη, τοῦ ἀπὸ τῆς ηθ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ζη, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ηθ κ. ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ αβ, πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ. ὁ δὲ αβ πρὸς τὸν βγ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη τῇ κ, μήκει. ἡ ζη ἄρα τῆς ηθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ζη ηθ ῥηταί, δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ οὐδετέρα τῶν ζη ηθ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ε, ἡ ζθ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Λῆμμα

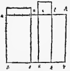
Ἔστω δύο τετράγωνα, τὰ αε βγ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν δβ, τῇ βε. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζβ, τῇ βη. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ αγ παραλληλόγραμμον. λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι, τὸ αγ. καὶ ὅτι τῶν αε βγ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ δη. καὶ ἔτι τῶν αγ γβ μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ δγ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δβ, τῇ ζβ, ἡ δὲ βε τῇ βη μήκει, ὅλη ἄρα ἡ δε, ὅλῃ τῇ ζη ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν δε, ἑκατέρᾳ τῶν ακ θγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν αθ κγ, ἑκατέρᾳ τῶν ακ θγ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστί, τὸ αγ παραλληλόγραμμον. ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ αγ.



καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ζβ πρὸς τὴν βη. οὕτως ἡ δβ πρὸς τὴν βε. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ζβ πρὸς τὴν βη, οὕτως τὸ αε, πρὸς τὸ δη. ὡς δὲ ἡ δβ πρὸς τὴν βε, οὕτως τὸ δη, πρὸς τὸ βγ. τῶν αε βγ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ δη. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν αγ βγ, μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ δγ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αδ πρὸς τὴν δκ, οὕτως ἡ κη πρὸς τὴν ηγ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ακ πρὸς τὴν κδ, οὕτως ἡ κγ πρὸς τὴν γη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ακ πρὸς τὴν κδ, οὕτως τὸ αγ πρὸς τὸ γδ. ὡς δὲ ἡ κγ πρὸς τὴν γη, οὕτως τὸ δγ, πρὸς τὸ γβ. καὶ ὡς ἄρα τὸ αγ πρὸς τὸ δγ, οὕτως τὸ δγ, πρὸς τὸ βγ. τῶν αγ γβ ἄρα, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ γδ. ὅπερ προὔκειτο δεῖξαι.

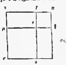
νδʹ

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.



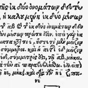
Χωρίον γὰρ τὸ αβ γδ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, τῆς αδ. λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ αδ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα, κατὰ τὸ ε. καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα, τὸ αε. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ αε εδ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ αε τῆς εδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ αε, σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ αβ, μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ εδ δίχα κατὰ τὸ ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ αε τῆς εδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς εζ, ἴσον

παρὰ τὴν μείζονα τὴν αε παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν αε, τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν αη ηε. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αη τῇ ηε μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν η ε ζ ὁποτέρᾳ τῶν αβ δγ παράλληλοι, αἱ ηθ εκ λζ. καὶ τῷ μὲν αθ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ σν, τῷ δὲ ηκ, ἴσον τὸ νπ. καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν μν, τῇ νξ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ρν, τῇ νο, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ σπ παραλληλόγραμμον. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, τὸ σπ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αη ηε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αη πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν εη. καὶ ὡς ἄρα τὸ αθ πρὸς τὸ ελ, οὕτως τὸ ελ πρὸς τὸ κη. τῶν αθ ηκ ἄρα μέσον ἀνάλογον ἐστὶ τὸ ελ. ἀλλὰ τὸ μὲν αθ, ἴσον ἐστὶ τῷ σν. τὸ δὲ ηκ ἴσον ἐστὶ, τῷ νπ, τῶν σν νπ ἄρα μέσον ἀνάλογον ἐστὶ τὸ ελ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν σν νπ μέσον ἀνάλογον, καὶ τὸ μρ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μρ τῷ ελ. ἀλλὰ τὸ μὲν μρ τῷ οξ ἴσον ἐστί. τὸ δὲ ελ τῷ ζγ. ὅλον ἄρα τὸ εγ, τοῖς μρ οξ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ αθ ηκ τοῖς σν νπ, ἴσα. ὅλον ἄρα τὸ αγ ἴσον ἐστὶν, ὅλῳ τῷ σπ. τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς μξ τετραγώνῳ, τὸ αγ ἄρα δύναται ἡ μξ. λέγω ὅτι ἡ μξ, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ αη τῇ ηε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ αε, ἑκατέρᾳ τῶν αη ηε. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ αε τῇ αβ σύμμετρος μήκει. καὶ αἱ αη ηε ἄρα τῇ αβ σύμμετροι εἰσί. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ αβ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν αη ηε. ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αθ ηκ. καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ αθ, τῷ ηκ. ἀλλὰ τὸ μὲν αθ, τῷ σν ἴσον ἐστὶ. τὸ δὲ ηκ, τῷ νπ. καὶ τὰ σν νπ ἄρα τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν μν νξ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ εδ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν αε τῇ αη ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ δε τῇ εζ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ αη, τῇ εζ μήκει. ὥστε καὶ τὸ αθ, τῷ ελ ἀσύμμετρον. ἀλλὰ τὸ μὲν αθ τῷ σν, ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ελ, τῷ μρ, καὶ τὸ σν ἄρα τῷ μρ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ σν πρὸς τὸ μρ, ἡ ον, πρὸς νρ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ον, τῇ νρ. ἴση δὲ ἡ μὲν ον, τῇ μν, ἡ δὲ νρ, τῇ νξ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ μν, τῇ νξ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς μν, σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς νξ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον, αἱ μν νξ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ μξ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ αγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

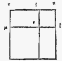


νε

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ αβγδ, ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, τῆς αδ. λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη, ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ αδ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ ε, ὥστε τὸ μὲν μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ αε. αἱ αε εδ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ αε τῆς εδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ εδ, σύμμετρός ἐστι, τῇ αβ, μήκει. τετμήσθω ἡ εδ δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον παρὰ τὴν αε παραβεβλήσθω. ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν αη ηε. σύμμετρος ἄρα ἡ αη τῇ ηε, μήκει. καὶ διὰ τῶν η ε ζ παράλληλοι ἤχθωσαν, τοῖς αβ δγ, αἱ ηθ εκ ζλ. καὶ τῷ μὲν αθ παραλληλογράμμῳ, ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ σν, τῷ δὲ ηκ ἴσον τετράγωνον, τὸ νπ. καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν μν, τῇ νξ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ρν, τῇ νο. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ σπ τετράγωνον. φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου ὅτι τὸ μρ, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν σν νπ, καὶ ἴσον τῷ ελ, καὶ ὅτι τὸ αγ χωρίον δύναται ἡ μξ. δεικτέον δὴ ὅτι ἡ μξ, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αε, τῇ εδ μήκει. σύμμετρος δὲ ἡ εδ τῇ αβ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ αε, τῇ αβ μήκει, καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αη τῇ ηε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ αε, ἑκατέρᾳ τῶν αη ηε. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ αε, ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν αη ηε. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αε, τῇ αβ, σύμμετρος δὲ ἡ

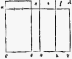


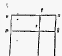
τρος δὲ ἡ αε ἑκατέρᾳ τῶν αη ηε. αἱ αη ηε ἄρα, ἀσύμμετροί εἰσι, τῇ αβ μήκει. αἱ δὲ αη, ηε, ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αθ ηκ, ὥστε ἑκάτερον τῶν σν νπ, μέσον ἐστὶ, καὶ αἱ μν νξ ἄρα, μέσαι εἰσὶ, καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αη, τῇ ηε μήκει, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ αθ, τῷ ηκ. τουτέστι τὸ σν, τῷ νπ. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς μν τῷ ἀπὸ τῆς νξ. ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ μν νξ, καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ εδ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν αε σύμμετρός ἐστι τῇ αη, ἡ δὲ εδ, τῇ εζ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ αη, τῇ εζ. ὥστε καὶ τὸ αθ τῷ ελ, ἀσύμμετρον ἐστὶ, τουτέστι τὸ σν, τῷ μρ. τουτέστιν ἡ ον, τῇ νρ. τουτέστιν ἡ μν τῇ νξ, ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ μν νξ καὶ μέσαι οὖσαι, καὶ δυνάμει σύμμετροι. αἱ μν νξ ἄρα, μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ δε ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν αβ εζ σύμμετρος. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ εζ, τῇ εκ, καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ελ, τουτέστι τὸ μξ, τὸ δὲ μξ ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ, ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη. ἡ μξ ἄρα, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



νε

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα. χωρίον γὰρ τὸ αβ γδ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, τῆς αδ. διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ ε. ὧν μεῖζον ἔστω, τὸ αε. λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ αδ, αἱ αε εδ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ αε τῆς εδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν αε εδ, σύμμετρός ἐστι τῇ αβ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις, δείξομεν ὅτι ἡ μξ, ἐστὶν ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη. καὶ ὅτι αἱ μν νξ, ἐκ δύο μέσων ἐστί. δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ δε τῇ αβ μήκει, τουτέστι τῇ εκ. σύμμετρος δὲ ἡ δε, τῇ εζ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ εκ μήκει, καὶ εἰσὶ ῥηταί. αἱ ζε εκ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα τὸ ελ. τουτέστι τὸ μρ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν μν νξ. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ. ἡ μξ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα.

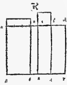


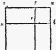


νζ

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. χωρίον γὰρ τὸ αγ, περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, τῆς αδ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, κατὰ τὸ ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ αε. λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ αε εδ ἄρα, ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ αε, τῆς εδ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ αε τῇ αβ, σύμμετρός ἐστι μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ δε δίχα κατὰ τὸ ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ ἴσον παρὰ τὴν αε παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον, τὸ ὑπὸ τῶν αη ηε. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ αη, τῇ ηε μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ αβ, αἱ ηθ εκ ζλ. καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω. φανερὸν

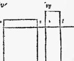
νέτω. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ μξ. δεικτέον δὴ ὅτι ἡ μξ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ακ, τῇ εκ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ αθ, τῷ θκ, τουτέστι τὸ σν, τῷ νπ, αἱ μν νξ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ αβ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ακ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν μν νξ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ δε, τῇ αβ μήκει, τουτέστι τῇ εκ, ἀλλ᾽ ἡ δε σύμμετρός ἐστι τῇ εζ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ εζ, τῇ εκ μήκει, αἱ κε εζ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ. καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἡ μν, τῇ νξ, δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μείζων, ἡ μξ ἄρα ἄλογός ἐστιν. ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ αγ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



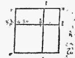


νη

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.



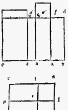
Χωρίον γὰρ τὸ αγ, περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς αδ. διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, κατὰ τὸ ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ αε. λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ αγ χωρίον δυναμένη ἐστὶν, ἡ μξ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ μξ ἐστιν, ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αη, τῇ ηε, ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ τὸ αθ, τῷ θε. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς μν, τῷ ἀπὸ τῆς νξ. αἱ μν νξ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστιν ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ εδ, σύμμετρός ἐστιν ἡ εδ τῇ αβ μήκει. ἀλλ᾽ ἡ αε τῇ εδ, ἐστὶν ἀσύμμετρος, καὶ ἡ αβ ἄρα τῇ αε, ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ βα αε, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ. τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ δε, τῇ αβ μήκει, τουτέστι τῇ εκ, ἀλλ᾽ ἡ δε τῇ εζ σύμμετρός ἐστι, καὶ ἡ εζ ἄρα τῇ εκ, σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ εκ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ελ, τουτέστι τὸ μρ, τουτέστι, τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ. αἱ μν νξ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν, ῥητόν. ἡ μξ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ αγ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



νθ

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

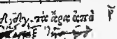
Χωρίον γὰρ τὸ αβ γδ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αβ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς αδ. διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ αε, λέγω ὅτι ἡ τὸ αγ δυναμένη,



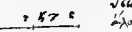
διῃρημένη, ἡ δύο μέσα διῃρημένη ἐστί. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδιειλεγμένοις, φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ αγ διῃρημένη ἐστὶν ἡ μξ. καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ μν, τῇ νξ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ εα τῇ αβ μήκει, αἱ εα αβ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ. πάλιν ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ εδ, τῇ αβ μήκει, ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ ζε τῇ εκ, καὶ αἱ ζε εκ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ελ τουτέστι, τὸ μξ τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ εα, τῇ εζ, καὶ τὸ ακ τῷ ελ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ακ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ. τὸ δὲ ελ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μν νξ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν μν νξ, τῷ ὑπὸ τῶν μν νξ. καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ μν νξ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἡ μξ ἄρα, δύο μέσα διῃρημένη ἐστί, καὶ δύναται τὸ αγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

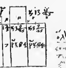
λῆμμα.

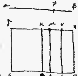
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα, μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου. Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ὑπὸ εἰς ἄνισα κατὰ τὸ γ. καὶ ἔστω μείζων ἡ αγ. λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ μείζονά ἐστι, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. τετμήσθω γὰρ ἡ αβ δίχα κατὰ τὸ δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αγ γβ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἔλαττον ἢ διπλάσιον, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αδ, δγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αγ γβ, μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ αβ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ γ. ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ αγ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ δε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον παρὰ τὴν δε παραβεβλήσθω, τὸ δε ζη, πλάτος ποιοῦν τὴν δη. λέγω ὅτι ἡ δη, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν δε τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον τὸ δθ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βγ, ἴσον τὸ κλ. λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ἴσον ἐστὶ τῷ μζ. τετμήσθω ἡ μη, δίχα κατὰ τὸ ν. καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ νξ ἑκατέρᾳ τῶν μλ ηζ. ἑκάτερον ἄρα τῶν μξ νζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ, ὑπὸ τῶν αγ γβ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ αβ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αγ γβ ῥητά εἰσι, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν αγ γβ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ. καί ἐστιν ἴσον, τῷ δλ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ δλ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δε παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ δμ, καὶ σύμμετρος τῇ δε μήκει. πάλιν ἐπεὶ αἱ αγ γβ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα ἐστὶ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, τουτέστι τὸ μζ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν μλ παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μη. καὶ ἀσύμμετρος τῇ μλ, τουτέστι τῇ δε μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ μδ ῥητὴ, καὶ τῇ δε μήκει σύμμετρος. [illegible] ἀσύμμετρος.



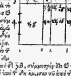




ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ δμ τῇ μη μήκει. καὶ εἰσὶ ῥηταὶ αἱ δμ μη ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη. δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, καὶ τῶν δθ κλ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ μξ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ δθ πρὸς τὸ μξ, οὕτως τὸ μξ, πρὸς τὸ κλ, τουτέστιν ὡς ἡ δκ πρὸς τὴν μν, ἡ μν πρὸς τὴν μκ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν δκ κμ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ δθ τῷ κλ ὥστε καὶ ἡ δκ τῇ κμ, σύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δλ τοῦ μζ ὥστε καὶ ἡ δμ τῆς μη, μείζων ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν δκ κμ τῷ ἀπὸ τῆς μν. τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς μη. καὶ σύμμετρος ἡ δκ τῇ κμ μήκει. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ εἰσὶ ῥηταὶ αἱ δμ μη. καὶ ἡ δμ μείζων ὄνομα οὖσα, σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ δε μήκει, ἡ δη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

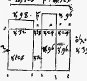
ξα

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης, παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἡ αβ διῃρημένη εἰς τὰ μέσα, κατὰ τὸ γ, ὧν μείζων ἡ αγ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ δε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν δε, τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ δζ, πλάτος ποιοῦν, τὴν δη, λέγω ὅτι ἡ δη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ ἄρα, μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσα ἐστί. μέσον ἄρα τὸ δλ. καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ μδ καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει. πάλιν ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ῥητόν καὶ τὸ μζ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν μλ παράκειται. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ μη, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ μλ τουτέστι, τῇ δε. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ δμ τῇ μη μήκει, καὶ εἰσὶ ῥηταὶ αἱ δμ μη ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δλ τοῦ μζ ὥστε καὶ ἡ δμ τῆς μη. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ δθ τῷ κλ. ὥστε καὶ ἡ δκ τῇ κμ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν δκ κμ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μν, ἡ δμ ἄρα τῆς μη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μη σύμμετρος τῇ δε μήκει. ἡ δη ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.



ξβ

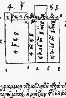
Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ αβ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ αγ, ῥητὴ δέ τις ἔστω, ἡ δε, καὶ παρὰ τὴν δε τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ δζ, πλάτος ποιοῦν τὴν δη, λέγω ὅτι ἡ δη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ αβ διῃρημένη κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δλ. μέσον ἄρα καὶ τὸ δλ. καὶ παράκειται



ῥητὴν παρὰ ῥητὴν τὴν δε, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μθ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ μη ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ μλ, τουτέστι τῇ δε μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν δμ μη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει, καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αγ τῇ γβ μήκει, ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ δλ, τῷ μζ. ὥστε ἡ δμ τῇ μη ἀσύμμετρός ἐστι, καὶ εἰσὶ ῥηταί. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη. δεικτέον δή, ὅτι καὶ τρίτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἡ δμ τῆς μη, καὶ σύμμετρος ἡ δκ τῇ κμ, καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν δκ κμ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μν· ἡ δμ ἄρα τῆς μη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν δμ μη σύμμετρός ἐστι τῇ δε μήκει. ἡ δη ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

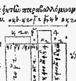
ξγ

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Ἔστω μείζων, ἡ αβ διῃρημένη κατὰ τὸ γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν αγ τῆς γβ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ δε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν δε παραβεβλήσθω, τὸ δζ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν δη, λέγω ὅτι ἡ δη, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αβ διῃρημένη κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον, ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ δλ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δμ. καὶ σύμμετρος τῇ δε μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, τουτέστι τὸ μζ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν μλ παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δμ, τῇ μη μήκει. αἱ δμ μη ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη, δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ δμ τῆς μη, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δκ κμ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μν. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ἀπὸ τῆς γβ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ δθ τῷ κλ. ὥστε καὶ ἡ δκ τῇ κμ, ἀσύμμετρός ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παραβληθῇ παρὰ τὴν μείζονα ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἡ δμ ἄρα τῆς μη μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ εἰσὶν αἱ δμ μη ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ δμ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ δε, ἡ δη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.



ξδ

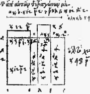
Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης, παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ αβ, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας, κατὰ τὸ γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν αγ. καὶ ἐκκείσθω ῥητή, ἡ δε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον παρὰ τὴν δε παραβεβλήσθω, τὸ δζ πλάτος, ποιοῦν τὴν δη, λέγω ὅτι ἡ δη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ αβ διῃρημένη κατὰ τὸ γ, αἱ αγ γβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν



αγ, γβ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ δλ. ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ δμ, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ δε. πάλιν ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τουτέστι τὸ μζ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μη, καὶ σύμμετρος τῇ δε μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ δμ τῇ μη. αἱ δμ, μη ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δν, νμ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς μη, καὶ ἀσύμμετρος ἡ δν τῇ νμ μήκει, ἡ δμ ἄρα τῆς μη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ δμ, μη ῥηταί, δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ μη σύμμετρος τῇ δε μήκει. ἡ δη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

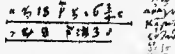
ξε

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ αβ, διῃρημένη κατὰ τὸ γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ δε, καὶ παρὰ τὴν δε τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ δζ, πλάτος ποιοῦν τὴν δη. λέγω ὅτι ἡ δη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διῃρημένη κατὰ τὸ γ, αἱ αγ, γβ ἄρα, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. καὶ ἔτι ἀσύμμετρον, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν. ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα, μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν δλ, μζ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δε παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν δμ, μη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δε μήκει, καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δλ τῷ μζ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ δμ τῇ μη. αἱ δμ, μη ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ δη. λέγω ὅτι καὶ ἕκτη. ὁμοίως γὰρ πάλιν δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν δν, νμ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μη, καὶ ὅτι ἡ δν τῇ νμ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ δμ τῆς μη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν δμ, μη σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ δε μήκει. ἡ δη ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.



ξς

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος, καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ αβ, καὶ τῇ αβ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ γδ, λέγω ὅτι ἡ γδ, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή, τῇ αβ. ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ αβ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ ε. καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ αε. αἱ αε, εβ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ αε πρὸς τὴν γζ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ εβ, πρὸς λοιπὴν τὴν ζδ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. σύμμετρος δὲ ἡ αβ τῇ γδ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν αε, τῇ γζ, ἡ δὲ εβ τῇ ζδ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ αε, εβ. ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ γζ, ζδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν γζ, ἡ εβ πρὸς τὴν ζδ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. αἱ δὲ αε, εβ, δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ γζ, ζδ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί εἰσι ῥηταί. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ γδ. λέγω

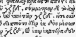


δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ αβ, ἡ γὰρ αε τῆς εβ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ αε τῆς εβ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ γζ τῆς ζδ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ γζ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται. καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή, εἰ δὲ ἡ εβ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ζδ, σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ αβ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν αε, εβ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν γζ, ζδ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται. καὶ ἔστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ αε τῆς εβ μεῖζον δυνήσεται

δύναται τοῦ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ γζ τῆς ζδ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ εἰ μὲν ἡ αε σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ γζ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ εβ, καὶ ἡ ζδ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν αε εβ, καὶ τῶν γζ ζδ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη. ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

ξζ

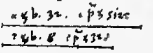
Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος, ἐκ δύο μέσων ἐστί, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ γδ, λέγω ὅτι ἡ γδ ἐκ δύο μέσων ἐστί, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ αβ. ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ αβ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ ε, αἱ αε εβ ἄρα μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, ἡ αε πρὸς τὴν γζ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ εβ πρὸς λοιπὴν τὴν ζδ ἐστὶν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. σύμμετρος δὲ ἡ αβ τῇ γδ μήκει. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν αε τῇ γζ, ἡ δὲ εβ τῇ ζδ. καὶ εἰσὶ μέσαι αἱ αε εβ, μέσαι ἄρα καὶ αἱ γζ ζδ, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ, αἱ δὲ αε εβ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ γζ ζδ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι.



ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι. ἡ γδ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ αβ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γζ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γζ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε τῷ ἀπὸ τῆς γζ. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ τῷ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, καὶ τὸ ὑπὸ γζ ζδ ῥητόν ἐστι. καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν αε εβ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γζ ζδ, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα δευτέρα. καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ γδ τῇ αβ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξη

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος, καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἔστω ἡ γδ. λέγω ὅτι καὶ ἡ γδ μείζων ἐστί. διῃρήσθω ἡ αβ κατὰ τὸ ε. αἱ αε εβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἥ τε αε πρὸς τὴν γζ, καὶ ἡ εβ πρὸς τὴν ζδ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν ζδ. σύμμετρος δὲ ἡ αβ τῇ γδ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν αε εβ ἑκατέρᾳ τῶν γζ ζδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν ζδ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς ζδ. καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν δζ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς



γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γζ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αε εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γζ ζδ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν αε εβ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γζ ζδ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς γδ, σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αε εβ τοῖς ἀπὸ τῶν γζ ζδ. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν αε εβ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γζ ζδ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αε εβ, σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν γζ ζδ. καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αε εβ, μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν γζ ζδ. αἱ γζ ζδ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅλη ἄρα ἡ γδ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος, μείζων ἐστίν.

ξθ.

Η τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος, καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἔστω, ἡ γδ, δεικτέον ὅτι καὶ ἡ γδ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί, διῃρήσθω ἡ αβ εἰς τὰς εὐθείας, κατὰ τὸ ε. αἱ αε εβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω, τοῖς πρότερον ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ γζ ζδ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε εβ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ, τὸ δὲ ὑπὸ αε εβ τῷ ὑπὸ γζ ζδ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ τετραγώνων, ἐστὶ μέσον. τὸ δ' ὑπὸ τῶν γζ ζδ ῥητόν. ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ γδ.

ξθ

α κβ.ψξο ρ.δ. ε
γ κβ.κς. ρε.ι. δ

ο.

Η τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος, δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἡ γδ, δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἡ γδ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ αβ, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ ε. αἱ αε εβ ἄρα, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν αε εβ τετραγώνων, τῷ ὑπὸ τῶν αε εβ, καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ γζ ζδ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε εβ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αε εβ, τῷ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ τετραγώνων μέσον ἐστί. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γζ ζδ, μέσον. καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. ἡ γδ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

ο

α κβ.κψη ρ.ζ.λγ. ε
γ κβ.κγ ρ.ζ.κ. δ

Σχόλιον. [illegible]

εξ Ἐπτά εἰσιν ἑξάδες, ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων, ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν, ἡ δὲ δευτέρα, τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται ἡ δὲ τρίτη. τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης. ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξάς, τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, ᾗ διαφέρουσι πρὸς ἀλλήλας. γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἐξ ἀλόγων, πέμπτην καὶ ἕκτην [illegible]. δείκνυσιν ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ, τὰς παραβολὰς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, ὅτι αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσι. πάλιν ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν, ἀναφαίνεται δὲ, καὶ ἤδη τῶν ἀλόγων τούτων, ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον. καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἰασδήποτε ἀλόγου, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν, ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον. καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί. κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι αβ καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ γ. φανερὸν ὅτι ἡ αγ τῆς γβ ἐστὶ μείζων. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αγ τῇ γβ ἴση ἡ αδ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ γδ κατὰ τὸ ε, φανερὸν ὅτι ἡ αε τῇ εβ ἐστὶν ἴση. κείσθω ἑτέρα αὐτῇ ἴση ἡ ζη. φανερὸν δὴ ὅτι ᾗ διαφέρει ἡ αγ τῆς ζη, τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ εβ τῆς γβ. ἡ μὲν γὰρ αγ τῆς ζη, τῇ δε, [illegible] καὶ ἡ ζη τῆς γβ. ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ζη σύμμετρός ἐστι τῇ αβ. τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστὶν ἴση. ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ὁμοίως δειχθήσεται, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

οα.

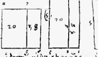
Habet alterũ exẽplar ἕτε καὶ ἡ conιunctι ne, sed perinde est.

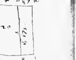
Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται,* ἢ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ αβ, μέσον δὲ τὸ γδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αδ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. τὸ γὰρ αβ τοῦ γδ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον, ἔστω πρότερον μεῖζον. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ, καὶ παραβεβλήσθω

θω παρὰ τὴν εζ τῷ αβ ἴσον, τὸ εκ, πλάτος ποιοῦν τὴν εθ. τῷ δὲ δγ ἴσον παρὰ τὴν εζ, τουτέστι τὴν θκ, παραβεβλήσθω τὸ θι, πλάτος ποιοῦν τὴν θκ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ αβ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ εκ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ εκ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν εθ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εθ καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον τὸ δγ καὶ ἔστιν ἴσον τῷ θι, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ θι, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, τουτέστι τὴν θκ, πλάτος ποιοῦν τὴν θκ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ θκ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ γδ, ῥητὸν δὲ τὸ αβ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβ τῷ γδ. ὥστε καὶ τὸ εκ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ θι, ὡς δὲ τὸ εκ πρὸς τὸ θι, οὕτως ἐστὶν ἡ εθ πρὸς τὴν θκ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εθ τῇ θκ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ εθ θκ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ εκ, διῃρημένη κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ αβ τοῦ γδ, ἴσον δὲ τὸ μὲν αβ τῷ εκ, τὸ δὲ γδ τῷ θι, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ εκ τοῦ θι, καὶ ἡ εθ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς θκ. ἤτοι οὖν ἡ εθ τῆς θκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν μείζων ἡ θε, σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ εζ. ἡ ἄρα εκ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ εζ, ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ει δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ τὸ αδ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

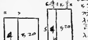
οα.

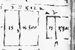




ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ εθ τῆς θκ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μείζων ἡ εθ, σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ εζ μήκει. ἡ ἄρα εκ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ εζ, ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων, ἡ ἄρα τὸ ει χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ τὸ αδ δυναμένη, μείζων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ αβ τοῦ γδ. καὶ τὸ εκ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ θι. ὥστε καὶ ἡ εθ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς θκ. ἤτοι δὲ ἡ θκ τῆς εθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ἐλάσσων ἡ εθ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ εζ μήκει, ἡ ἄρα εκ, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἡ εζ, ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ει χωρίον δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ὥστε καὶ ἡ τὸ αδ χωρίον δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ θκ τῆς θε μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ εθ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ εζ, ἡ ἄρα εκ, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ εζ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ει χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ τὸ αδ χωρίον δυναμένη, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται. ἤτε ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Vel ἤτε ἐκ δύο ut supra.



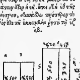


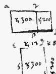
οβ.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ αβ γδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αδ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη. τὸ γὰρ αβ τοῦ γδ, ἤτοι μεῖζον ἐστίν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ αβ, τοῦ γδ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ, καὶ τῷ μὲν αβ, ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω τὸ εη, πλάτος ποιοῦν τὴν εθ. τῷ δὲ γδ ἴσον τὸ θι, πλάτος ποιοῦν τὴν θκ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν αβ γδ, μέσον ἄρα, καὶ ἑκάτερον

τέρου τῷ ἐκ̄ ὑπὸ τῶν ἐβ̄ καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ἐζ̄ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὰς ἐθ̄ θκ̄, ἑκατέρα ἄρα τῶν ἐθ̄ θκ̄ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ἐζ̄ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀβ̄ τῷ γδ̄, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀβ̄ τῷ ἐῑ, τὸ δὲ γδ̄ τῷ θῑ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἐῑ τῷ θῑ. ὡς δὲ τὸ ἐῑ πρὸς τὸ θῑ, οὕτως ἐστὶν ἡ ἐθ̄ πρὸς τὴν θκ̄, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ἐθ̄, τῇ θκ̄ μήκει. αἱ ἐθ̄ θκ̄ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ἐκ̄. ἤτοι δὲ ἡ ἐθ̄ τῆς θκ̄ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ἐθ̄ θκ̄ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ἐζ̄ μήκει, ἡ ἐκ̄ ἄρα, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ γὰρ ἡ ζε̄. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἡ ἄρα τὸ ἐῑ, τουτέστι τὸ ἀδ̄ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ἐθ̄ τῆς θκ̄ μεῖζον δυνάσθω, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἐθ̄ θκ̄, τῇ ἐζ̄ μήκει, ἡ ἄρα ἐκ̄ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ὥστε ἡ τὸ ἀδ̄ χωρίον δυναμένη, δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ἀβ̄ τοῦ γδ̄, ἡ τὸ ἀδ̄ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστίν, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.





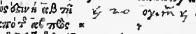
Alteri exemplar habebat hic tituli λήμμα

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι, οὔτε τῇ μέσῃ, οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον, τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης, παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.
Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

Δευτέρα τάξις ἑτερωνύμων, τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν.

Ἀρχὴ τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν ἑξάδων. ογ.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἀποτομή. Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς ἀβ̄, ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ βγ̄, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ̄ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ἀβ̄ τῇ βγ̄ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ἀβ̄ πρὸς βγ̄, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ἀβ̄ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἀβ̄ τῷ ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ἀβ̄, σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄, ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄. καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς αγ̄, ἀσύμμετρά ἐστι, τὰ ἀπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γα̅. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ἀβ̄ βγ̄. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ̄, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

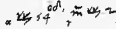


οδ.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης

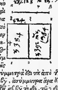
της ἀποτομὴ πρώτη. Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς αβ μέση ἀφῃρήσθω ἡ βγ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ αβ, μετὰ δὲ τῆς αβ ῥητὸν ποιοῦσα, τὸ ὑπὸ αβ βγ, λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ, ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ βγ μέσαι εἰσί, μέσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς αγ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ἄλογος ἄρα ἡ αγ, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

οδ.



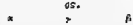
οε.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα. Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς αβ, μέση ἀφῃρήσθω ἡ βγ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, τῇ αβ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς αβ μέσον περιέχουσα, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ, ἡ δι. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ ἴσον παρὰ τὴν δι παραβεβλήσθω τὸ δε, πλάτος ποιοῦν, τὴν δη. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον παρὰ τὴν δι παραβεβλήσθω τὸ δθ πλάτος ποιοῦν, τὴν δζ. λοιπὸν ἄρα τὸ ζε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, μέσον ἄρα καὶ τὸ δε. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δι παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν δη, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ δη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δι μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δθ, καὶ τὸ δθ ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δι παραβέβληται πλάτος ποιοῦν, τὴν δζ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ δζ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δι μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ βγ δυνάμει μόνον σύμμετροι εἰσίν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ βγ μήκει. ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τῷ ὑπὸ τῶν αβ βγ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βγ σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ τὸ δε. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ τὸ δθ. ἀσύμμετρον ἄρα τὸ δε τῷ δθ ὡς δὲ τὸ δε πρὸς τὸ δθ, οὕτως ἡ ηδ πρὸς τὴν δζ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ηδ τῇ δζ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα ηδ δζ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ ζη ἄρα, ἀποτομή ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ δι. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι. καὶ ἡ δυναμένη ἄρα αὐτὸ, ἄλογος ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ζε, ἡ αγ, ἡ αγ ἄρα, ἄλογος ἐστὶ, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.



ος.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα, τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων. Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς αβ, εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ βγ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς αβ, τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ, ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ἅμα μέσον, λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. καὶ ἀναστρέψαντι, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αγ. ἄλογος ἄρα ἡ αγ, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

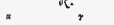


οζ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μετὰ

ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς αβ, εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ βγ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ αβ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν. λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ, ἄλογός ἐστι. καλεῖται δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων, μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἀσύμμετρόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ῥητόν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, ἄλογόν ἐστιν. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

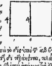
οζ.



οη.

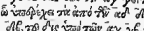
Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα, ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ, ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου, μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς αβ, εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ βγ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ αβ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ ἀσύμμετρα, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ αγ, ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου, μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ, ἡ δι. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αβ βγ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν δι παραβεβλήσθω, τὸ δε, πλάτος ποιοῦν, τὴν δη. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ δθ, πλάτος ποιοῦν τὴν δζ. λοιπὸν ἄρα τὸ ζε, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε ἡ αγ δύναται τὸ ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αβ βγ τετραγώνων, μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δε, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δε. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δι παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν δη, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ δη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δι μήκει. πάλιν ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δθ. τὸ ἄρα δθ, μέσον ἐστὶν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν δι παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν δζ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ δζ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ δι μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ δε τῷ δθ. ὡς δὲ τὸ δε, πρὸς τὸ δθ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ δη πρὸς τὴν δζ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ δη τῇ δζ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ηδ δζ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζη. ῥητὴ δὲ ἡ ζθ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι. καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ, ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ζε ἡ αγ, ἡ αγ ἄρα, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου, μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



οθ.

Τῇ ἀποτομῇ, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ αβ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ βγ, αἱ αγ γβ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι τῇ αβ, ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ βδ. αἱ αδ δβ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀμφότερα ὑπερέχει. ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν αδ δβ, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ὑπερέχει ῥητῷ. ῥητὰ γὰρ ἑκάτερα. καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα. μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. τῇ ἄρα αβ, ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.



Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μόνον μία προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης, ῥητὸν περιέχουσα.

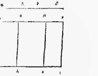
Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἡ αβ, καὶ τῇ αβ προσαρμοζέτω ἡ βγ. αἱ ἄρα αγ γβ μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. λέγω ὅτι τῇ αβ, ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ δβ. αἱ ἄρα αδ δβ μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι, τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ. ἐπεὶ οὖν ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ (τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς αβ). ἐναλλὰξ ἄρα ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. μέσα γάρ ἀμφότερα. μέσον δὲ μέσου, οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης, ῥητὸν περιέχουσα.



πα.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἡ αβ, καὶ τῇ αβ προσαρμοζέτω ἡ βγ, αἱ ἄρα αγ γβ, μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, λέγω ὅτι τῇ αβ, ἑτέρα οὐ προσαρμόζει [illegible] μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. εἰ γὰρ δυνατόν προσαρμοζέτω ἡ βδ. αἱ αδ δβ ἄρα μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι, τὸ ὑπὸ τῶν αδ δβ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αγ γβ ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω τὸ εκ, πλάτος ποιοῦν τὴν εμ. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ θκ πλάτος ποιοῦν, τὴν θμ, λοιπὸν ἄρα τὸ ελ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ. ὥστε ἡ αβ, δύναται τὸ ελ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ δβ, ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω, τὸ ει, πλάτος ποιοῦν, τὴν εν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ελ ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς αβ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ θι. ἴσον ἐστί, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ αγ γβ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ. καὶ ἔστιν ἴσα, τῷ εκ. μέσον ἄρα καὶ τὸ εκ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν εμ ῥητὴ ἄρα ἐστίν, ἡ εμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ θκ, καὶ τὸ θκ ἄρα, μέσον ἐστί. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν θμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ θμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ αγ γβ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ μήκει. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αγ σύμμετρά ἐστι, τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αγ γβ σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστί, τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αγ γβ ἴσον τὸ εκ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ἴσον, τὸ θκ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστί, τὸ εκ, τῷ θκ. ὡς δὲ τὸ εκ, πρὸς τὸ θκ, οὕτως ἐστὶν ἡ εμ πρὸς τὴν θμ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ εμ, τῇ θμ, μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί, αἱ εμ θμ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εθ. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ, ἡ θμ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ θν αὐτῇ προσαρμόζει. τῇ ἄρα ἀποτομῇ, ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ,



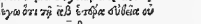
μετὰ

μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

πβ.

ΤΗ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης, τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. Ἔστω ἐλάσσων, ἡ αβ, καὶ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ βγ. αἱ ἄρα αγ γβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, λέγω ὅτι τῇ αβ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ βδ. αἱ αδ δβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ μὲν ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα ἅμα ῥητὸν. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ. ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα. καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. μέσα γὰρ ἀμφότερα. τῇ ἄρα ἐλάσσονι, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, καὶ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, μέσον.

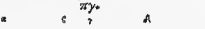
πβ.



πγ.

ΤΗ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ αβ. προσαρμόζουσα δὲ, ἡ βγ. αἱ ἄρα αγ γβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ τετραγώνων, μέσον. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ῥητόν. λέγω ὅτι τῇ αβ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ βδ. καὶ αἱ αδ δβ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αδ δβ τετραγώνων, μέσον.

πγ.



τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ, τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ, ἀκολούθως τῷ πρὸ αὐτοῦ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ. ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν αγ γβ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. μέσα γὰρ ἀμφότερα. οὐκ ἄρα τῇ αβ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ, μία μόνον προσαρμόσει.

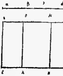
πδ.

ΤΗ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ, μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον, τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν, τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, ἡ αβ. προσαρμόζουσα δὲ ἡ βγ. αἱ ἄρα αγ γβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν αγ γβ τετράγωνα, ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ. λέγω ὅτι τῇ αβ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ βδ. ὥστε καὶ τὰς αδ δβ, δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶν, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν αδ δβ τετράγωνα ἅμα μέσον. καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ, μέσον. καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν αδ δβ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αδ δβ καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ εζ. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ αγ γβ ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω, τὸ εη, πλάτος ποιοῦν, τὴν εμ. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αγ γβ ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ θη, πλάτος ποιοῦν, τὴν θμ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ελ. ἡ ἄρα αβ,

δυνάμει

δύναται τὸ ελ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῶν αδ, δβ ἴσον παρὰ τὴν εζ παραβεβλήσθω, τὸ ει, πλάτος ποιοῦν τὴν ελ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον τῷ ελ. λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αδ, δβ ἴσον ἐστὶ τῷ θι. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γβ, καί ἐστιν ἴσον τῷ εη, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ εη. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν εμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ καὶ ἴσον τὸ θη, μέσον ἄρα καὶ τὸ θη. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται πλάτος ποιοῦν, τὴν θμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ θμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ εζ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αγ, γβ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ εη, τῷ θη. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ εμ τῇ μθ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ εμ, μθ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εθ. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ, ἡ θμ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ εθ πάλιν ἀποτομή ἐστι. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ, ἡ θν. τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητή, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ αβ, ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα. τῇ ἄρα αβ, μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα, μέσον, ἔτι τε τὸ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν.

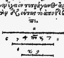


Ὅροι τρίτοι.

Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη. Πάλιν ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

πε.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ α, καὶ τῇ α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ βη. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βη, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ δε, εζ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ δζ μὴ ἔστω τετράγωνος. οὐδὲ ἄρα ὁ εδ πρὸς τὸν δζ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ εδ πρὸς τὸν δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βη τῷ ἀπὸ τῆς ηγ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βη. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηγ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ηγ. καὶ ἐπεὶ ὁ εδ πρὸς τὸν δζ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ηβ, τῇ βγ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ βη, ηγ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ ἄρα βγ ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βη τοῦ ἀπὸ τῆς ηγ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ δε πρὸς τὸν δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ. καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ δε πρὸς τὸν εζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ δε πρὸς τὸν εζ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἑκάτερος γὰρ τετράγωνος. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηβ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ηβ τῆς ηγ μεῖζον, ἡ βη ἄρα τῆς ηγ μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ βη σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ α, μήκει. ἡ βγ ἄρα, ἀποτομή ἐστι πρώτη. εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

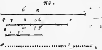


Εὑρεῖν

πε.

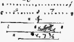
ΕΥρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν. Ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ α, καὶ τῇ α σύμμετρος μήκει, ἡ γη. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γη. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ δε εζ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ δζ, μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ζδ πρὸς τὸν δε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γη τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηβ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γη, τῷ ἀπὸ τῆς ηβ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γη. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηβ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηβ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηγ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηβ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ γη τῇ ηβ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ γη ηβ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ βγ ἄρα, ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα, ᾧ γὰρ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βη τοῦ ἀπὸ τῆς ηγ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γη, οὕτως ὁ δε ἀριθμὸς πρὸς τὸν δζ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ, οὕτως ὁ εδ πρὸς τὸν εζ. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν δε εζ τετράγωνος, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ θ μήκει. καὶ δύναται ἡ βη τῆς ηγ μεῖζον, τῷ ἀπὸ τῆς θ. ἡ βη ἄρα τῆς ηγ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ γη σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ α μήκει. ἡ βγ ἄρα, ἀποτομή ἐστι δευτέρα. εὕρηται ἄρα ἀποτομὴ ἡ βγ.

πε.



πζ.

ΕΥρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν. Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ε βγ γδ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ βγ πρὸς τὸν βδ λόγον ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ ε πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη τετράγωνον. ὡς δὲ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ ε πρὸς τὸν βγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α, τῇ ζη μήκει. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ βγ πρὸς γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη, τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὸν ἄρα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη τῇ ηθ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ζη ηθ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζθ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ ε πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, ὡς δὲ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ὁ δὲ ε πρὸς τὸν γδ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ α τῇ ηθ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ζη ηθ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ α. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ζη τοῦ ἀπὸ τῆς ηθ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς κ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ γβ πρὸς τὸν βδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ. ὁ δὲ γβ πρὸς τὸν βδ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη τῇ κ μήκει. καὶ δύναται

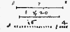


ἡ ζη

ἡ ζη τῆς ηθ μεῖζον, τῷ ἀπὸ τῆς κ, ἡ ἄρα ζη τῆς ηθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ζη ηθ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ α μήκει, ἡ ζθ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη. εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή, ἡ ζθ.

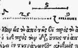
πη.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ α, καὶ τῇ α μήκει σύμμετρος ἡ βη, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ βη, καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ δζ ζε, ὥστε τὸν δε ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν δζ εζ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ δε, πρὸς τὸν εζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βη τῷ ἀπὸ τῆς ηγ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βη. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηγ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηγ. καὶ ἐπεὶ ὁ δε πρὸς τὸν εζ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ ηγ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ βη ηγ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ βγ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ οὖν μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς βη τοῦ ἀπὸ τῆς ηγ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ δε πρὸς τὸν εζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ δε πρὸς τὸν δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ηβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ εδ πρὸς τὸν δζ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ηβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ηβ τῆς ηγ μεῖζον, τῷ ἀπὸ τῆς θ. ἡ ἄρα βη τῆς ηγ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ὅλη ἡ βη σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ α. ἡ βγ ἄρα ἀποτομή ἐστι τετάρτη. εὕρηται ἄρα ἡ βγ τετάρτη ἀποτομή.



πθ.

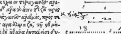
Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν. Ἐκκείσθω ῥητὴ, ἡ α, καὶ τῇ α σύμμετρος ἔστω ἡ γη, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γη. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ δζ ζε, ὥστε τὸν δε πρὸς ἑκάτερον τῶν δζ ζε λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ζε, πρὸς τὸν εδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηβ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶν τὸ ἀπὸ τῆς γη, τῷ ἀπὸ τῆς βη. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γη. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηβ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ, καὶ ἡ βη. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ δε πρὸς τὸν εζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ, ὁ δὲ δε πρὸς τὸν εζ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ, λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ ηγ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ βη ηγ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ βγ ἄρα ἀποτομή ἐστι, λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βη τοῦ ἀπὸ τῆς ηγ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηγ, οὕτως ὁ δε πρὸς τὸν εζ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ εδ πρὸς τὸν δζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ. ὁ δὲ εδ πρὸς τὸν δζ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ηβ τῆς ηγ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς θ. ἡ βη ἄρα τῆς ηγ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ γη σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ α μήκει. ἡ ἄρα βγ ἀποτομή ἐστι πέμπτη. εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομή, ἡ βγ.



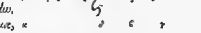
ϟ.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν. Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ α, καὶ τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ε βγ γδ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ ε πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, ὡς δὲ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ε πρὸς τὸν βγ, οὕ-

τως τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α, τῷ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζη. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ὁ ε πρὸς τὸν βγ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη. λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α τῇ ηζ μήκει. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ηζ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηθ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ζη ηθ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ ἄρα ζθ ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ ε πρὸς τὸν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζη, ὡς δὲ ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ. ὁ δὲ ε πρὸς τὸν γδ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ α τῇ ηθ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ζη ηθ σύμμετρός ἐστι τῇ α ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ζη, τοῦ ἀπὸ τῆς ηθ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ βγ πρὸς τὸν γδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ηθ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ γβ πρὸς τὸν βδ. οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζη, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ. ὁ δὲ γβ, πρὸς τὸν βδ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζη πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ κ μήκει καὶ δύναται ἡ ζη τῆς ηθ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς κ. ἡ ζη ἄρα τῆς ηθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ζη ηθ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ α. ἡ ἄρα ζθ, ἀποτομή ἐστιν ἕκτη. εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομή, ἡ ζθ.



Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. καὶ δή, ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη, ἡ αγ, ἧς μεῖζον ὄνομα, ἡ αβ, καὶ τῇ βγ ἴση κείσθω ἡ βδ. αἱ αβ βγ ἄρα, τουτέστιν αἱ αβ βδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ αβ τῆς βγ, τουτέστι τῆς βδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ καὶ ἡ αβ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αδ πρώτη. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.

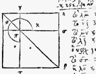


ϟα.

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἀποτομή ἐστιν. Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ αβ ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ, καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς αδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ αδ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα, ἡ δη. αἱ αη ηδ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ὅλη ἡ αη, σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ αγ. καὶ ἡ αη τῆς ηδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς δη ἴσον παρὰ τὴν αη παραλληλόγραμμον παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ, τῇ ζη. καὶ διὰ τῶν ε ζ η σημείων τῇ αγ παράλληλοι ἤχθωσαν, αἱ εθ ζι ηκ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αζ τῇ ζη μήκει, καὶ ἡ αη ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν αζ ζη, σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ αη σύμμετρός ἐστι τῇ αγ, καὶ ἑκατέρα



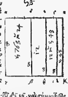
ἑκατέρα ἄρα τῶν αζ ζη σύμμετρός ἐστι τῇ αγ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ αγ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν αζ ζη. ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν αι ζκ ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ δε τῇ εη μήκει, καὶ ἡ δη ἄρα ἑκατέρα τῶν δε εη, σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ δη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν δε εη καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. ἑκάτερον ἄρα τῶν δθ εκ μέσον ἐστί. κείσθω δὴ τῷ μὲν αι ἴσον τετράγωνον, τὸ λμ, τῷ δὲ ζκ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ λομ, τὸ νξ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ λμ νξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος, ἡ ορ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἡ εη πρὸς τὴν ζη, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως τὸ αι πρὸς τὸ εκ, ὡς δὲ ἡ εη πρὸς τὴν ζη, οὕτως τὸ εκ πρὸς τὸ κζ. τῶν ἄρα αι κζ μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ εκ. ἔστι δὲ καὶ τῶν λμ νξ μέσον ἀνάλογον, τὸ μν. ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἔστι τὸ αι τῷ λμ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ κζ τῷ νξ. καὶ τὸ μν ἄρα τῷ εκ ἴσον ἐστὶν, ἀλλὰ τὸ μὲν εκ τῷ δθ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ μν, τῷ λξ, καὶ τὸ δκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ακ, ἴσον τοῖς λμ νξ τετραγώνοις. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ αβ ἴσον ἐστὶ τῷ στ, τὸ δὲ στ τὸ ἀπὸ τῆς λν ἐστὶ τετράγωνον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λν τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ αβ. ἡ λν ἄρα δύναται τὸ αβ. λέγω δὴ ὅτι ἡ λν ἀποτομή ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν αι ζκ, καὶ ἔστιν ἴσα τῶν λμ νξ, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν λμ νξ ῥητόν ἐστι. τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν λο ον. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν λο ον ῥητή ἐστι. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δθ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ λξ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ λξ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν λξ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ νξ ῥητὸν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ λξ τῷ νξ. ὡς δὲ τὸ λξ πρὸς τὸ νξ, οὕτως ἐστὶν ἡ λο πρὸς τὴν ον. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ λο τῇ ον μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ λο ον ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ λν. καὶ δύναται τὸ αβ χωρίον. ἡ ἄρα τὸ αβ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

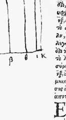


ϟα

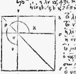
ϟβ

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. Χωρίον γὰρ τὸ αβ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, τῆς αδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ἔστω γὰρ τῇ αδ προσαρμόζουσα ἡ δη. αἱ ἄρα αη ηδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ δη σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ αγ. ἡ δὲ αη ὅλη τῆς προσαρμοζούσης τῆς ηδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ αη τῆς ηδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ηδ ἴσον παρὰ τὴν αη παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζη μήκει καὶ διὰ τῶν ε ζ η σημείων τῇ αγ παράλληλοι ἤχθωσαν, αἱ εθ ζι ηκ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αζ τῇ ζη μήκει, καὶ ἡ αη ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν αζ ζη σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ αη καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν αζ ζη, ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. ἑκάτερον ἄρα τῶν αι ζκ μέσον ἐστί. πάλιν ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ δε, τῇ εη, καὶ ἡ δη ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν δε εη, σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ δη, σύμμετρός ἐστι τῇ αγ μήκει, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν δε εη. καὶ σύμμετρος τῇ αγ μήκει. ἑκάτερον ἄρα τῶν δθ εκ ῥητόν ἐστι. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν αι ἴσον τετράγωνον τὸ λμ. τῷ δὲ ζκ ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ νξ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ λμ, τὴν ὑπὸ λομ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ λμ νξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος, ἡ ορ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ αι ζκ μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσα



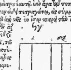


τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν λο ον ἄρα μέσα ἐστί. καὶ αἱ λο ον ἄρα, μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἡ εη πρὸς τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως τὸ αι πρὸς τὸ εκ. ὡς δὲ ἡ εη πρὸς τὴν ηζ, οὕτως ἐστὶ τὸ εκ, πρὸς τὸ ζκ, τῶν ἄρα αι ζκ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ εκ. ἔστι δὲ καὶ τῶν λμ νξ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ μν. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν αι τῷ λμ, τὸ δὲ κζ τῷ νξ. καὶ τὸ μν ἄρα, ἴσον ἐστὶ τῷ εκ. ἀλλὰ τῷ μὲν εκ ἴσον ἐστὶ τὸ δθ, τῷ δὲ μν ἴσον τὸ λξ. ὅλον ἄρα τὸ δκ ἴσον ἐστὶ τῷ υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ακ ἴσον ἐστὶ τοῖς λμ νξ, ὧν τὸ δκ ἴσον ἐστὶ τῷ υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ. λοιπὸν ἄρα τὸ αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ στ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς λν, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λν, ἴσον ἐστὶ τῷ αβ χωρίῳ. ἡ λν ἄρα δύναται τὸ αβ χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ λν, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ εκ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μν τουτέστι τῷ λξ, ῥητὸν ἄρα τὸ λξ. τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν λο ον. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ νξ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ λξ τῷ νξ. καὶ ὡς ἄρα τὸ λξ πρὸς τὸ νξ, οὕτως ἐστὶν ἡ λο πρὸς τὴν ον. αἱ λο ον ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα λο ον μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. ἡ λν ἄρα, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ αβ χωρίον. ἡ ἄρα τὸ αβ χωρίον δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.



ϟγ

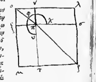
ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Χωρίον γὰρ τὸ αβ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ καὶ ἀποτομῆς τρίτης, τῆς αδ. λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ἔστω γὰρ τῇ αδ προσαρμόζουσα ἡ δη. αἱ αη ηδ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ οὐδετέρα τῶν αη ηδ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ αγ. ἡ δὲ ὅλη ἡ αη τῆς προσαρμοζούσης τῆς δη, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ αη τῆς ηδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τῆς δη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν εζη σημείων τῇ αγ παράλληλοι, αἱ εθ ζι ηκ. σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ αζ ζη. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ αι, τῷ ζκ. καὶ ἐπεὶ αἱ αζ ζη σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ αη ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν αζ ζη σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ αη, καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν αζ ζη ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ αγ μήκει. καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν αι ζκ, μέσον ἐστί. πάλιν ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ δε τῇ εη μήκει, καὶ ἡ δη ἄρα, ἑκατέρᾳ τῶν δε εη σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ηδ καὶ ἀσύμμετρος, τῇ αγ μήκει. ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν δε εη, καὶ ἀσύμμετρος, τῇ αγ μήκει. ἑκάτερον ἄρα τῶν δθ εκ, μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ αἱ αη ηδ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ αη τῇ ηδ. ἀλλὰ ἡ μὲν αη τῇ αζ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἡ δὲ δη, τῇ ηε. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ, τῇ εη μήκει. ὡς δὲ ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἐστὶ τὸ αι πρὸς τὸ εκ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αι, τῷ εκ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν αι, ἴσον τετράγωνον, τὸ λμ. τῷ δὲ ζκ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ νξ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ λμ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι, τὰ λμ νξ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος, ἡ ορ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη, ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν ζη. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἐστὶ τὸ αι, πρὸς τὸ εκ. ὡς δὲ ἡ εη πρὸς τὴν ηζ, οὕτως τὸ εκ, πρὸς τὸ ζκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ αι πρὸς τὸ εκ, οὕτως τὸ εκ, πρὸς τὸ ζκ. τῶν ἄρα αι ζκ, μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ εκ. ἔστι δὲ καὶ τῶν λμ νξ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον, τὸ μν, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν αι, τῷ λμ, τὸ δὲ ζκ τῷ νξ.

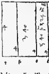


καὶ τὸ εκ ἄρα, ἴσον ἐστὶ τῷ μν. ἀλλὰ τὸ μὲν μν ἴσον ἐστὶ, τῷ λξ, τὸ δὲ εκ, ἴσον τῷ δθ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ δκ ἴσον ἐστὶ τῷ τε υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ακ, ἴσον τοῖς λμ νξ. λοιπὸν ἄρα τὸ αβ ἴσον ἐστὶ τῷ στ. τουτέστι, τῷ ἀπὸ τῆς λν τετραγώνῳ. ἡ λν ἄρα δύναται τὸ αβ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ λν, μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ αι ζκ, καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν λο ον. μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν λο ον, καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ αι τῷ ζκ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λο, τῷ ἀπὸ τῆς ον, πάλιν ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ αι τῷ εκ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ λμ τῷ μν. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς λο τῷ ὑπὸ τῶν λο ον. ὥστε καὶ ἡ λο ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ον. αἱ λο ον ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ εκ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν λο ον, μέσον ἄρα ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν λο ον. ὥστε καὶ αἱ λο ον μέσαι εἰσὶ, δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ λν ἄρα, μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα, καὶ δύναται τὸ αβ. ἡ ἄρα τὸ αβ χωρίον δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

ϟδ.

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἐλάσσων ἐστί. Χωρίον γὰρ τὸ αβ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ, καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς αδ. λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ἔστω γὰρ τῇ αδ προσαρμόζουσα, ἡ δη. αἱ ἄρα αη ηδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ αη σύμμετρός ἐστι, τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ αγ μήκει. ἡ δὲ ὅλη ἡ αη τῆς προσαρμοζούσης τῆς δη, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ αη τῆς ηδ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς δη, ἴσον παρὰ τὴν αη παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζη μήκει. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν εζη παράλληλοι ταῖς αγ βδ, αἱ εθ ζι ηκ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ αη, καὶ σύμμετρος τῇ αγ μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ακ. πάλιν ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ δη, τῇ αγ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δκ. πάλιν ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αζ τῇ ζη μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ αι τῷ ζκ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν αι ἴσον τετράγωνον τὸ λμ, τῷ δὲ ζκ ἴσον ἀφῃρήσθω, τὸ νξ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν, τῷ λμ, τὴν ὑπὸ λομ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι, τὰ λμ νξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος, ἡ ορ. καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν ηζ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ αζ πρὸς τὴν εη, οὕτως ἐστὶ τὸ αι πρὸς τὸ εκ, ὡς δὲ ἡ εη πρὸς τὴν ζη, οὕτως τὸ εκ, πρὸς τὸ ζκ. τῶν ἄρα αι ζκ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ εκ. ἔστι δὲ καὶ τῶν λμ νξ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ μν, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν αι τῷ λμ, τὸ δὲ ζκ τῷ νξ. καὶ τὸ εκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ μν. ἀλλὰ τῷ μὲν εκ ἴσον ἐστὶ, τὸ δθ. τὸ δὲ μν ἴσον ἐστὶ τῷ λξ. ὅλον ἄρα τὸ δκ ἴσον ἐστὶ, τῷ υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ακ ἴσον ἐστὶ τοῖς λμ νξ τετραγώνοις, ὧν τὸ δκ ἴσον ἐστὶ τῷ υφχ γνώμονι, καὶ τῷ νξ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ αβ ἴσον ἐστὶ τῷ στ. τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς λν τετραγώνῳ. ἡ λν ἄρα δύναται τὸ αβ χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ λν ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ακ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν λο ον, ῥητόν ἐστι. πάλιν ἐπεὶ τὸ δκ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον, τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν λο ον, ῥητόν ἐστι. πάλιν ἐπεὶ τὸ δκ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τὸ δκ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν



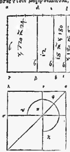




λο ον, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν λο ον μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ αι τῷ ζκ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λο τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ον. αἱ λο ον ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. ἡ λν ἄρα ἄλογός ἐστιν. ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ αβ χωρίον. ἡ ἄρα τὸ αβ χωρίον δυναμένη, ἐλάσσων ἐστίν.

ϟε.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Χωρίον γὰρ τὸ αβ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ, καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς αδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἔστω γὰρ τῇ αδ προσαρμόζουσα ἡ δη. αἱ ἄρα αη ηδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ηδ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ αγ. ἡ δὲ ὅλη ἡ αη τῆς προσαρμοζούσης τῆς δη μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς δη, ἴσον παρὰ τὴν αη παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ αζ ζη. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζη μήκει, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν εζη τῇ αγ παράλληλοι αἱ εθ ζι ηκ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ αη τῇ γα μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ. πάλιν ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ δη, καὶ σύμμετρος τῇ αγ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ δκ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν αι, ἴσον τετράγωνον τὸ λμ, τῷ δὲ ζκ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ λμ γωνίαν τὴν ὑπὸ λομ, τὸ νξ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι, τὰ λμ νξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ορ. καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ λν δύναται τὸ αβ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ λν ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ακ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον. τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν λο ον μέσον ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δκ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν λο ον, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν λο ον ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ αι τῷ ζκ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λο τῷ ἀπὸ τῆς ον. αἱ λο ον ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον. τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. λοιπὴ ἄρα ἡ λν ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ τὸ ὅλον ποιοῦσα. καὶ δύναται τὸ αβ χωρίον. ἡ τὸ αβ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

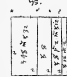


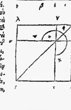
ϟϛ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Χωρίον γὰρ τὸ αβ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς αγ, καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς αδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ αβ χωρίον δυναμένη, μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἔστω γὰρ τῇ αδ προσαρμόζουσα, ἡ δη. αἱ ἄρα αη ηδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν τῶν αη ηδ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ αγ μήκει. ἡ δὲ ὅλη ἡ αη τῆς προσαρμοζούσης τῆς δη μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ αη τῆς ηδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς δη ἴσον παρὰ τὴν αη παραβάλλωμεν, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ δη δίχα κατὰ τὸ ε σημεῖον. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς εη, ἴσον παρὰ τὴν αη παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αζ ζη. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αζ τῇ ζη μήκει, ὡς δὲ ἡ αζ, πρὸς τὴν ζη, οὕτως ἐστὶ, τὸ αι πρὸς τὸ ζκ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ αι τῷ ζκ. καὶ ἐπεὶ αἱ αη αγ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι

σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ακ. πάλιν ἐπεὶ αἱ αγ δη ῥηταί εἰσι, καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δκ. ἐπεὶ οὖν αἱ αη ηδ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ αη τῇ ηδ μήκει. ὡς δὲ ἡ αη πρὸς τὴν ηδ, οὕτως ἐστὶ τὸ ακ, πρὸς τὸ κδ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ τῷ κδ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν αι ἴσον τετράγωνον τὸ λμ, τῷ δὲ ζκ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν, τὸ νξ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ λμ νξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ορ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ λν δύναται τὸ αβ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ λν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ακ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λο ον, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν λο ον μέσον ἐστί. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ δκ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν λο ον, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν λο ον, μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ακ τῷ δκ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν λο ον τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν λο ον. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ αι τῷ ζκ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λο τῷ ἀπὸ τῆς ον. αἱ λο ον ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν, μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα, ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. ἡ ἄρα λν ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ αβ χωρίον. ἡ ἄρα τὸ αβ χωρίον δυναμένη, μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

ϟϛ.

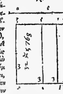


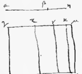


ϟζ.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. Ἔστω ἀποτομὴ ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ δγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον, παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω, τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστι πρώτη. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη. αἱ ἄρα αη ηβ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βη, τὸ κλ. ὅλον ἄρα τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ. ὧν τὸ γε ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ζλ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ. τετμήσθω ἡ ζμ δίχα κατὰ τὸ ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ν, τῇ γδ παράλληλος ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ λν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αη ηβ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν αη ηβ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ ἴσον τὸ δμ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ δμ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γμ καὶ σύμμετρος, τῇ γδ μήκει. πάλιν ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ, καὶ ἔστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ ἴσον τὸ λζ, μέσον ἄρα τὸ λζ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν ζμ. ῥητὴ ἄρα ἡ ζμ καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν αη ηβ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ μέσον, ἀσύμμετρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αη ηβ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αη ηβ ἴσον τὸ γλ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ τὸ ζλ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δμ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ δμ πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γμ πρὸς τὴν μζ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ, τῇ μζ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα γμ μζ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ γζ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν αη ηβ μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ ὑπὸ τῶν αη ηβ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον τὸ γθ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αη ηβ, ἴσον τὸ νλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βη ἴσον

ϟζ.

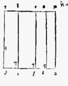




τὸ κλ, καὶ τῶν γθ κλ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ νλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως τὸ νλ πρὸς τὸ λκ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γκ πρὸς τὴν νμ. ὡς δὲ τὸ νλ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἡ νμ πρὸς τὴν κμ. ὡς ἄρα ἡ γκ πρὸς τὴν νμ, οὕτως ἐστὶν ἡ νμ πρὸς τὴν κμ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γκ κμ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μν, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αη τῷ ἀπὸ τῆς ηβ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ γθ τῷ κλ. ὡς δὲ τὸ γθ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἡ γκ πρὸς τὴν κμ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γκ τῇ κμ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν, αἱ γμ μζ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ ἴσον παρὰ τὴν γμ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν γκ κμ, καί ἐστι σύμμετρος ἡ γκ τῇ κμ. ἡ ἄρα γμ τῆς μζ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ γμ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ μήκει. ἡ ἄρα γζ ἀποτομή ἐστι πρώτη. τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

ϟϛ

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης, παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος, ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Ἔστω ἀποτομὴ μέσης πρώτη ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ γδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω, τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη. αἱ ἄρα αη ηβ μέσαι εἰσί, δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη, ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γθ, πλάτος ποιοῦν τὴν γκ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κβ ἴσον τὸ κλ, πλάτος ποιοῦν τὴν κμ. ὅλον ἄρα τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ, μέσοις οὖσι. μέσον ἄρα καὶ τὸ γλ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γμ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τῷ γε, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ ἴσον ἐστὶ τῷ ζλ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ζλ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ζε παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ζμ. καὶ σύμμετρος τῇ γδ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν αη ηβ, τουτέστι τὸ γλ μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ, τουτέστι τὸ ζλ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ γλ πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γμ πρὸς τὴν μζ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ τῇ μζ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα γμ μζ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ γζ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. τετμήσθω γὰρ ἡ ζμ δίχα κατὰ τὸ ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ν τῇ γδ παράλληλος ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ νλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αη ηβ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν αη ηβ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αη ηβ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αη τῷ γθ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αη ηβ τῷ νλ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ, τῷ κλ, καὶ τῶν γθ κλ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ νλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως τὸ νλ πρὸς τὸ κλ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γκ, πρὸς τὴν μν. ὡς δὲ τὸ νλ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἐστὶν ἡ νμ, πρὸς τὴν μκ. ὡς ἄρα ἡ γκ πρὸς τὴν νμ, οὕτως ἐστὶν ἡ νμ πρὸς τὴν κμ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γκ κμ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς νμ. τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει, τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ αη, τῷ ἀπὸ τῆς βη, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ γθ, τῷ κλ. τουτέστιν ἡ γκ, τῇ κμ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι εἰσὶν αἱ γμ μζ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς μζ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν γμ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ τῶν γκ κμ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. ἡ ἄρα γμ μζ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ζμ, σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ. ἡ ἄρα γζ ἀποτομή ἐστι δευτέρα. τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, ἀποτομὴν δευτέραν.

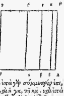


ϟζ

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας, παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, ἀποτομὴν τρίτην. Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα, ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ γδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ, λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστι τρίτη. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη. αἱ ἄρα αη ηβ

μέσαι

μέσαι εἰσὶ, δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη, ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γθ πλάτος ποιοῦν τὴν γκ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον παρὰ τὴν κθ παραβεβλήσθω τὸ κλ, πλάτος ποιοῦν, τὴν κμ. ὅλον ἄρα τὸ γλ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ. καί ἐστι μέσα, τὰ ἀπὸ τῶν αη ηβ. μέσον ἄρα καὶ τὸ γλ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γμ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ γλ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ, ὧν τὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, λοιπὸν ἄρα τὸ λζ, ἴσον ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ. τετμήσθω οὖν ἡ ζμ, δίχα κατὰ τὸ ν σημεῖον. καὶ τῇ γδ παράλληλος ἤχθω, ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ νλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αη ηβ, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αη ηβ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ζλ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ελ παράκειται, πλάτος ποιοῦν, τὴν ζμ. ῥητὴ ἄρα, καὶ ἡ ζμ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ αη ηβ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει, ἡ αη τῇ ηβ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αη, τῷ ὑπὸ τῶν αη ηβ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη, σύμμετρα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν αη ηβ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αη ηβ, σύμμετρόν ἐστι, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ, τὰ ἀπὸ τῶν αη ηβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αη ηβ, ἴσον ἐστὶ τὸ γλ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ζλ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ γλ πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γμ πρὸς τὴν ζμ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ τῇ ζμ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα γμ μζ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γζ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι, τὸ ἀπὸ τῆς αη τῷ ἀπὸ τῆς ηβ, σύμμετρον ἄρα τὸ γθ, τῷ κλ. ὥστε καὶ ἡ γκ, τῇ κμ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν αη ηβ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αη ηβ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον τὸ κλ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αη ηβ ἴσον τὸ νλ, καὶ τῶν γθ κλ ἄρα, μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ νλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως τὸ νλ, πρὸς κλ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ γθ, πρὸς τὸ νλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γκ, πρὸς τὴν νμ. ὡς δὲ τὸ νλ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἐστὶν ἡ νμ, πρὸς τὴν κμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ γκ πρὸς τὴν μν, οὕτως ἐστὶν ἡ μν, πρὸς κμ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γκ κμ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς μν. τουτέστι, τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι εἰσὶν αἱ γμ μζ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ, ἴσον παρὰ τὴν γμ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ γμ ἄρα τῆς μζ, μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν γμ μζ μήκει σύμμετρός ἐστι, τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ γδ. ἡ ἄρα γζ ἀποτομή ἐστι τρίτη. τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, ἀποτομὴν τρίτην.

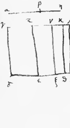


ρ.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, ἀποτομὴν τετάρτην. Ἔστω ἐλάσσων ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ γδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν, τὴν γζ. λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστι τετάρτη. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη, αἱ ἄρα αη ηβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αη ηβ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη, ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γθ, πλάτος ποιοῦν, τὴν κμ. ὅλον ἄρα τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αη ηβ ῥητόν. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ γλ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ γμ, καὶ σύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ γλ ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν αη ηβ, ὧν τὸ γε ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ. λοιπὸν ἄρα τὸ ζλ ἴσον ἐστὶ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη ηβ. τετμήσθω οὖν ἡ ζμ δίχα κατὰ τὸ ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ν, ὁποτέρᾳ τῶν γδ μλ παράλληλος ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ νλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αη ηβ. καὶ ἐπεὶ



τὸ



τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τῷ λζ, καὶ τὸ ζλ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ζε παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ζμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζμ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αη, ηβ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηβ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ. ἴσον δέ ἐστι τὸ γλ τοῖς ἀπὸ τῶν αη, ηβ. τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ ἴσον ἐστὶ τὸ ζλ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ γλ, πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν ζμ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ τῇ μζ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα γμ, μζ ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γζ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ἐπεὶ γὰρ, αἱ αη, ηβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αη, τὸ ἀπὸ τῆς ηβ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη, ἴσον τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον τὸ κλ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γθ τῷ κλ. ὡς δὲ τὸ γθ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γκ, πρὸς τὴν κμ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γκ τῇ κμ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν αη, ηβ μέσον ἀνάλογόν ἐστι, τὸ ὑπὸ τῶν αη, ηβ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αη τῷ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ τὸ κλ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αη, ηβ τῷ νλ. τῶν ἄρα γθ, κλ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ νλ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ γθ πρὸς τὸ νλ, οὕτως τὸ νλ, πρὸς τὸ κλ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ γθ πρὸς τὸ νλ οὕτως ἐστὶν ἡ γκ, πρὸς τὴν μν. ὡς δὲ ἡ νλ, πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἐστὶν ἡ μν, πρὸς τὴν κμ. ὡς ἄρα ἡ γκ πρὸς τὴν μν, οὕτως ἐστὶν ἡ μν, πρὸς τὴν κμ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γκ, κμ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς μν. τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς μζ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ γμ, μζ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς μζ, ἴσον παρὰ τὴν γμ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν γκ, κμ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. ἡ ἄρα γμ τῆς μζ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ γμ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ. ἡ ἄρα γζ ἀποτομή ἐστι τετάρτη. τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

ϙα.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ γδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ, λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστι πέμπτη. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη. αἱ ἄρα αη, ηβ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον τὸ κλ. ὅλον ἄρα τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη, ηβ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αη, ηβ ἅμα μέσον ἐστί. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γμ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη, ηβ, ὧν τὸ γε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ζλ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ. τετμήσθω οὖν ἡ ζμ δίχα κατὰ τὸ ν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ν, ὁποτέρᾳ τῶν γδ, μλ παράλληλος ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ, νλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αη, ηβ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ ῥητόν ἐστι, καί ἐστιν ἴσον τῷ ζλ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ζλ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν εζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ζμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζμ, καὶ σύμμετρος τῇ γδ



μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν γλ μέσον ἐστί, τὸ δὲ ζλ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ γλ, πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γμ πρὸς τὴν μζ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ, τῇ μζ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ἄρα γμ, μζ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γζ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν γκ, κμ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς νμ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αη τῷ ἀπὸ τῆς ηβ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αη τῷ γθ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ τῷ κλ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γθ τῷ κλ. ὡς δὲ τὸ γθ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἡ γκ πρὸς τὴν κμ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ

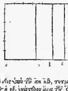
γκ

γζ, τῇ κμ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ γμ, μζ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ζμ, ἴσον παρὰ τὴν γμ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα γμ τῆς μζ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ζα σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ. ἡ ἄρα γζ ἀποτομή ἐστι πέμπτη. τὸ ἀπὸ τῆς ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ρβ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

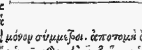
Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ αβ, ῥητὴ δὲ ἡ γδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. λέγω ὅτι ἡ γζ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βη. αἱ ἄρα αη, ηβ, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηβ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν γδ, τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον τὸ γθ, πλάτος ποιοῦν τὴν γκ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βη τὸ κλ. ὅλον ἄρα τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη, ηβ. μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ γλ καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν γμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ γλ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αη, ηβ, ὧν τὸ γε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, λοιπὸν ἄρα τὸ ζλ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ, μέσον. καὶ τὸ ζλ ἄρα μέσον ἐστί. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ζε παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ζμ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζμ. καὶ ἀσύμμετρος τῇ γδ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν αη, ηβ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αη, ηβ ἴσον τὸ γλ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ ἴσον τὸ ζλ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γλ τῷ ζλ. ὡς δὲ τὸ γλ πρὸς τὸ ζλ, οὕτως ἐστὶν ἡ γμ πρὸς τὴν μζ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γμ τῇ μζ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ γμ, μζ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γζ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γὰρ τὸ ζλ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αη, ηβ, τετμήσθω δίχα ἡ ζμ κατὰ τὸ ν. καὶ ἤχθω διὰ τοῦ ν τῇ γδ παράλληλος ἡ νξ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ζξ, νλ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αη, ηβ. καὶ ἐπεὶ αἱ αη, ηβ, δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αη τῷ ἀπὸ τῆς ηβ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον ἐστὶ τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον ἐστὶ τὸ κλ. ἀσύμμετρον ἄρα τὸ γθ τῷ κλ. ὡς δὲ τὸ γθ πρὸς τὸ κλ, οὕτως ἡ γκ πρὸς τὴν κμ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γκ, τῇ κμ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν αη, ηβ, μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αη, ηβ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αη ἴσον τὸ γθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ηβ ἴσον τὸ κλ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αη, ηβ ἴσον τὸ νλ, καὶ τῶν ἄρα γθ, κλ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ νλ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ γμ τῆς μζ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ, ἡ γζ ἄρα, ἀποτομή ἐστιν ἕκτη. τὸ ἀπὸ τῆς ἄρα μετὰ καὶ τὰ ἑξῆς.



ργ.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος, ἀποτομή ἐστι, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

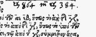
Ἔστω ἀποτομὴ ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ γδ, λέγω ὅτι καὶ ἡ γδ ἀποτομή ἐστι, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ αβ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ βε. αἱ αε, εβ ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς αβ πρὸς τὴν γδ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς βε πρὸς τὴν δζ. καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ αε πρὸς ὅλην τὴν γζ, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. σύμμετρος δὲ ἡ αβ τῇ γδ μήκει, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν αε τῇ γζ, ἡ δὲ βε τῇ δζ. αἱ δὲ αε, εβ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ αἱ γζ, ζδ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γδ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ βε πρὸς



πρὸς τὴν ζδ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. ἤτοι δὲ ἡ αε τῆς εβ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ αε τῆς εβ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ γζ τῆς ζδ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, εἰ δὲ ἡ εβ, καὶ ἡ δζ. εἰ δ' οὐδετέρα τῶν αε, εβ, καὶ οὐδετέρα τῶν γζ, ζδ. εἰ δὲ ἡ αε τῆς εβ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ γζ τῆς ζδ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ αε τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ γζ. εἰ δὲ ἡ βε, καὶ ἡ ζδ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν αε, εβ, οὐδετέρα τῶν γζ, ζδ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γδ, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ αβ.

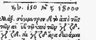
ρδ.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος, μέσης ἀποτομή ἐστι, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ αβ, καὶ τῇ αβ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ γδ, λέγω ὅτι καὶ ἡ γδ μέσης ἀποτομή ἐστι, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ αβ. ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ αβ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα, ἡ βε. αἱ αε, εβ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ βε, πρὸς τὴν δζ. καὶ αἱ αε, εβ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ γδ. λεκτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ αβ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ. ὡς δὲ ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γζ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τῷ ἀπὸ τῆς γζ. σύμμετρον ἄρα, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ τῷ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. εἴτε μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ γδ, καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή, τῇ αβ.



ρε.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος, ἐλάσσων ἐστίν. Ἔστω ἐλάσσων ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἡ γδ, λέγω ὅτι καὶ ἡ γδ ἐλάσσων ἐστί. γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ προτέρῳ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ γζ, ζδ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. συνθέντι ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ τῶν αε, εβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εβ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν γζ, ζδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζδ, καὶ ἐναλλάξ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βε τῷ ἀπὸ τῆς δζ. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε, εβ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ, ζδ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν αε, εβ τετραγώνων. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αε πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς γζ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ, καὶ ἐναλλάξ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς γζ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ τῷ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αε, εβ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γζ, ζδ. αἱ γζ, ζδ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν, μέσον. ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ γδ.



Ἄλλως.

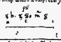
Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος, ἐλάσσων ἐστίν. Ἔστω ἐλάσσων ἡ α, καὶ τῇ α σύμμετρος ἔστω ἡ β, λέγω ὅτι ἡ β ἐλάσσων ἐστίν. ἐκκείσθω γὰρ ἡ γδ, ῥητή, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε. πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ γζ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον παρὰ τὴν ζε παραβεβλήσθω τὸ ζη, πλάτος ποιοῦν τὴν ζθ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τῷ ἀπὸ τῆς β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α, ἴσον τὸ γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον τὸ ζη. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γε τῷ ζη, ὡς δὲ τὸ γε πρὸς τὸ ζη, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζθ. σύμμετρος ἄρα ἡ γζ τῇ ζθ μήκει. ἀποτομὴ δέ ἐστι τε-

τάρτη

πέμπτη ἡ γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζθ τετάρτη. τὸ δὲ ζκ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. δύναται δὲ τὸ ζκ ἡ β. ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ β.

ρϛ.

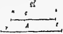
Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος, καὶ αὐτὴ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἡ γδ, λέγω ὅτι ἡ γδ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βε. αἱ αε εβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε εβ τετραγώνων, μέσον, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ γζ ζδ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς αε εβ. καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε εβ τετραγώνων, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αε εβ τῷ ὑπὸ τῶν γζ ζδ. ὥστε καὶ αἱ γζ ζδ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν, ῥητόν. ἡ γδ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἄλλως.



Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος, μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ β, λέγω ὅτι ἡ β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ γδ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ γζ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον παρὰ τὴν ζε παραβεβλήσθω, τὸ ζη, πλάτος ποιοῦν τὴν ζθ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β, σύμμετρον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α, τῷ ἀπὸ τῆς β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α ἴσον τὸ γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β, ἴσον τὸ ζη, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γε τῷ ζη. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ γζ τῇ ζθ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἡ ζθ, ῥητὴ δὲ ἡ ζε, ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. δύναται δὲ τὸ ζη ἡ β, ἡ β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

ρζ.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος, καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ αβ, καὶ τῇ αβ σύμμετρος ἡ γδ. λέγω ὅτι ἡ γδ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἔστω γὰρ τῇ αβ προσαρμόζουσα ἡ βε, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. αἱ αε εβ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν. καὶ εἰσὶν ὡς ἐδείχθη αἱ αε εβ σύμμετροι ταῖς γζ ζδ. καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν αε εβ τετραγώνων, τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν γζ ζδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αε εβ, τῷ ὑπὸ τῶν γζ ζδ, καὶ αἱ γζ ζδ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον, ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων, τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν. ἡ γδ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

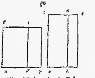


ρη.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη, μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων. Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ βγ, μέσον ἀφῃρήσθω τὸ βδ, λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ εγ, μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ζη, καὶ τῷ μὲν βγ ἴσον παρὰ τὴν ζη παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ηθ, τῷ δὲ βδ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ηκ. λοιπὸν ἄρα τὸ εγ ἴσον ἐστὶ τῷ λθ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ βγ, μέσον δὲ τὸ βδ, ἴσον δὲ τὸ βγ, τῷ ηθ, τὸ δὲ βδ τῷ ηκ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ηθ, μέσον δὲ, τὸ ηκ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ζη παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ζθ, καὶ σύμμετρος, τῇ ζη μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ζκ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ζη μήκει. ἀσύμμετρος

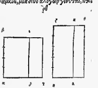


ἄρα ἐστὶν ἡ ζθ τῇ ζκ μήκει. αἱ ζθ ζκ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ κθ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ κζ. ἤτοι δὲ ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ θζ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ζκ. ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ κθ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης ἡ δυναμένη, ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ λθ τουτέστι τὸ γε δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. εἰ δὲ ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ θζ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ζκ. ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ κθ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον, ἡ δυναμένη, ἐλάσσων ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ λθ, τουτέστι τὸ εγ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.



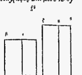
ρθ.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ τὸ ὅλον ποιοῦσα. Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ βγ, ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ βδ. λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ εγ δυναμένη, μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέση ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ζκ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ζθ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ζκ μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ζκ καὶ σύμμετρος τῇ ζκ μήκει. αἱ ζθ ζκ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ κθ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ζκ. ἤτοι δὲ ἡ ζθ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ζκ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ζκ, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ θκ. ῥητὴ δὲ ἡ ζκ, ὥστε ἡ τὸ λθ τουτέστι τὸ γε δυναμένη, μέση ἀποτομή ἐστι πρώτη. εἰ δὲ ἡ θζ μεῖζον τῆς ζκ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ζκ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ζκ, ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ κθ. ὥστε ἡ τὸ εγ δυναμένη, μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.



ρι.

Ἀπὸ μέσου, μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέση ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ βγ μέσον τὸ βδ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ. λέγω ὅτι ἡ τὸ γε δυναμένη, μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέση ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν βγ βδ καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ βγ, τῷ βδ, τουτέστι τὸ κθ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ θζ τῇ ζκ. αἱ θζ ζκ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ θκ. προσαρμόζουσα δὲ ἡ κζ. ἤτοι δὲ ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν θζ ζκ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ζκ μήκει, ἀποτομὴ ἐστὶν ἄρα τρίτη ἡ θκ. ῥητὴ δὲ ἡ κλ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἀποτομὴ μέση δευτέρα. εἰ δὲ ἡ θζ τῆς ζκ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν θζ ζκ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ



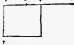
ζκ.

ζη. ἀποτομὴ ἐστὶν ἄρα ἕκτη ἡ θκ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη, ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὥστε ἡ τὸ λθ τετράγωνον δυναμένη, μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

ριε.

Η Ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή, τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. ἔστω ἀποτομὴ ἡ αβ, λέγω ὅτι ἡ αβ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ δγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν γδ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν δε. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ αβ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ δε. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ εζ. αἱ δζ ζε ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ δζ τῆς ζε μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἡ δζ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ γδ μήκει. πάλιν ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ αβ. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ δε. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ δη. αἱ δη ηε ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ δη τῆς ηε μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἡ μείζων ἡ δη σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ δγ μήκει. ἡ δζ ἄρα τῇ δη σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ λοιπῇ ἄρα τῇ ζη σύμμετρός ἐστιν ἡ δζ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ δζ τῇ ζη, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ δζ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζη. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ δζ τῇ ηζ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ δζ τῇ ζε μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζη, τῇ ζε μήκει, καὶ εἰσὶ ῥηταί. αἱ ηζ ζε ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ εη. ἀλλὰ καὶ ῥητή. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ ἄρα ἀποτομὴ, οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ, τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

ριϛ



Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι, οὔτε τῇ μέσῃ, οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

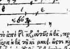
Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη, διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων (τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ, ὅτι τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί) δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι, διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν, παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, ἀποτομὰς ἀκολούθως τῇ τάξει καθ᾽ αὐτήν. αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων. ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ.

1 μέσην.
2 ἐκ δύο ὀνομάτων.
3 ἐκ δύο μέσων πρώτην.
4 ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
5 μείζονα.
6 ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
7 δύο μέσα δυναμένην.
8 ἀποτομήν.
9 μέσης ἀποτομὴν πρώτην.
10 μέσης ἀποτομὴν δευτέραν.
11 ἐλάττονα.
12 μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
13 μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

ριζ.

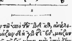
Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον, πλάτος, ποιεῖ ἀποτομὴν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι, τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι

ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ, τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν, τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ α, ἐκ δύο δὲ ὀνομάτων ἡ βγ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ γδ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν βγ ε ζ, λέγω ὅτι ἡ εζ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς γδ δβ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ἔτι ἡ εζ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν, τῇ βγ. ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν βδ η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ εζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βδ η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ η, πρὸς τὴν εζ. μείζων δὲ ἡ γβ, τῆς βδ, μείζων ἄρα καὶ ἡ η, τῆς εζ. ἔστω ἴση τῇ η ἡ εθ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ θε, πρὸς τὴν εζ. διελόντι ἄρα, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ θζ πρὸς τὴν ζε. γεγονέτω ὡς ἡ θζ πρὸς τὴν ζε, οὕτως ἡ ζκ πρὸς τὴν κε. καὶ ὅλη ἄρα ἡ θκ πρὸς ὅλην τὴν κζ ἐστιν ὡς ἡ ζκ πρὸς τὴν κε. ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ζκ, πρὸς τὴν κε, οὕτως ἐστὶν ἡ γδ πρὸς τὴν δβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θκ, πρὸς τὴν κζ, οὕτως ἡ γδ, πρὸς τὴν δβ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γδ τῷ ἀπὸ τῆς δβ. σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τῷ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς θκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς τὴν κε. ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ θκ κζ κε ἀνάλογον εἰσί, σύμμετρος ἄρα ἡ θκ τῇ κε μήκει. ὥστε καὶ ἡ θε τῇ εκ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν θε βδ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θε βδ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν βδ παράκειται, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εθ, καὶ σύμμετρος τῇ βδ μήκει. ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ, ἡ εκ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ βδ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν δβ οὕτως ἡ ζκ πρὸς τὴν κε, αἱ δὲ γδ δβ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ αἱ ζκ κε ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ κε, καὶ σύμμετρος τῇ βδ μήκει. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ κζ, καὶ σύμμετρος τῇ γδ μήκει. αἱ κζ κε ἄρα, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ εζ. ἤτοι δὲ ἡ γδ τῆς δβ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ γδ τῆς δβ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ζκ τῆς κε μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ γδ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ζκ. εἰ δὲ ἡ βδ, καὶ ἡ κε. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν γδ δβ, καὶ οὐδετέρα τῶν ζκ κε. εἰ δὲ ἡ γδ τῆς δβ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ζκ τῆς κε μεῖζον δυνήσεται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ γδ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ζκ. εἰ δὲ ἡ βδ, καὶ ἡ κε. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν γδ δβ, καὶ οὐδετέρα, τῶν ζκ κε. ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ζε, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ζκ κε σύμμετρά ἐστι, τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς γδ δβ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ βγ.

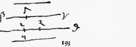


ριγ

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα, σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων, τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ. Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ α, ἀποτομὴ δὲ ἡ βδ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν βδ κθ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς α ῥητῆς παρὰ τὴν βδ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν κθ, λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ κθ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι, τοῖς τῆς βδ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὅτι ἡ κθ, τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ βδ. ἔστω γὰρ τῇ βδ προσαρμόζουσα ἡ δγ. αἱ βγ γδ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον ἔστω, τὸ ὑπὸ τῶν βγ η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α. ῥητὸν ἄρα, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βγ η, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν βγ παράκειται. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ η. καὶ σύμμετρος τῇ βγ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ βγ η, ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βδ κθ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν η. μείζων δὲ ἡ γβ τῆς βδ, μείζων ἄρα καὶ ἡ κθ τῆς η. κείσθω τῇ η ἴση ἡ κε, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ κε, τῇ βγ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν

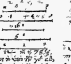


ὡς



ὡς ἡ γβ πρὸς τὴν βδ, οὕτως ἡ θκ πρὸς τὴν κε, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν θε. γεγονέτω ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θε, οὕτως ἡ θζ, πρὸς τὴν ζε, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ κζ πρὸς τὴν ζθ ἐστὶν, ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θε. τουτέστιν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γδ. αἱ δὲ βγ γδ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ αἱ κζ ζθ ἄρα, δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θε, ἡ κζ πρὸς τὴν ζθ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θε, ἡ θζ πρὸς τὴν ζε, καὶ ὡς ἄρα ἡ κζ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ἡ θζ, πρὸς τὴν ζε. ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ κζ πρὸς τὴν ζε, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς κζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ. σύμμετρον δέ ἐστι, τὸ ἀπὸ κζ τῷ ἀπὸ ζθ. αἱ γὰρ κζ ζθ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ κζ τῇ ζε μήκει, ὥστε ἡ κζ καὶ τῇ κε σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ κε, καὶ σύμμετρος τῇ βγ μήκει, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ κζ, καὶ σύμμετρος τῇ βγ μήκει, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ κζ πρὸς τὴν ζθ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν κζ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν ζθ. σύμμετρος δὲ ἡ βγ τῇ κζ, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ζθ τῇ γδ μήκει. αἱ δὲ βγ γδ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ αἱ κζ ζθ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ κθ. εἰ μὲν οὖν ἡ βγ τῆς γδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ κζ τῆς ζθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ βγ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ κζ, εἰ δὲ ἡ γδ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ζθ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν βγ γδ, καὶ οὐδετέρα τῶν κζ ζθ. εἰ δὲ ἡ βγ τῆς γδ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ κζ τῆς ζθ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ βγ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ κζ. εἰ δὲ ἡ γδ, καὶ ἡ ζθ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν βγ γδ καὶ οὐδετέρα τῶν κζ ζθ. ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ κθ, ἧς τὰ ὀνόματα, τὰ κζ ζθ σύμμετρά ἐστι, τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, τοῖς βγ γδ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ἔτι ἡ κθ τῇ βγ, τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν.

ΕΑΝ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ῥητή ἐστι. περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν αβ γδ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς αβ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς γδ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ γε, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ γε εδ, σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς αζ ζβ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν αβ γδ δυναμένη ἡ η, λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ η. ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς θ ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν, τὴν κλ, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν, ἡ κλ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω, τὰ κμ μλ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς γε εδ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ γε εδ σύμμετροί εἰσι ταῖς αζ ζβ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν ζβ, οὕτως ἡ κμ πρὸς τὴν μλ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν κμ, οὕτως ζβ, πρὸς τὴν λμ. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αβ, πρὸς λοιπὴν τὴν κλ ἐστὶν ὡς ἡ αζ πρὸς τὴν κμ. σύμμετρος δὲ ἡ αζ τῇ κμ,



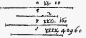
σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ αβ τῇ κλ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν γδ αβ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γδ κλ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν γδ αβ, τῷ ὑπὸ τῶν γδ κλ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν γδ κλ τῷ ἀπὸ τῆς θ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν γδ αβ, τῷ ἀπὸ τῆς θ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γδ αβ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς η, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς η τῷ ἀπὸ τῆς θ. ῥητὸν δὲ, τὸ ἀπὸ τῆς θ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν γδ αβ, ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, ῥητή ἐστι. Πόρισμα. Καὶ γέγονεν ἡμῖν, καὶ διὰ τούτου φανερὸν ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον, ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

ριε.

ΑΠὸ μέσης, ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον, ἡ αὐτή. Ἔστω μέση ἡ α, λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς α, ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ

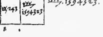
οὐδεμία

οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή, ἐκκείσθω ῥητή, ἡ β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν βα, ἴσον ἔστω, τὸ ἀπὸ τῆς γ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν, ἡ γ. τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς, ἄλογόν ἐστι. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή. τὸ δὲ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον ἡ αὐτή, τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν βγ, ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς δ. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν, ἡ δ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή. τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης, ἄπειροι ἄλογοι γίνονται. καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.



ρις

ἄλλως. Ἔστω μέση ἡ αγ, λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς αγ, ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἐστὶν ἡ αὐτή. ἤχθω τῇ αγ πρὸς ὀρθὰς, ἡ αβ καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ αβ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βγ. ἄλογον ἄρα ἐστὶ, τὸ βγ. καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ, ἡ γδ, ἄλογος ἄρα ἡ γδ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν συμπεπληρώσθω τὸ εδ, ἄλογον ἄρα τὸ εδ. καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ, ἡ ζδ. ἄλογος ἄρα ἡ δζ καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ τὴν γδ. ἀπὸ τῆς μέσης ἄρα, ἄπειροι ἄλογοι γίνονται. καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.



ρις

Non habet alterum græcum exemplar.

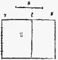
Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος, ἐλάσσων ἐστί. Ἔστω ἐλάσσων ἡ α, καὶ τῇ α σύμμετρος ἔστω ἡ β, λέγω ὅτι ἡ β ἐλάσσων ἐστί. ἐκκείσθω γὰρ ἡ γδ ῥητή, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς α ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε, πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ γζ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον παρὰ τὴν ζε παραβεβλήσθω τὸ ζη, πλάτος ποιοῦν τὴν ζθ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τῷ ἀπὸ τῆς β, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α, ἴσον τὸ γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β, ἴσον τὸ ζη. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γε τῷ ζη. ὡς δὲ τὸ γε πρὸς τὸ ζη, οὕτως ἐστὶν ἡ γζ πρὸς τὴν ζθ σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ γζ τῇ ζθ μήκει. ἀποτομὴ δέ ἐστι τετάρτη ἡ γζ ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ζθ τετάρτη. τὸ ηζ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ζε, καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ζθ. ῥητὴ δὲ ἡ ζε. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς τῆς ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶ, δύναται δὲ τὸ ζη ἡ β. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ β.



ριζ

Alterum græcum exemplar non habet

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ β, λέγω ὅτι ἡ β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ γδ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α ἴσον παρὰ τὴν γδ παραβεβλήσθω τὸ γε πλάτος ποιοῦν τὴν γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ γζ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον παρὰ τὴν ζε παραβεβλήσθω τὸ ζη, πλάτος ποιοῦν τὴν ζθ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ α τῇ β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α τῷ ἀπὸ τῆς β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς α, ἴσον ἐστὶ τὸ γε, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς β ἴσον τὸ ζη. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ γε τῷ ζη σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ γζ τῇ ζθ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ γζ. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ζθ. ῥητὴ δὲ ἡ ζε. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη, μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι, δύναται δὲ τὸ ζη ἡ β. ἡ β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.



ριζ.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων, ἀσύμμετρός ἐστιν, ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει. Ἔστω τετράγωνον, τὸ αβγδ διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ. λέγω ὅτι ἡ αγ ἀσύμμετρός ἐστι, τῇ αβ μήκει. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος. λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν. φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ αγ τῇ αβ, ἡ αγ ἄρα πρὸς τὴν αβ, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ εζ, πρὸς τὸν η, καὶ ἔστωσαν οἱ εζ η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ εζ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ εζ, καὶ ἔχει λόγον πρὸς τὸν η, ὃν ἔχει ἡ αγ πρὸς τὴν αβ, καὶ μείζων ἡ αγ τῆς αβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ εζ μονὰς, τοῦ η ἀριθμοῦ. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονὰς ὁ εζ, ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν αβ, οὕτως ὁ εζ πρὸς τὸν η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γα, τοῦ ἀπὸ τῆς αβ. διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ εζ, τοῦ ἀπὸ τοῦ η. ἄρτιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ εζ. ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ εζ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περιττὸς, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περιττὸς ἂν ἦν. ἐπειδήπερ ἐὰν περιττοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περιττὸν ᾖ, ὅλος περιττός ἐστιν. ὁ εζ ἄρα ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεὶ οἱ εζ η ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι, τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ἔστιν ὁ εζ ἄρτιος. περιττὸς ἄρα ἐστὶν ὁ η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς εζ η δυὰς ἂν ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ η, περιττὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιός ἐστιν ὁ εζ, τοῦ εθ, τετραπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ εζ, τοῦ ἀπὸ τοῦ εθ. διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ η, τοῦ ἀπὸ τοῦ εθ. ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ η. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα, ὁ η. ἀλλὰ καὶ περιττὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ αγ, τῇ αβ, μήκει. ἀσύμμετρος ἄρα. Ἄλλως.



Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος, τῇ πλευρᾷ. ἔστω γὰρ ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου, ἡ α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς, ἡ β, λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ α, τῇ β μήκει. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος, καὶ γεγονέτω πάλιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ εζ ἀριθμὸς, πρὸς τὸν η. καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ εζ η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ η, οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μονάς, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ὁ εζ πρὸς τὸν η. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς α, τοῦ ἀπὸ τῆς β. διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ εζ, τοῦ ἀπὸ τοῦ η. καὶ ἔστι μονὰς ὁ η. δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ εζ τετράγωνος. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ η. ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ εζ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ η. καὶ ἀνάπαλιν. ὡς τὸ ἀπὸ τῆς β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ η, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ. μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς β, τὸ ἀπὸ τῆς α. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ η τετράγωνος, τὸν ἀπὸ τοῦ εζ. ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ η, τὴν εζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ η. ὁ η ἄρα τοὺς εζ η μετρεῖ. πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ α, τῇ β μήκει. ἀσύμμετρος ἄρα.



*Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν α β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη, ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὲ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν α β, μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν γ, ἔσται ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς α εἶδος, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς α-

Addit hic aliā rursus eiusdē demōstrationem latinum exemplar.

ριη



γ. ἐπεὶ γὰρ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὕρηνται ἄρα ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων χωρίων ἀσυμμέτρων, δείξομεν καὶ ἐκ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἀπὸ τῶν α β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεά, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν α β, ἐὰν ἀπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ α β κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροι εἰσὶν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται οἵ τε κῶνοι ἀλλήλοις, καὶ οἱ κύλινδροι. εἰ δὲ ἀσύμμετροι εἰσὶν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι, καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

Τέλος εὐκλείδου στοιχείου δεκάτου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΙΑ, ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΡΩΤΟΝ.

ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστι, τὸ μῆκος, καὶ πλάτος, καὶ βάθος ἔχον. Στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης, καὶ τῆς ἐφεστώσης. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

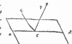
Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. Στερεὰ γωνία ἐστίν, ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Στερεὰ γωνία ἐστίν, ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν

νιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεόν, ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον, ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παραλληλόγραμμα. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης πλευρᾶς, τῆς περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος. Κύλινδρος δὲ ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν, γραφόμενοι.

Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἰσίν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν. Κύβος ἐστὶ, σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. Τετράγωνον ἐστὶ σχῆμα ὑπὸ τεττάρων τριγώνων ἴσων, καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δωδεκάεδρόν ἐστι, σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. Εἰκοσάεδρόν ἐστι, σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. Εἰ γὰρ δυνατὸν, εὐθείας γραμμῆς τῆς αβ, μέρος μέν τι τὸ αβ, ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ βγ ἐν μετεώρῳ. ἔσται δή τις τῇ αβ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ βδ. δύο δὴ δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν αβγ, αβδ, κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ αβ, ὅπερ ἀδύνατον. εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἕν, εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

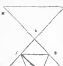


Ἐὰν

β.

ΕΑΝ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ γδ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον, λέγω ὅτι αἱ αβ γδ, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν εβ εγ τυχόντα σημεῖα, τὰ ζη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γβ ζη. καὶ διήχθωσαν αἱ ζθ ηκ. λέγω πρῶτον ὅτι τὸ εβγ τρίγωνον, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ εβγ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ζθγ, ἢ τὸ ηβκ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν εγ εβ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ εγβ τριγώνου, τὸ ζγβη μέρος εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν εγ εβ εὐθειῶν, μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα εβγ τρίγωνον, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ βγε τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν εγ εβ. ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν εγ εβ ἐν τούτῳ, καὶ αἱ αβ γδ. αἱ αβ γδ ἄρα εὐθεῖαι, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ πᾶν τρίγωνον, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.



γ.

ΕΑΝ δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖα ἐστί.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ αβ βγ τεμνέτωσαν ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω, ἡ δβ γραμμή, λέγω ὅτι ἡ δβ γραμμή, εὐθεῖά ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β, ἐν μὲν τῷ αβ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἡ δεβ, ἐν δὲ τῷ βγ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἡ δζβ. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν δεβ δζβ, τὰ αὐτὰ πέρατα. καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ δεβ δζβ, εὐθεῖαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς δβ κοινῆς τομῆς, τῶν αβ βγ ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα καὶ τὰ ἑξῆς.

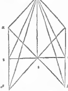


δ.

ΕΑΝ εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ εζ, δύο εὐθείαις ταῖς αβ γδ, τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω, λέγω ὅτι ἡ εζ, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ γδ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστι. ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ αε εβ γε εδ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ ε ὡς ἔτυχεν, ἡ κεθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ γβ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ ζ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα ζκ ζδ ζγ ζθ ζβ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αε εδ, δυσὶ ταῖς γε εβ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αδ βάσει τῇ γβ ἴση ἐστί, καὶ τὸ αεδ τρίγωνον, τῷ γεβ ἴσον ἔσται. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εβγ, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεκ γωνία, τῇ ὑπὸ βεθ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι, τὰ ακε βεθ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν αε τῇ εβ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευράς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν κε τῇ εθ, ἡ δὲ ακ τῇ βθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ εβ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ζε, βάσις ἄρα ἡ ζα βάσει τῇ ζβ, ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζγ τῇ ζδ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ γβ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ζα τῇ ζβ ἴση, δύο δὴ αἱ ζα αδ δυσὶ ταῖς ζβ, βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ζδ βάσει

τῇ



τῇ ζγ ἐδείχθη ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζαδ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ ἴση ἐστίν. καὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ αη τῇ βθ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ζα τῇ ζβ ἴση, δύο δὴ αἱ ζα, αη δυσὶ ταῖς ζβ, βθ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζαη ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ζβθ. βάσις ἄρα ἡ ζη βάσει τῇ ζθ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἴση ἡ ηε τῇ εθ, κοινὴ δὲ ἡ ζε. δύο δὴ αἱ ηε, εζ δυσὶ ταῖς θε, εζ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ζθ, βάσει τῇ ζη, ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ηεζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θεζ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηεζ, θεζ γωνιῶν. ἡ ζε ἄρα πρὸς τὴν ηθ τυχόντως διὰ τοῦ ε ἀχθεῖσαν, ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ζε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. ἡ ζε ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν αβ, γδ εὐθειῶν, ἡ ζε ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι, τῷ διὰ τῶν αβ, γδ ἐπιπέδῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας. καὶ τὰ ἑξῆς.

ε.

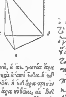
ΕΑΝ εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ τρισὶν εὐθείαις ταῖς βγ, βδ, βε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ β ἁφῆς ἐφεστάτω, λέγω ὅτι αἱ βγ, βδ, βε ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν βδ, βε ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ βγ ἐν μετεώρῳ. καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν αβ, βγ ἐπίπεδον. κοινὴν τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν, ποιείτω τὴν βζ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν αβ, βγ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, βζ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν βδ, βε, καὶ τῷ διὰ τῶν δβ, βε ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, τὸ δὲ διὰ τῶν δβ, βε ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν. ἡ αβ ἄρα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἡ αβ. ἅπτεται δὲ ἡ βζ αὐτῆς οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ αβζ γωνία, ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβζ γωνία, τῇ ὑπὸ αβγ, καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ βγ εὐθεῖα, ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ βγ, βδ, βε, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων. καὶ τὰ ἑξῆς.



ϛ.

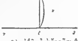
ΕΑΝ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὰ β, δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ εὐθεῖα. καὶ ἤχθω τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δε. καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, αε, αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς αβ, ἑκατέρα τῶν βδ, βε οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αβε γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γδβ, γδε ὀρθή ἐστι, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ δε, κοινὴ δὲ ἡ βδ, δύο δὴ αἱ αβ, βδ, δυσὶ ταῖς εδ, δβ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βε ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ δε, ἀλλὰ καὶ ἡ αδ, τῇ βε, δύο δὴ αἱ αβ, βε, δυσὶ ταῖς εδ, δα ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αὐτῶν κοινή, ἡ αε. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδα ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβε. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εδα. ἡ εδ ἄρα πρὸς τὴν δα ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν βδ, δγ ὀρθή. ἡ εδ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς βδ, δα, δγ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ βδ, δα, δγ,



διὰ δγ, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ δέ εἰσιν αἱ δε δα, ἐν τούτῳ καὶ ἡ αβ. πᾶν γὰρ τρίγωνον, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. αἱ ἄρα αβ βδ δγ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ βδγ γωνιῶν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ γδ. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

ζ.

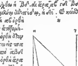
ΕΑΝ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ αβ γδ, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, τὰ ε ζ, λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ ε ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεώρῳ ὡς ἡ εηζ, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς εηζ ἐπίπεδον. τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖαν, ποιείτω ὡς τὴν εζ. δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ εηζ εζ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν τῷ διὰ τῶν



αβ γδ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἡ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα. ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

η.

ΕΑΝ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ αβ γδ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ αβ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ γδ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ αβ γδ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὰ β δ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. αἱ ἄρα αβ γδ βδ, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δε. καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση, ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ βε αε αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ αβε γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αβ γδ εὐθείας ἐμπέπτωκεν ἡ βδ, αἱ ἄρα ὑπὸ αβδ γδβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γδβ. ἡ γδ ἄρα πρὸς τὴν βδ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ δε, κοινὴ δὲ ἡ βδ, δύο δὴ αἱ αβ βδ δυσὶ ταῖς εδ δβ ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδβ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. βάσις ἄρα ἡ αδ βάσει τῇ βε ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ βε, τῇ αδ, δύο δὴ αἱ αβ βε δυσὶ ταῖς εδ δα ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ αε. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβε

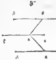


γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδα ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβε, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εδα. ἡ εδ ἄρα πρὸς τὴν αδ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν βδ ὀρθή, ἡ εδ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βδ δα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν αδ δβ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ εδ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν βδ δα ἐπιπέδῳ, ἐστὶν ἡ δγ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν βδα ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ αβ βδ. ἐν ᾧ δὲ αἱ αβ βδ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ δγ. ἡ εδ ἄρα τῇ δγ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὥστε καὶ ἡ γδ τῇ δε πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ τῇ βδ. ἡ γδ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς δε δβ, ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν. ὥστε καὶ ἡ γδ, καὶ τῷ διὰ τῶν δε δβ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν δε δβ ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν. ἡ γδ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

θ.

ΑΙ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν αβ γδ παράλληλος τῇ εζ

τῆς εζ μὴ οὔσαις αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς εζ τυχὸν σημεῖον, τὸ η, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ τῇ εζ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν εζ αβ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ηθ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ζε γδ τῇ εζ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζ πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ ηκ ὀρθή ἐστιν, ἡ εζ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ ηκ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καί ἐστιν ἡ εζ τῇ αβ παράλληλος, καὶ ἡ αβ ἄρα τῷ διὰ τῶν θηκ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γδ τῷ διὰ τῶν θηκ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἑκατέρα ἄρα τῶν αβ γδ τῷ διὰ τῶν θηκ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

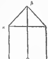


ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι παράλληλοι εἰσὶν αἱ εὐθεῖαι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ γδ.

ι.

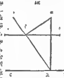
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ βγ παρὰ δύο εὐθείας τὰς δε εζ ἁπτομένας ἀλλήλων, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεζ. ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ βα βγ ταῖς εδ εζ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ γζ βε αγ δζ. καὶ ἐπεὶ ἡ βα τῇ εδ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γζ τῇ βε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἑκατέρα ἄρα τῶν αδ γζ τῇ βε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῇ γζ, καὶ ἴση καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς, αἱ αγ δζ. καὶ ἡ αγ ἄρα τῇ δζ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς δε εζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων. καὶ τὰ ἑξῆς.



ια.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ βγ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν βγ κάθετος ἡ αδ. εἰ μὲν οὖν ἡ αδ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν, εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ σημείου τῇ βγ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὴν δε κάθετος ἡ αζ. καὶ διὰ τοῦ ζ σημείου τῇ βγ παράλληλος ἤχθω, ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βγ ἑκατέρᾳ τῶν δα δε πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ βγ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν εδα ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος, ἡ ηθ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται, καὶ ἡ ηθ ἄρα, τῷ διὰ τῶν εδ δα ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν εδ δα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ηθ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ αζ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν εδ δα ἐπιπέδῳ. ἡ ηθ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ζα. ὥστε καὶ ἡ ζα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν θη. ἔστι δὲ ἡ αζ, καὶ πρὸς τὴν δε ὀρθή. ἡ αζ ἄρα, πρὸς ἑκατέραν τῶν θη δε, ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ἡ ζα ἄρα τῷ διὰ τῶν εδ ηθ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν εδ ηθ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον. ἡ αζ ἄρα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ αζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ιβ.

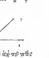
Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ α, δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τοῦ α σημείου τῇ βγ παράλληλος ἤχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ αδ γβ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ αδ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ. καὶ τὰ ἑξῆς.



ιγ.

Alterum graecum exemplar sic ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ τῷ ἐπιπέδῳ

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, * δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Εἰ γὰρ δυνατὸν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ α, δύο εὐθεῖαι αἱ αβ αγ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν βα αγ ἐπίπεδον. τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν δαε. αἱ ἄρα αβ αγ δαε εὐθεῖαι, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ γα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ δαε. οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἡ ἄρα ὑπὸ αγε γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βαε ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γαε, τῇ ὑπὸ βαε, καί εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ιδ.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ πρὸς ἑκάτερον τῶν γδ εζ ἐπιπέδων, πρὸς ὀρθὰς ἔστω, λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν, ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν, ποιείτωσαν τὴν ηθ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ηθ τυχὸν σημεῖον τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ βκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν βκ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ εζ ἐκβεβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ. ἡ ἄρα ὑπὸ αβκ γωνία, ὀρθή ἐστι, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ὑπὸ βακ ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ αβκ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβκ βακ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ γδ εζ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. παράλληλα ἄρα ἐστὶν τὰ γδ εζ ἐπίπεδα. πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

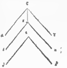


ιε.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλα ἐστὶ τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα. Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ βγ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς δε εζ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν αβ βγ δε εζ ἐπίπεδα, οὐ συμπεσοῦνται ἀλλήλοις. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δε εζ ἐπίπεδον κάθετος, ἡ βη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ η σημεῖον καὶ διὰ τοῦ η, τῇ μὲν εδ παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ εζ ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ βη ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δε εζ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ

διὰ

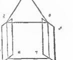
διὰ τῶν δε ες ὑποκειμένων, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ηθ ηκ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν δε εζ ὑποκειμένῳ. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηθ βηκ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βα τῇ ηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ ηβα βηθ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βηθ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηβα. ἡ ηβ ἄρα τῇ βα πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἡ βη καὶ τῇ βγ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βη δυσὶν εὐθείαις ταῖς βα βγ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ βη ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βα βγ ὑποκειμένῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ βη καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ ηκ ὑποκειμένῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ηθ ηκ ἐπίπεδον ἐστι, τὸ διὰ τῶν δε εζ. ἡ βη ἄρα τῷ διὰ τῶν δε εζ ὑποκειμένῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ βγ ὑποκειμένῳ πρὸς ὀρθάς. ἐστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δε εζ ὑποκειμένῳ ὀρθή. ἡ βη ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν αβ βγ δε εζ ὑποκειμένων ὀρθή ἐστι. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν αβ βγ ἐπίπεδον, τῷ διὰ τῶν δε εζ. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι᾽ αὐτῶν ἐπίπεδα.



ιε.

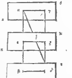
ιϛ.

ΕΑΝ δύο ἐπίπεδα παράλληλα, ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ, παράλληλοί εἰσί. Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ αβ γδ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εζ ηθ τεμνέσθω. κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν, αἱ εζ ηθ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ εζ τῇ ηθ εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται, αἱ εζ ηθ, ἤτοι ἐπὶ τὰ ζθ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ εη. ἐκβεβλήσθωσαν πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ ζθ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ εζκ, ἐν τῷ αβ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς εζκ σημεῖα ἐν τῷ αβ ὑποκειμένῳ ἐστίν. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς εζκ εὐθείας σημεῖον ἐστὶ τὸ κ. τὸ κ ἄρα ἐν τῷ αβ ἐστὶν ὑποκειμένῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ κ, καὶ ἐν τῷ γδ ἐστὶν ὑποκειμένῳ. τὰ αβ γδ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι. οὐκ ἄρα αἱ εζ ηθ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ζθ μέρη ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ εζ ηθ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ εη μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ ηθ ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα, καὶ τὰ ἑξῆς.



ιζ.

ΕΑΝ δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ γδ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ηθ κλ μν τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ α ε β γ ζ δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αε εὐθεῖα πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ, πρὸς τὴν ζδ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ βδ αδ καὶ συμβαλλέτω ἡ αδ τῷ κλ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ξ σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εξ ξζ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κλ μν ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ εβδξ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ, αἱ εξ βδ, παράλληλοι εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ηθ κλ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αξζγ τέμνεται. αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ, αἱ αγ ζξ παράλληλοι εἰσί. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβδ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν βδ εὐθεῖα ἦκται ἡ εξ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ αξ, πρὸς τὴν ξδ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αδγ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν αγ εὐθεῖα ἦκται ἡ ξζ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αξ πρὸς τὴν ξδ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. ἐδείχθη δὲ



καὶ ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ αε, πρὸς τὴν εβ. καὶ ὡς ἄρα ἡ αε πρὸς τὴν εβ, οὕτως ἡ γζ πρὸς τὴν ζδ. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι. καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη.

ΕΑΝ εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσαι. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσω, λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ ἐπίπεδα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσαι. ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς αβ ἐπίπεδον τὸ δε, καὶ ἔσω κοινὴ τομὴ τοῦ δε ἐπιπέδου, καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ γε. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς γε τυχὸν σημεῖον, τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ τῇ γε πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ δε ἐπιπέδῳ, ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ αβ. ὥστε καὶ πρὸς τὴν γε ὀρθή ἐστιν. ἡ ἄρα ὑπὸ αβζ γωνία, ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ηζβ ὀρθή. παράλληλος ἄρα ἡ αβ τῇ ζη. ἡ δὲ αβ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ζη ἄρα, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῷ δε πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ζη ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς. τὸ ἄρα δε ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς αβ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ. καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη

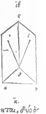


ιθ.

ΕΑΝ δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσαι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ αβ βγ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔσω ἡ βδ, λέγω ὅτι ἡ βδ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ σημείου ἐν μὲν τῷ αβ ἐπιπέδῳ τῇ αδ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ δε. ἐν δὲ τῷ βγ ἐπιπέδῳ τῇ γδ πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ. καὶ ἐπεὶ τὸ αβ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ αβ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ δε, ἡ δε ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ δζ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ δ σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσεται, πλὴν τῆς δβ κοινῆς τομῆς, τῶν αβ βγ ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ, πρὸς ὀρθὰς ἔσαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

ιθ



κ.

ΕΑΝ στερεὰ γωνία, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

κ

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τὸ α, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ βαγ γαδ δαβ. περιεχέσθω, λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ βαγ γαδ δαβ γωνιῶν, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ βαγ γαδ δαβ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ, ἔσω μείζων, ἡ ὑπὸ βαγ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ δαβ γωνίᾳ, τῷ διὰ τῶν βαγ ἐπιπέδῳ ἴση, ἡ ὑπὸ βαε, καὶ κείσθω τῇ αδ ἴση, ἡ αε. καὶ διὰ τοῦ ε σημείου διαχθεῖσα ἡ βεγ, τεμνέτω τὰς αβ αγ εὐθείας,



ἐπὶ τὰ β γ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αβ, δύο αἱ δα αβ δυσὶ ταῖς βα αε ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε ἴση. βάσις ἄρα ἡ δβ βάσει τῇ βε ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ δγ τῆς βγ μείζονές εἰσιν ὧν ἡ δβ, τῇ βε ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δγ λοιπῆς τῆς εγ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἄρα ἡ δγ βάσεως τῆς εγ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ αγ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δαβ τῇ ὑπὸ βαε, ἴση αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ δαγ τῆς ὑπὸ βαγ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ὁσαιοῦν δύο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία. καὶ τὰ ἑξῆς.

κα.

Ἅπασα στερεὰ γωνία, ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία, ἡ πρὸς τῷ α περιεχομένη ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ βαγ γαδ δαβ. λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ βαγ γαδ δαβ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. εἰλήφθω γὰρ ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν αβ αγ αδ τυχόντα σημεῖα τὰ β γ δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ γδ δβ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία, ἡ πρὸς τῷ β, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ γβα αβδ γβδ. δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα αβδ τῆς ὑπὸ γβδ μείζονές εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ βγα αγδ τῆς ὑπὸ βγδ μείζονές εἰσι. καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γδα αδβ, τῆς ὑπὸ γδβ μείζονές εἰσιν αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ γβα αβδ βγα αγδ αδγ αδβ, τριῶν τῶν ὑπὸ γβδ βγδ γδβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ γβδ βδγ δγβ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ γβα



αβδ βγα αγδ αδγ αδβ, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν αβγ αγδ αδβ τριγώνων, αἱ τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ γβα αγβ βαγ αγδ γδα δαγ γδα αδβ δβα βαδ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ αβγ βγα αγδ γδα αδβ δβα ἓξ γωνίαι, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ γαδ δαβ, τρεῖς γωνίαι περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία, ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

κβ.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. αἱ μὲν ὑπὸ αβγ δεζ τῆς ὑπὸ ηθκ. αἱ δὲ ὑπὸ δεζ ηθκ, τῆς ὑπὸ αβγ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ηθκ αβγ τῆς ὑπὸ δεζ. καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αβ βγ δε εζ ηθ θκ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ δζ ηκ. λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι. τουτέστιν ὅτι τῶν αγ δζ ηκ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις

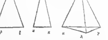
κβ



εἰσί, φανερὸν ὅτι καὶ τῶν αγ δζ ηκ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ θκ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, τῇ ὑπὸ αβγ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ κθλ. καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ βγ δε εζ ηθ θκ, ἴση ἡ θλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ ηλ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς κθ θλ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κθλ ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ κλ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ ηθκ τῆς ὑπὸ δεζ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ κθλ. ἡ ἄρα ὑπὸ ηθλ τῆς ὑπὸ δεζ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ηθ θλ δυσὶ ταῖς δε εζ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία

ἡ ὑπὸ ηθλ, γωνίας ἐστὶ πρὸς τῷ ε μείζων. βάσις ἄρα ἡ κλ βάσεως ἐστὶ δζ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ηκ κλ τῆς κλ μείζονές εἰσι. πολλῷ ἄρα αἱ ηκ κλ τῆς δζ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ αγ. αἱ ας ηκ ἄρα, τῆς λοιπῆς ἐστὶ δζ μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ ηκ δζ ἐστὶ αγ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι. Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ αβ βγ δε εζ ηθ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ δζ ηκ, λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι. τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς β ε θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἔσονται καὶ αἱ αγ δζ ηκ ἴσαι, καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δ' οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς β ε θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς ε θ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αγ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν δζ ηκ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ αγ μετ' ἑκατέρας τῶν δζ ηκ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. λέγω ὅτι καὶ αἱ δζ ηκ τῆς αγ μείζονές εἰσι.

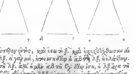


συνεστάτω τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β τῇ ὑπὸ ηθκ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ αβλ καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ βγ δε εζ ηθ θκ ἴση ἡ βλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ λγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ βλ δυσὶ ταῖς ηθ θκ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αλ βάσει τῇ ηκ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς ε θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ αβγ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ηθκ τῇ ὑπὸ αβλ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε γωνία τῆς ὑπὸ λβγ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ λβ βγ δυσὶ ταῖς δε εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ μείζων ἐστί. βάσις ἄρα ἡ δζ ~~βάσεως~~ τῆς λγ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ηκ τῇ αλ. αἱ ἄρα δζ ηκ τῶν αλ λγ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ αλ λγ τῆς αγ μείζονές εἰσι. πολλῷ ἄρα αἱ δζ ηκ, μείζονές εἰσι τῆς αγ. τῶν αγ δζ ηκ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι.

κγ.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι, δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες. δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ αβ βγ δε εζ ηθ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ δζ ηκ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ δζ ηκ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ λμν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αγ τῇ λμ, τὴν δὲ δζ τῇ μν, καὶ ἔτι τὴν ηκ τῇ λν. καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ λμν τρίγωνον κύκλος ὁ λμν. καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον. ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ λμν τριγώνου ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

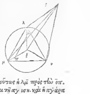


ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ μξ νξ. λέγω ὅτι ἡ αβ μείζων ἐστὶ τῆς λξ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ λξ, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ λξ, ἀλλ' ἡ μὲν αβ τῇ βγ ἐστὶν ἴση, ἡ λξ ἄρα τῇ βγ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ξλ τῇ ξμ, δύο δὴ αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς λξ ξμ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ.

καὶ

καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ λμ ὑπόκειται ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δεζ τῇ ὑπὸ μξν ἐστὶν ἴση, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ τῇ ὑπὸ μξν ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ηθκ τῇ ὑπὸ νξλ. αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ λξμ μξν νξλ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ λξμ μξν νξλ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αβ τῇ λξ ἐστὶν ἴση. λέγω ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ τῆς λξ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ ἴση ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο τῇ ξπ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ολ λοιπῇ τῇ πμ ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἡ λμ τῇ οπ, καὶ ἰσογώνιον τὸ λμξ τῷ οπξ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ξλ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο πρὸς τὴν οπ. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ λξ πρὸς τὴν ξο, οὕτως ἡ λμ πρὸς τὴν οπ. μείζων δὲ ἡ λξ τῆς ξο. μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ τῆς οπ. ἀλλ' ἡ λμ κεῖται τῇ αγ ἴση. καὶ ἡ αγ ἄρα τῆς οπ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς οξ ξπ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ αγ βάσεως τῆς οπ μείζων ἐστί, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ τῆς ὑπὸ μξν, μείζων ἐστίν. ἡ δὲ ὑπὸ ηθκ τῆς ὑπὸ νξλ, αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ, τριῶν τῶν ὑπὸ λξμ νξλ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται. πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ λξμ μξν νξλ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ αβ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς λξ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση, μείζων ἄρα ἡ αβ τῆς λξ, ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ ξ σημείου τῷ τοῦ λμν κύκλου ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς, ἡ ξρ. καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον, τὸ ἀπὸ τῆς ξρ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ ρμ ρν. καὶ ἐπεὶ ἡ ρξ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ λμν κύκλου ἐπίπεδον. καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν λξ μξ νξ ὀρθή ἐστιν, ἡ ρξ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λξ τῇ ξμ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ. βάσις ἄρα ἡ λρ βάσει τῇ ρμ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ρν ἑκατέρᾳ τῶν ρλ ρμ ἴση ἐστίν. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ρλ ρμ ρν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται, τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν λξ ξρ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν λξ ξρ ἴσον ἐστὶ, ἀπὸ τῆς λρ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ λξρ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ρλ, ἴση ἄρα ἡ αβ τῇ ρλ. ἀλλὰ τῇ μὲν αβ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν βγ δε εζ ηθ θκ, τῇ δὲ ρλ ἴση ἑκατέρα τῶν ρμ ρν. ἑκάστη ἄρα τῶν αβ βγ δε εζ ηθ θκ, ἑκάστῃ τῶν ρλ ρμ ρν ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ λρ ρμ δυσὶ ταῖς αβ βγ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ λμ βάσει τῇ αγ ὑπόκειται ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λρμ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δή. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ μρν γωνία τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ λρν τῇ ὑπὸ ηθκ. ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ λρμ μρν λρν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ αβγ δεζ ηθκ στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ ρ περιεχομένη, ὑπὸ τῶν λρμ μρν λρν γωνιῶν.

κγ



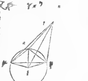
Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς μν, καὶ ἔστω τὸ ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξλ, λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς λξ, εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ λξ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ αβ βγ τουτέστιν αἱ δε εζ δυσὶ ταῖς μξ ξλ τουτέστι τῇ μν ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ μν τῇ δζ κεῖται ἴση. καὶ αἱ δε εζ ἄρα τῇ δζ ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ αβ ἴση τῇ λξ. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων. πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον. ἡ ἄρα αβ μείζων ἐστὶ τῆς λξ. καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ρξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ λμν τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ μξ νξ, λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς λξ. εἰ γὰρ

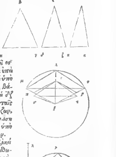


μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς μξ ξλ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ βάσει τῇ μλ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μξλ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ λξν ἐστὶν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ μξν δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ ηθκ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ ηθκ τῆς ὑπὸ δεζ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ὑπὸ μξν ἄρα τῆς ὑπὸ δεζ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δε εζ δυσὶ ταῖς μξ ξν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ βάσει τῇ μν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ μξν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἡ αβ τῇ λξ. ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀνασταθῶμεν τὸ ξρ, καὶ ἴσην αὐτὴν ὑποθώμεθα ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

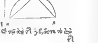


Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ τῆς λξ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ ἴση ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο τῇ ξπ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ολ λοιπῇ τῇ πμ ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ λμ τῇ πο, καὶ ἰσογώνιον τὸ λμξ τρίγωνον τῷ πξο τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λξ πρὸς τὴν λμ, ἡ ξο πρὸς τὴν οπ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ξλ πρὸς τὴν ξο, οὕτως ἡ λμ πρὸς τὴν οπ. μείζων δὲ ἡ λξ τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ τῆς οπ. ἀλλὰ ἡ λμ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ αγ ἄρα τῆς οπ ἐστὶ μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αβ βγ, δυσὶ ταῖς οξ ξπ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ βάσεως τῆς οπ μείζων ἐστὶν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ μείζων ἐστί. ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ξρ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ξο οπ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ορ, δείξομεν ὅτι ἡ ὑπὸ ηθκ γωνίας τῆς ὑπὸ οξρ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ λξ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ξ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ γωνίᾳ ἴση, ἡ ὑπὸ λξσ, τῇ δὲ ὑπὸ ηθκ ἴση, ἡ ὑπὸ λξτ. καὶ κείσθω ἑκατέρᾳ τῶν ξσ ξτ, τῇ οξ ἴση. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ οσ στ στ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ βγ δυσὶ ταῖς οξ ξσ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ οξσ ἴση. βάσις ἄρα ἡ αγ, τουτέστιν ἡ λμ βάσει τῇ οσ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λν τῇ οτ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ μλ λν δυσὶ ταῖς οσ οτ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ μλν γωνίας τῆς ὑπὸ σοτ μείζων ἐστί. βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς στ μείζων ἐστὶν ἀλλὰ ἡ μν τῇ δζ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ δζ ἄρα τῆς στ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ δε εζ, δυσὶ ταῖς σξ ξτ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ δζ βάσεως τῆς στ μείζων, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δεζ γωνίας τῆς ὑπὸ σξτ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ σξτ ταῖς ὑπὸ αβγ ηθκ. ἡ ἄρα ὑπὸ δεζ τῶν ὑπὸ αβγ ηθκ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων ὅπερ ἀδύνατον.





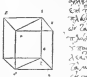
Ον δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ αβ λξ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων, ἡ αβ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ. καὶ εἰς τὸ αβγ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ λξ εὐθείᾳ ἴση ἡ αγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ αβγ γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς



τὸ ἀπὸ τῆς λ γβ μεῖζόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς γβ. ἴση δὲ ἡ αγ τῇ λξ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ μεῖζόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς γβ. ἐὰν οὖν τῇ γβ ἴσην τὴν ξσ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς λξ μεῖζον, τοῦ ἀπὸ τῆς ξσ.

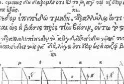
κδ.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. Στερεὸν γὰρ τὸ γδθη ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν αγ ηζ αθ δζ ζβ αε, λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ βη γε ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἡ αβ τῇ γδ. πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βζ αε ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῇ βγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αβ τῇ δγ παράλληλος, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν δζ ζη ηβ βζ αε παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ δζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν αβ τῇ δγ, ἡ δὲ βθ τῇ γζ, δύο δὴ αἱ αβ βθ ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο εὐθείας τὰς δγ γζ ἁπτομένας ἀλλήλων εἰσίν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ γωνία, τῇ ὑπὸ δγζ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ βθ δυσὶ ταῖς δγ γζ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβθ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ ἴση, βάσις ἄρα ἡ αθ βάσει τῇ δζ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβθ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἔστι τοῦ μὲν αβθ διπλάσιον τὸ βη παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ δγζ διπλάσιον, τὸ γε παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα τὸ βη παραλληλόγραμμον τῷ γε παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν αγ τῷ ηζ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ αε τῷ βζ. ἐὰν ἄρα στερεὸν. καὶ τὰ ἑξῆς.



κε.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβγδ, ἐπιπέδῳ τῷ ζε τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ρα δθ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αεζφ βάσις πρὸς τὴν εθγζ βάσιν, οὕτως τὸ αβζφ στερεόν, πρὸς τὸ εηγδ στερεόν. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αθ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν εθ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ μν, τῇ δὲ αε ἴσαι αἱ ακ. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ κφ θχ μσ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ λπ κρ δμ μτ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ λκ κα εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν λο κφ αζ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ κξ κβ αη ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ λψ κπ αρ ἀλλήλοις. ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ εγ θχ μσ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. τὰ δὲ θη θι ιν ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ δθ μω ντ. τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν λπ κρ αυ στερεῶν, τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα, ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα. τὰ ἄρα τρία στερεά, τὰ λπ κρ αυ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ δμ μτ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὁσαπλασίων ἄρα ἡ λζ βάσις τῆς αζ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λυ στερεόν, τοῦ αυ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νζ βάσις τῆς ζθ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ νυ στερεόν, τοῦ θυ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ λζ βάσις τῇ νζ βάσει, ἴσον καὶ τὸ λυ στερεόν, τῷ νυ στερεῷ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ λζ βάσις τῆς νζ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ στερεόν.



φέρῃ, τοῦ νυ στερεοῦ. καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν αζ ζθ, δύο δὲ στερεῶν τῶν αυ υθ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν αζ βάσεως, καὶ τοῦ αυ στερεοῦ, ἥτε * λζ βάσις, καὶ τὸ * νυ στερεόν, καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ λζ βάσις τῆς ηζ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ στερεόν, τοῦ νυ. καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ βάσις, πρὸς τὴν ζθ βάσιν, οὕτω τὸ αυ στερεόν, πρὸς τὸ υθ στερεόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* λζ * λυ habet alterū exemplar sed idem est.

κϛ.

ΠΡὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν εδγ εδζ ζδγ γωνιῶν ἐπιπέδων, δεῖ δὴ πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς δζ τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν εδ δγ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ζη. καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ μὲν ὑπὸ εδγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ δὲ ὑπὸ εδη ἴση, ἡ ὑπὸ βακ. καὶ κείσθω τῇ δη ἴση ἡ ακ. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κ σημείου τῷ διὰ τῶν βαλ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἡ κθ. καὶ κείσθω ἴση τῇ ηζ ἡ κθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θα, λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ α στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν βαλ βαθ θαλ γωνιῶν, ἴση ἐστί, τῇ πρὸς τῷ δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν εδγ εδζ ζδγ γωνιῶν. ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ κβ ζε ηε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζη ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ζηδ ζηε γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκα θκβ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα αβ, δυσὶ ταῖς ηδ δε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βκ βάσει τῇ εη ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ τῇ ζη ἴση. καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν ἴση ἄρα καὶ ἡ θβ τῇ ζε. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ακ κθ δυσὶ ταῖς δη ηζ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αθ βάσει τῇ δζ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ τῇ δε ἴση. δύο δὴ αἱ θα αβ δυσὶ ταῖς ζδ δε ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ θβ βάσει τῇ ζε ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαθ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση* διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ὑπὸ θαλ τῇ ὑπὸ ζδγ ἴση ἐστίν. ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς αλ δγ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς κλ θλ ηγ ζγ. ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βαλ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εδγ ἐστὶν ἴση ὧν ἡ ὑπὸ βακ τῇ ὑπὸ εδη ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ καλ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηδγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα αλ δυσὶ ταῖς ηδ δγ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ κλ βάσει τῇ ηγ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ τῇ ηζ ἴση. δύο δὴ αἱ λκ κθ δυσὶ ταῖς γη ηζ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ θλ βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα αλ δυσὶ ταῖς ζδ δγ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ θλ βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θαλ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδγ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαλ τῇ ὑπὸ εδγ ἴση. πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴση στερεὰ γωνία συνέσταται.

κϛ



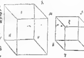
Sic habet Latinum. διὰ τὰ ὑπὸ ζδγ, sed codē scandunt.

κζ.

ΑΠὸ τῆς δοθείσης εὐθείας, τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

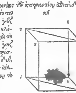
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ. τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ δγ. δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς αβ, τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ δγ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν βαθ θακ καβ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ βαθ γωνίαν, τῇ ὑπὸ εγζ. τὴν δὲ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εγη. καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ καθ, τῇ ὑπὸ ηγζ καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ εγ πρὸς τὴν γη, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ακ. ὡς δὲ ἡ

δὲ ἡ κγ πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ κα πρὸς τὴν αθ. διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κγ πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αθ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ βθ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ αλ στερεόν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εγ πρὸς τὴν γκ, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν ακ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ εγκ βακ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ κε παραλληλόγραμμον τῷ κβ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κθ παραλληλόγραμμον, τῷ κζ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. καὶ ἔτι τὸ ζε τῷ θβ. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ γδ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ αλ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ γδ στερεόν, ὅλῳ τῷ αλ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν. ἀπὸ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς αβ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ γδ. καὶ τὰ ἑξῆς.



κη.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβ, ἐπιπέδῳ τῷ γδεζ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, τὰς γζ δε, λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ αβ στερεόν, ὑπὸ τοῦ γδ ἐπιπέδου. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ, τὸ μὲν γηζ τρίγωνον, τῷ γβζ τριγώνῳ, τὸ δὲ αδε τῷ δεθ. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γα παραλληλόγραμμον τῷ βε ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ηε τῷ γθ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν γηζ αδε, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ηε αγ γε ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ, ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν γζβ δεθ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν γθ βε γε. ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται, τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ αβ στερεόν, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ γδεζ ἐπιπέδου.

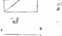


κη

κθ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τῆς αβ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γμ γν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ αζ αη λμ λν γδ γε θβ βκ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν, τῶν ζν δκ, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γμ στερεόν, τῷ γν στερεῷ. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν γθ γκ, ἴση ἐστὶν ἡ γβ ἑκατέρᾳ τῶν δθ εκ. ὥστε καὶ ἡ δθ τῇ εκ ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ εθ. λοιπὴ ἄρα ἡ δε λοιπῇ τῇ θκ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ τὸ δεγ τρίγωνον τῷ θκβ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. τὸ δὲ δη παραλληλόγραμμον τῷ θν παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αηζ τρίγωνον τῷ λμν τριγώνῳ ἴσον ἐστί. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γζ παραλληλόγραμμον τῷ βμ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ γη τῷ βν. ἀπεναντίον γάρ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν αζη δεγ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν αδ δη ηγ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν λμν θβκ. τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν βμ νθ βν, κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν. οὗ βάσις μὲν τὸ αβ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ηεθμ. ὅλον ἄρα τὸ γμ στερεὸν παραλληλεπί-



κθ

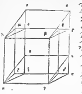


ραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ δγ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί, τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὄντα στερεὰ βάσεως. καὶ τὰ ἑξῆς.

λ.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

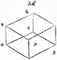
Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς αβ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ γμ γν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ αζ αη λμ λν γδ γε θβ βκ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ γμ στερεὸν τῷ γν στερεῷ, ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ [illegible], καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις [illegible] ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν, ~~[illegible]~~ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αξ λο ετ βς, ἴσον δή ἐστι τὸ γμ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ αγβλ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ζδθμ τῷ γο στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ αγβλ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ξπρο. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, τῆς αγβλ. καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ αζ αξ λμ λο γδ γπ βθ βρ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν ζο δρ. ἀλλὰ τὸ γο στερεὸν οὗ βάσις μὲν τὸ αγβλ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ξπρο ἴσον ἐστὶ τῷ γν στερεῷ οὗ βάσις μὲν τὸ αγβλ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ηεκν. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς αγβλ. καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ αη αξ γε γπ λν λο βκ βρ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ηπ νρ. ὥστε καὶ τὸ γμ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γν στερεῷ. τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσί, καὶ τὰ ἑξῆς.



λα

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ [illegible] ἀλλήλοις ἐστίν. Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ γδ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ αε γζ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αε στερεὸν, τῷ γζ στερεῷ ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ θκ βε αη λμ οπ δζ ξρ ρσ πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ γδ βάσεσιν * ἡ δὲ ὑπὸ αλβ, τῇ ὑπὸ γρδ, ἄνισος, * καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ γρ εὐθεῖα ἡ ρτ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ρτ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ρ, τῇ ὑπὸ αλβ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τρυ, καὶ κείσθω τῇ μὲν αλ ἴση ἡ ρτ, τῇ δὲ λβ ἴση ἡ ρυ, καὶ πρὸς τῷ υ σημείῳ τῇ ρτ παράλληλος ἀνεστάτω ἡ χυ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ρχ βάσις, καὶ τὸ ψυ στερεόν. * καὶ ἐπεὶ δύο αἱ τρ ρυ δυσὶ ταῖς αλ λβ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ρχ παραλληλόγραμμον, τῷ θλ τῷ παραλληλογράμμῳ.

λε



καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστίν, ἡ μὲν αλ, τῇ ρτ, ἡ δὲ λμ, τῇ ρσ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι, τὸ ρψ παραλληλόγραμμον, τῷ αμ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λε τῷ συ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ αε στερεοῦ, τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ψυ στερεοῦ, ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον, ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ αε στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅλῳ τῷ * ψυ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἴσον ἐστί. διήχθωσαν αἱ δρ χυ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις, κατὰ τὸ ω. καὶ διὰ τοῦ τ τῇ δω παράλληλος ἤχθω ἡ τ[illegible], καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ττ καὶ ἡ οδ, καὶ συνεζεύχθω κατὰ τὸ Α. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ



Varia exemplar latinum, sed eodem recidunt.

Ponit enim exemplū in nō prorsus similibus solidis, quod interpres latinus hic omisit.

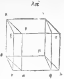


Stantes hic latinum addidit, uerū nihil est.

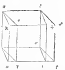
αβ latinū habet sed perinde est.

ρφ latinū habet sed est idē.

ων ετ στερεά, ἴσον δή ἐστι τὸ ψω στερεόν. οὗ βάσις μέν ἐστι, τὸ ρψ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ωτ, τῷ ψυ στερεῷ οὗ βάσις ἐστὶ τὸ ρψ παραλληλόγραμμον. ἀπεναντίον δὲ τὸ υφ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ τῆς ρψ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ρω ρυ τ τ τχ σξ σν ψπ ψφ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσὶν εὐθειῶν τῆς ωχ φρ. ἀλλὰ τὸ ψυ στερεὸν τῷ αε ἴσον ἐστί. καὶ τὸ ψω ἄρα στερεὸν τῷ αε στερεῷ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ρυχτ παραλληλόγραμμον, τῷ ωτ παραλληλογράμμῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρτ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ρτ ωχ, ἀλλὰ τὸ ρυχτ, τῷ γδ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ αβ, καὶ τὸ ωτ παραλληλόγραμμον, τῷ γδ ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ δτ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γδ βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ πρὸς τὴν δτ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γι, ἐπιπέδῳ τῷ ρζ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ γδ βάσις πρὸς τὴν δτ βάσιν, οὕτως τὸ γζ στερεόν, πρὸς τὸ ρι στερεόν, διὰ τὰ αὐτὰ δή, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῷ ωι ἐπιπέδῳ, τῷ ρψ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ωτ βάσις πρὸς τὴν τδ βάσιν, οὕτως τὸ ωψ στερεόν, πρὸς τὸ ρι στερεόν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ γδ βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ, πρὸς τὴν τδ. καὶ ὡς ἄρα τὸ γζ στερεὸν πρὸς τὸ ρι στερεόν, οὕτως τὸ ωψ στερεόν, πρὸς τὸ ρι στερεόν. ἑκάτερον ἄρα τῶν γζ ωψ στερεῶν, πρὸς τὸ ρι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα τὸ γζ στερεόν, τῷ ωψ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ωψ τῷ αε ἐδείχθη ἴσον. καὶ τὸ αε ἄρα τῷ γζ ἐστὶν ἴσον. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ αη θκ βε λμ γν οπ δζ ρσ πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ γδ βάσεσι, λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αε στερεόν, τῷ γζ στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ ε η μ π ζ ν σ σημείων, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον κάθετοι, αἱ κξ ετ ηυ μφ πχ ζψ νω σι. καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὰ ξ τ υ φ χ ψ ω ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ξτ ξυ μφ ... χψ χω ωι ψι. ἴσον δή ἐστι τὸ κφ στερεὸν τῷ πι στερεῷ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν κμ πσ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν τὸ κφ στερεὸν τῷ αε στερεῷ ἴσον ἐστί. τὸ δὲ πι τῷ γζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ αε ἄρα στερεόν, τῷ γζ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεά. καὶ τὰ ἑξῆς.



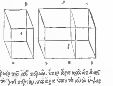
λα



λβ.

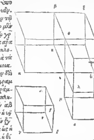
Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ αβ γδ, λέγω ὅτι τὰ αβ γδ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. τουτέστιν ὡς ἡ αε βάσις, πρὸς τὴν γζ βάσιν, οὕτως τὸ αβ στερεόν, πρὸς τὸ γδ στερεόν. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ζη τῷ αε ἴσον τὸ ζθ. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ζθ ὕψους τοῦ αὐτοῦ τῷ γδ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ηκ. ἴσον δή ἐστι τὸ αβ στερεὸν τῷ ηκ στερεῷ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν αε ζθ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γκ ἐπιπέδῳ τῷ δη τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θζ βάσις πρὸς τὴν γζ βάσιν, οὕτως τὸ θδ στερεόν, πρὸς τὸ δγ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ζθ βάσις τῇ αε βάσει, τὸ δὲ ηκ στερεὸν τῷ αβ στερεῷ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ αε βάσις, πρὸς τὴν γζ βάσιν, οὕτως τὸ αβ στερεόν, πρὸς τὸ γδ στερεόν. τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

λβ



λγ.

Τ Α ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αβ γδ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ αε τῇ γζ. λέγω ὅτι τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ γδ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε, πρὸς τὴν γζ. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς αε, κε, θε, αἱ εκ, ελ, εμ, καὶ κείσθω τῇ μὲν γζ ἴση ἡ εκ, τῇ δὲ ζυ ἴση ἡ ελ, καὶ ἔτι τῇ ζρ ἴση ἡ εμ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ κλ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ κο στερεόν. ἐπεὶ δύο αἱ κε, ελ δυσὶ ταῖς γζ, ζυ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κελ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γζυ ἐστὶν ἴση. ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ αεκ, τῇ ὑπὸ γζυ ἐστὶν ἴση. διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβ γδ στερεῶν. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ κλ παραλληλόγραμμον τῷ γυ παραλληλογράμμῳ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κμ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ γρ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἔτι τὸ εο, τῷ δζ. τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ κο στερεοῦ, τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ γδ στερεοῦ, ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ κο στερεόν, ὅλῳ τῷ γδ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ηκ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ηκ κλ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ αβ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ εξ λπ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν αβ γδ στερεῶν, ἐστὶν ὡς ἡ αε πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν ζυ, καὶ ἡ εβ πρὸς τὴν ζρ. ἴση δὲ ἡ μὲν γζ τῇ εκ, ἡ δὲ ζυ τῇ ελ, ἡ δὲ ζρ, τῇ εμ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ θε πρὸς τὴν ελ. καὶ ἡ βε πρὸς τὴν εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αε πρὸς τὴν εκ, οὕτως τὸ αη παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ηκ παραλληλόγραμμον. ὡς δὲ ἡ εκ πρὸς τὴν ελ, οὕτως τὸ ηκ πρὸς τὸ κλ. ὡς δὲ ἡ θε πρὸς τὴν εμ, οὕτως τὸ πε πρὸς τὸ κμ. καὶ ὡς ἄρα τὸ αη παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ηκ, οὕτως τὸ ηκ πρὸς τὸ κλ, καὶ τὸ πε πρὸς τὸ κμ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αη πρὸς τὸ ηκ, οὕτως τὸ αβ στερεόν, πρὸς τὸ εξ στερεόν. ὡς δὲ τὸ ηκ πρὸς τὸ κλ, οὕτως τὸ ξε στερεὸν πρὸς τὸ πλ στερεόν. ὡς δὲ τὸ πε πρὸς τὸ κμ οὕτως τὸ πλ στερεὸν πρὸς τὸ κο στερεόν. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ εξ, οὕτως τὸ εξ πρὸς τὸ πλ, καὶ τὸ πλ πρὸς τὸ κο. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ τὸ αβ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ κο τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ αβ πρὸς τὸ εξ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ πρὸς τὸ εξ, οὕτως τὸ αη παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ηκ. καὶ ἡ αε εὐθεῖα πρὸς τὴν εκ. ὥστε καὶ τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ κο τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε πρὸς τὴν εκ. ἴσον δὲ τὸ μὲν κο στερεὸν τῷ γδ στερεῷ. ἡ δὲ εκ εὐθεῖα, τῇ γζ. καὶ τὸ αβ ἄρα στερεόν, πρὸς τὸ γδ στερεόν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ αε πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Πόρισμα.

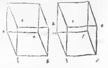


Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

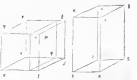
λδ.

Τ Ω͂ν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις, ταῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αβ γδ, λέγω ὅτι τῶν αβ γδ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εθ βάσις, πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ

ρεοῦ ὕψος. ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ αη εζ λβ θκ γμ νξ οδ πρ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως ἡ γμ πρὸς τὴν αη. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ εθ βάσις τῇ νπ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ὡς ἡ γμ, τῇ αη ἴση. εἰ γὰρ τῶν εθ νπ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ αη γμ ὕψη ἴσα, οὐδ᾽ ἄρα τὸ αβ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ γδ, ὑπόκειται δὲ ἴσον. οὐκ ἄρα ἄνισόν τὸ γμ ὕψος τῷ αη ὕψει, ἴσον ἄρα. καὶ ἔσται ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ, οὕτως ἡ γμ πρὸς τὴν αη. καὶ φανερὸν ὅτι τῶν αβ γδ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ εθ βάσις τῇ νπ βάσει, ἀλλ᾽ ἔστω μείζων ἡ εθ. ἔστι δὲ καὶ τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ ἴσον. μείζων ἄρα καὶ ἡ γμ τῆς αη. εἰ γὰρ μή, οὐδ᾽ ἄρα πάλιν τὰ αβ γδ στερεὰ ἴσα ἔσται. ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω οὖν τῇ αη ἴση ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς νπ,



ὕψους δὲ τοῦ γτ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ φγ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αβ στερεὸν, τῷ γδ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ φγ. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν, οὕτως τὸ γδ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν, οὕτως ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν. ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ αβ γφ στερεά. ὡς δὲ τὸ γδ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν, οὕτως ἡ μπ βάσις πρὸς τὴν πτ βάσιν. καὶ ἡ μγ πρὸς τὴν γτ. καὶ ὡς ἄρα ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως ἡ μγ πρὸς τὴν γτ. ἴση δὲ ἡ γτ τῇ αη. καὶ ὡς ἄρα ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως ἡ μγ πρὸς τὴν αη. τῶν αβ γδ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Πάλιν δὴ τῶν αβ γδ στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. ἔστω ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ. ἔστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ εθ βάσις τῇ νπ βάσει, καί ἐστιν ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος, τῷ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος,



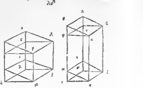
ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἴσον ἄρα καὶ τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ. μὴ ἔστω δὴ ἡ εθ βάσις τῇ νπ ἴση, ἀλλ᾽ ἔστω μείζων ἡ εθ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος, τοῦ αβ στερεοῦ ὕψους. τουτέστιν ἡ γμ τῆς αη. κείσθω τῇ αη ἴση πάλιν ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ γφ στερεόν. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως ἡ μγ πρὸς τὴν αη, ἴση δὲ ἡ αη τῇ γτ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως ἡ μγ πρὸς τὴν γτ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν. ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ αβ γφ στερεά. ὡς δὲ ἡ γμ πρὸς τὴν γτ, οὕτως ἥτε μπ βάσις πρὸς τὴν πτ βάσιν, καὶ τὸ γδ στερεὸν, πρὸς τὸ γφ. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ στερεὸν πρὸς τὸ γφ, οὕτως τὸ γδ στερεὸν πρὸς τὸ γφ στερεόν. ἑκάτερον ἄρα τῶν αβ γδ πρὸς τὸ γφ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ζε βλ ηα θκ ξν δο μγ ρπ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν ζ η β κ ξ μ δ ρ σημείων, ἐπὶ τὰ τῶν εθ νπ βάσεων ἐπίπεδα κάθετοι. καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις, κατὰ τὰ σ τ υ φ χ ψ ω ς σημεῖα. καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ζφ ξω στερεά, λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν αβ γδ στερεῶν, ἀντιπεπόν-

 βασιν

βάσιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ αε στερεὸν, τῷ γδ στερεῷ, ἀλλὰ καὶ τὸ μὲν αε τῷ βτ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ζκ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

λδ



τὸ δὲ δγ στερεὸν τῷ δψ ἴσον. ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, καὶ τὸ βτ ἄρα στερεὸν τῷ δψ στερεῷ ἴσον ἐστί. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ βάσις πρὸς τὴν ξρ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ δψ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βτ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ζκ βάσις τῇ εθ βάσει, ἡ δὲ ξρ βάσις τῇ νπ βάσει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ δψ στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ βτ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν δψ βτ στερεῶν, καὶ τῶν δγ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ δγ στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος. τῶν αβ γδ στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Πάλιν δὴ τῶν αβ γδ στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστω ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ στερεὸν τῷ γδ στερεῷ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ εθ βάσις πρὸς τὴν νπ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν εθ βάσις τῇ ζκ βάσει, ἡ δὲ νπ τῇ ξρ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ βάσις, πρὸς τὴν ξρ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ γδ στερεοῦ ὕψος, πρὸς τὸ τοῦ αβ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν αβ γδ στερεῶν, καὶ τῶν βτ δψ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ βάσις πρὸς τὴν ξρ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ δψ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βτ στερεοῦ ὕψος. τῶν βτ δψ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα τὸ βτ στερεὸν τῷ δψ στερεῷ. ἀλλὰ τῷ μὲν βτ τὸ βε ἴσον ἐστίν. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ τῆς ζκ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. τὸ δὲ δψ στερεὸν τῷ δγ στερεῷ ἴσον ἐστίν. ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσὶ τῆς ξρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις. καὶ τὸ αε ἄρα στερεὸν τῷ γδ στερεῷ ἐστὶν ἴσον.

λε.

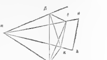
ΕΑΝ ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν, ἴσας γωνίας περιέχουσαι, μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων. Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ βαγ εδζ, ἀπὸ δὲ τῶν α δ σημείων, μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ αη δμ ἴσας περιέχουσαι γωνίας, μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ μδε τῇ ὑπὸ ηαβ, τὴν δὲ ὑπὸ μδζ τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν αη δμ τυχόντα σημεῖα, τὰ η μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν η μ σημείων, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν βαγ εδζ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ηλ μν, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ ν λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ λα νδ, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηαλ γωνία, τῇ ὑπὸ μδν γωνίᾳ. κείσθω τῇ δμ ἴση ἡ αθ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ θ σημείου τῇ ηλ παράλληλος ἡ

θκ.



βκ. ἡ δὲ ηλ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ ἐπίπεδον, καὶ ἡ βκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ν σημείων ἐπὶ τὰς αβ, αγ, δζ, δε εὐθείας κάθετοι, αἱ κγ, νζ, κβ, νε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θγ, γβ, μζ, ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς θα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θκ, κα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κγ, γα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θα ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θκ, κγ, γα, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν θκ, κγ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θγ, γα. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θγα γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δζμ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγθ γωνία τῇ ὑπὸ δζμ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θαγ τῇ ὑπὸ μδζ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι, τὰ μδζ, θαγ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν θα, τῇ δμ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἡ αγ τῇ δζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ αβ τῇ δε ἴση ἐστίν, ὅπως ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, με. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ακ, κθ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βκ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βκ, κθ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αθ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῆς βκ, κθ ἴσον ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῆς βθ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ θκβ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν θκ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αθ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῆς αβ, βθ. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δεμ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαθ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδμ, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἡ αθ τῇ δμ ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ τῇ δε. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν, ἡ μὲν αγ τῇ δζ, ἡ δὲ αβ τῇ δε, δύο δὴ αἱ γα, αβ δυσὶ ταῖς ζδ, δε ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γαβ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδε ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ βγ βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία τῇ ὑπὸ δζε, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ακγ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ δζν ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βγκ λοιπῇ τῇ ὑπὸ εζν ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ γβκ γωνία τῇ ὑπὸ ζεν ἴση ἐστίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ βγκ, εζν τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν βγ τῇ εζ. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν. ἴση ἄρα ἡ γκ τῇ ζν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ τῇ δζ ἴση. δύο δὴ αἱ αγ, γκ δυσὶ ταῖς δζ, ζν ἴσαι εἰσί, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ ακ βάσει τῇ δν ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αθ τῇ δμ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ τῷ ἀπὸ τῆς δμ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αθ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ακ, κθ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ακθ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δμ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ δνμ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ακ, κθ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νμ. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ακ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δν, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κθ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς νμ. ἴση ἄρα ἡ θκ τῇ μν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, ακ δυσὶ ταῖς μδ, δν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ θκ βάσει τῇ νμ ἐδείχθη ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θακ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μδν ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε





Πόρισμα.

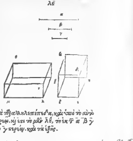
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

λϛ.

ΕΑΝ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α, β, γ, ὡς ἡ α πρὸς τὴν β οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ. λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῶν α, β, γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ

τῷ ε, περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ δεη, ηεζ, ζεδ. καὶ κείσθω τῇ μὲν β ἴση, ἑκάστη τῶν δε, ηε, εζ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ εκ στερεὸν παραλληλεπίπεδον. τῇ δὲ α κείσθω ἴση ἡ λμ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ λμ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ λ, τῇ πρὸς τῷ ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση περιεχομένη ὑπὸ τῶν νλξ, ξλμ, μλν. καὶ κείσθω τῇ μὲν β ἴση ἡ λξ, τῇ δὲ γ ἴση ἡ λν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ α πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ μὲν α τῇ λμ, ἡ δὲ β ἑκάστῃ τῶν λξ, εζ, εη, εδ, ἡ δὲ γ τῇ λν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν λν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ μλν, δεζ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν, ἴσον ἄρα τὸ μν παραλληλόγραμμον τῷ δζ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ δεζ, νλμ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ λξ, εη, ἴσαι τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν η, ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν νλμ, δεζ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὥστε τὰ λθ, εκ στερεὰ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα τὸ θλ στερεὸν τῷ εκ στερεῷ. καὶ ἔστι τὸ μὲν λθ, τὸ ἐκ τῶν α β γ στερεόν. τὸ δὲ εκ, τὸ ἀπὸ τῆς β στερεόν. τὸ ἄρα ἐκ τῶν α β γ στερεόν. καὶ τὰ ἑξῆς.

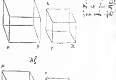
λϛ



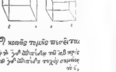
λζ.

ΕΑΝ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα, ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ αβ, γδ, εζ, ηθ, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν αβ, γδ, εζ, ηθ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ κα, λγ, με, νη, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ κα, πρὸς τὸ λγ, οὕτως τὸ με πρὸς τὸ νη. ἐπεὶ γάρ ἐστι τὸ κα στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ λγ ὅμοιον, τὸ κα ἄρα πρὸς τὸ λγ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς τὴν γδ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ τὸ με πρὸς τὸ νη τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ. καί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ. ὡς ἄρα τὸ ακ πρὸς τὸ λγ, οὕτως τὸ με, πρὸς τὸ νη. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ακ στερεόν, πρὸς τὸ λγ στερεόν, οὕτως τὸ με στερεόν, πρὸς τὸ νη, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβ εὐθεῖα πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ κα πρὸς τὸ λγ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, ἔχει δὲ καὶ τὸ με πρὸς τὸ νη τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ, καί ἐστιν ὡς τὸ κα πρὸς τὸ λγ, οὕτως τὸ με πρὸς τὸ νη, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ηθ.

λζ



λϛ

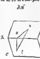


λη.

ΕΑΝ ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. Ἐπίπεδον γὰρ τὸ γδ ἐπιπέδῳ τῷ αβ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ αδ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ γδ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ ε,

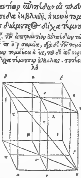
τὸ ε, λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ αβ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ἐπὶ τὴν δα πεσεῖται. μὴ γὰρ ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτός, ὡς ἡ εζ, καὶ συμβαλλέτω τῷ αβ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὴν δα, ἐν τῷ αβ ἐπιπέδῳ, κάθετος ἤχθω ἡ ζη, ἥτις καὶ τῷ γδ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη. ἐπεὶ οὖν ἡ ζη ἐπὶ τὸ γδ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ εη, οὖσα ἐν τῷ γδ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζηε γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ εζ τῷ αβ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ εζη ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ εζη αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὸ αβ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς δα. ἐπὶ τὴν δα ἄρα πεσεῖται.

λη



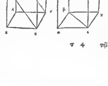
λθ.

ΕΑΝ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου, τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αζ, τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν γζ αθ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ λ μ ν ξ π ο ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ κν ξρ, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ υσ, τοῦ δὲ αζ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ δη, λέγω ὅτι αἱ υσ δη δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν υτ τῇ τσ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ δτ τῇ τη. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δυ υε βσ ση. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δξ τῇ οε, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δξυ υοε ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δξ τῇ οε, ἡ δὲ ξυ τῇ υο, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ δυ βάσει τῇ υε ἴση ἐστί, τὸ δὲ δξυ τρίγωνον, τῷ υοε τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ξυδ γωνία τῇ ὑπὸ ουε. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ δυε. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ βση εὐθεῖά ἐστι. καὶ ἴση ἡ βσ τῇ ση. καὶ ἐπεὶ ἡ γα τῇ δβ ἴση ἐστί, καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ γα καὶ τῇ κε ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἡ δβ ἄρα τῇ εκ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ δε κβ. παράλληλος ἄρα ἡ δε τῇ βκ. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ δ υ η σ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δη υσ, ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ, αἱ δη υσ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε τῇ βη, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδτ γωνία τῇ ὑπὸ βητ. ἐναλλὰξ γάρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δτυ τῇ ὑπὸ ητσ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ δτυ ητσ τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα. καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν δυ τῇ ησ. ἡμίσεια γάρ εἰσι τῶν δε βη. καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν δτ τῇ τη, ἡ δὲ υτ, τῇ τσ. ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπιπέδου. καὶ τὰ ἑξῆς.



μ.

ΕΑΝ ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ αβγδεζ ηθκλμν, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ αζ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ηθκ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ αζ παραλληλόγραμμον τοῦ ηθκ τριγώνου, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδεζ πρίσμα



Latinum γδ, sed peride est

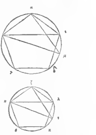
τῷ ηθκλμν πρίσματι. συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ αζ * ηο στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ αζ παραλληλόγραμμον τοῦ ηθκ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ θξ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ηθκ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ παραλληλόγραμμον, τῷ θξ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ στερεὸν τῷ ηο στερεῷ. καί ἐστι τοῦ μὲν αζ στερεοῦ ἥμισυ τὸ αβγδεζ πρίσμα, τοῦ δὲ ηο στερεοῦ ἥμισυ τὸ ηθκλμν πρίσμα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγδεζ πρίσμα τῷ ηθκλμν πρίσματι. ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ. καὶ τὰ ἑξῆς.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΙΒ, ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

α΄.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδε ζηθκλ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ αβγδε ζηθκλ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ βμ ην, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βμ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην τετράγωνον, οὕτως τὸ αβγδε πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε αμ ηλ ζν. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγδε πολύγωνον τῷ ζηθκλ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαε γωνία τῇ ὑπὸ ηζλ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ ηζ πρὸς τὴν ζλ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ βαε ηζλ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ βαε τῇ ὑπὸ ηζλ. περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβε τρίγωνον τῷ ζηλ τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεβ γωνία τῇ ὑπὸ ζλη. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ αεβ τῇ ὑπὸ αμβ ἴση ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν. ἡ δὲ ὑπὸ τῇ ζλη, τῇ ὑπὸ ζνη. καὶ ἡ ὑπὸ αμβ ἄρα τῇ ὑπὸ ζνη ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ βαμ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ηζν ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ τρίγωνον τῷ ζνη τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ βμ πρὸς τὴν ην, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν ηζ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς βμ πρὸς τὴν ην λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς βμ τετραγώνου, πρὸς τὸ ἀπὸ ην τετράγωνον. τοῦ δὲ τῆς βα πρὸς τὴν ηζ διπλασίων ἐστίν, ὁ τοῦ αβγδε πολυγώνου, πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βμ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, οὕτως τὸ αβγδε πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ πολύγωνον. τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

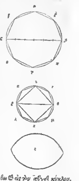


β΄.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδ εζηθ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ βδ ζθ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος, πρὸς τὸν εζηθ κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος

κλ.

κλος, πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ εζηθ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ σ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ κύκλον τετράγωνον, τὸ εζηθ. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηθ κύκλου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν εζηθ σημείων, ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ εζηθ τετράγωνον. τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος. ὥστε τὸ εζηθ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ εζηθ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ εζ ζη ηθ θε περιφέρειαι κατὰ τὰ κ λ μ ν σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ κζ ζλ λη ημ μθ θν νε. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εκζ ζλη θνε τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν κ λ μ ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν, τὰ ἀπὸ τῶν εζ ζη ηθ θε εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν εκζ ζλη ημθ θνε τριγώνων, ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. ἀλλὰ τὸ καθ' αὐτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου, ὥστε ἕκαστον τῶν εκζ ζλη ημθ θνε τριγώνων, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ κύκλος, τοῦ σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ ι, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους, λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εκ κζ ζλ λη ημ μθ θν νε τμήματα, τοῦ εζηθ κύκλου. ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ κύκλος τοῦ σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ εκζλημθν πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον, τῷ εκζλημθν πολυγώνῳ, ὅμοιον πολύγωνον τὸ αξβογπδρ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ τετράγωνον, οὕτως τὸ αξβογπδρ πολύγωνον πρὸς τὸ εκζλημθν πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸ σ χωρίον, καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸ σ χωρίον, οὕτως τὸ αξβογπδρ πολύγωνον πρὸς τὸ εκζλημθν πολύγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα. ὡς ὁ αβγδ κύκλος, πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ σ χωρίον, πρὸς τὸ εκζλημθν πολύγωνον. μείζων δὲ αβγδ κύκλος, τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ σ χωρίον, τοῦ εκζλημθν πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ κύκλου χωρίον.

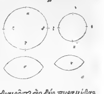


Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ οὕτως ὁ αβγδ κύκλος, πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ σ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως τὸ σ χωρίον πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἀλλ' ὡς τὸ σ χωρίον πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ κύκλου χωρίον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζθ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος, πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ τετράγωνον, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον. οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Λέγω δὴ ὅτι τοῦ σ

χωρίου

χωρίου μεῖζον ὄντος τοῦ εζηθ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ σ χωρίον πρὸς τὸ αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος, πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ αβγδ κύκλου χωρίου. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ σ χωρίον πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος πρὸς τὸ τ χωρίον. λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ τ χωρίον τοῦ αβγδ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ σ χωρίον πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος πρὸς τὸ τ χωρίον, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ σ χωρίον πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸ τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ σ τοῦ εζηθ κύκλου. μείζων ἄρα καὶ ὁ αβγδ κύκλος τοῦ τ χωρίου. ὥστε ὡς τὸ σ χωρίον, πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ κύκλου χωρίον.

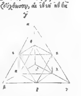
β



γ.

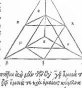
Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα, μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Ἔστω πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, λέγω ὅτι ἡ αβγδ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα, μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. τετμήσθωσαν γὰρ αἱ αβ βγ γα αδ δβ δγ δίχα, κατὰ τὰ ε ζ η θ κ λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εθ εη ηθ θκ κλ λθ εκ κζ ζη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε τῇ εβ, ἡ δὲ αθ τῇ θδ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εθ τῇ δβ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ τῇ αβ παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ θεβκ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θκ τῇ εβ. ἀλλὰ ἡ εβ τῇ αε ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αε ἄρα τῇ θκ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ αθ τῇ θδ ἴση. δύο δὴ αἱ αε αθ, δυσὶ ταῖς κθ θδ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εαθ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κθδ ἴση, βάσις ἄρα ἡ εθ βάσει τῇ κδ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αεθ τρίγωνον τῷ θκδ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αθη τρίγωνον τῷ θλδ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ εθ θη, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κδ δλ εἰσίν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εθη γωνία τῇ ὑπὸ κδλ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ εθ θη δυσὶ ταῖς κδ δλ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κδλ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ εη βάσει τῇ κλ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ εθη τρίγωνον τῷ κδλ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ τὸ αεη τρίγωνον τῷ θκλ τριγώνῳ ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι ἧς βάσις μὲν, τὸ θκλ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αδβ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν αβ ἦκται ἡ θκ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αδβ τρίγωνον τῷ δθκ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ αδβ τρίγωνον τῷ δθκ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν δβγ τρίγωνον τῷ δκλ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι. τὸ δὲ αδγ τῷ δθλ τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ βα αγ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κθ θλ εἰσίν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ γωνία τῇ ὑπὸ κθλ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ οὕτως ἡ κθ πρὸς τὴν θλ. ὅμοιον ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον τῷ θκλ τριγώνῳ, καὶ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ θκλ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ θκλ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεη τρίγωνον,

γ



γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν αεηθ θκλδ πυραμίδων, ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ αβγδ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βζ τῇ ζγ, διπλάσιον ἐστὶ τὸ εβζη παραλληλόγραμμον τοῦ ηζγ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ ἐὰν δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ ὦσι, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν βκζ εθη, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν εβζη εβκθ κθζη, τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ηζγ θκλ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν κζγλ λγηθ θκζη. καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ εβζη παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ηζγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ κλθ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων ὧν βάσεις μὲν τὰ αεη θκλ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ θ δ σημεῖα. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς εζ εκ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα οὗ βάσις τὸ εβζη παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος ἧς βάσις μὲν τὸ εβζ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κ σημεῖον. ἀλλ' ὡς ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μὲν τὸ εβζ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κ σημεῖον ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ εβζη παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ εὐθεῖα μεῖζόν ἐστι πυραμίδος ἧς βάσις μὲν τὸ αεη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ εβζη παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ θκ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι οὗ βάσις μὲν τὸ ηζγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ θκλ τρίγωνον, ἡ δὲ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι ἧς βάσις μὲν τὸ θκλ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι, τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ αεη θκλ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ θ δ σημεῖα. ἡ ἄρα ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ αβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. καὶ τὰ δύο πρίσματα, μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. δ.

ΕΑΝ ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν, εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγ δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ αβγ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βξ τῇ ξγ, ἡ δὲ αλ τῇ λγ. παράλληλος ἄρα ἡ ξλ τῇ αβ. καὶ ὅμοιον τὸ αβγ τρίγωνον τῷ λξγ τριγώνῳ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ δεζ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ρφζ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν βγ τῆς γξ, ἡ δὲ εζ τῆς ζφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν γξ, οὕτως ἡ εζ πρὸς τὴν ζφ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν βγ γξ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ αβγ λξγ, ἀπὸ δὲ τῶν εζ ζφ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐ-



θύγραμμα

εὐθύγραμμα τὰ δεζ, ρφζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ λξγ τρίγωνον, οὕτως τὸ δεζ τρίγωνον πρὸς τὸ ρφζ τρίγωνον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, οὕτως τὸ λξγ πρὸς τὸ ρφζ τρίγωνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ λξγ τρίγωνον πρὸς τὸ ρφζ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ λξγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον, πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν, τὸ λξγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ, τὸ στυ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι δύο πρίσματα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ κλξβ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ μο εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ επρφ, ἀπεναντίον δὲ ἡ στ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ. συνθέντι ἄρα ὡς τὰ κβξλμο λξγμνο πρίσματα, πρὸς τὸ λξγμνο πρίσμα, οὕτως τὰ πεφρστ ρφζστυ πρίσματα, πρὸς τὸ ρφζστυ πρίσμα. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ κβξλομ λξγομν πρὸς τὰ πεφρστ ρφζστυ πρίσματα, οὕτως τὸ λξγμνο πρίσμα, πρὸς τὸ ρφζστυ πρίσμα. ὡς δὲ λξγμνο πρίσμα πρὸς τὸ ρφζστυ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ λξγ βάσις, πρὸς τὴν ρφζ βάσιν, καὶ ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι δύο πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γινομένας πυραμίδας διέλωμεν, τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον ὡς τὰ ομνη στυθ. ἔσται ὡς ἡ ομν βάσις πρὸς τὴν στυ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ομνη πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ στυθ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ομν βάσις πρὸς τὴν στυ βάσιν, οὕτως ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι δύο πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ομνη δύο πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ στυθ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα, τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γινομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως, τῶν ἄλλων καὶ ἄλλων πυραμίδων, καὶ πάντων ἁπλῶς, τῶν ἰσοπληθῶν. Ὅτι δὲ ἐστὶν, ὡς τὸ λξγ τρίγωνον, πρὸς τὸ ρφζ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις τὸ λξγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν, τὸ ρφζ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ, τὸ στυ, οὕτω δεικτέον. ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθω ἀπὸ τῶν η, θ κάθετοι, ἐπὶ τὰ αβγ δεζ τρίγωνα ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσι, διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἥ τε ηγ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η κάθετος, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν αβγ, ομν τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ηγ δίχα ὑπὸ τοῦ ομν ἐπιπέδου, κατὰ τὸ ν. καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η ἄρα κάθετος, ἐπὶ τὸ αβγ ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ομν ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἐπὶ τὸ δεζ ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ στυ ἐπιπέδου. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν η, θ κάθετοι, ἐπὶ τὰ αβγ δεζ ἐπίπεδα, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ομν στυ τριγώνων, ἐπὶ τὰ αβγ δεζ κάθετοι. ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ, τὰ λξγ ρφζ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ομν στυ. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, πρὸς ἄλληλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις. καὶ τὰ ἡμίσυ ἄρα ἔσται, ὡς ἡ λξγ βάσις, πρὸς τὴν ρφζ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα.



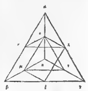


ε.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ αβγ δεζ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η θ σημεῖα, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα,

ἔσται

ἔσται ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς δεζθ πυραμίδος στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ χ. καὶ διῃρήσθω ἡ δεζθ πυραμὶς, εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι διῃρήσθωσαν πυραμίδες ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες, ἀπὸ τῆς δεζθ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ δεζθ πυραμὶς, τοῦ χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκα, αἱ δπρσ στυθ. λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα, μείζονά ἐστι, τοῦ χ στερεοῦ, διῃρήσθω καὶ ἡ αβγη πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς, τῇ δεζθ πυραμίδι. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ βάσις, πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα, ἀλλ᾽ ὡς ἡ αβγ βάσις, πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς, πρὸς τὸ χ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὸ χ στερεὸν, οὕτως τὰ ἐν τῇ αβγη πυραμίδι πρίσματα, πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ αβγη πυραμὶς, πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ χ στερεὸν, πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ αβγη πυραμὶς, τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ χ στερεὸν, τῶν ἐν τῇ δεζθ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβ βάσις, πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς, πρὸς ἔλασσόν τι τῆς δεζθ πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι, οὐδὲ ὡς ἡ δεζ βάσις, πρὸς τὴν αβγ βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ πυραμὶς, πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη πυραμίδος στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ πυραμίδος στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ χ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ δεζ βάσις πρὸς τὴν αβγ βάσιν, οὕτως τὸ χ στερεὸν πρὸς τὴν αβγη πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ χ στερεὸν πρὸς τὴν αβγη πυραμίδα, οὕτως ἡ δεζ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι, τῆς αβγη πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ὡς ἄρα ἡ δεζ βάσις πρὸς τὴν αβγ βάσιν οὕτως ἡ δεζθ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς αβγη πυραμίδος. ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβγη βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς, πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ βάσις, πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς, πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα.



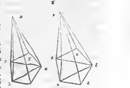




ς.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγδε ζηθκλ, κορυφὰς δὲ τὰ μ ν σημεῖα, λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ αβγδε βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν πυραμίδα. διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν αβγδε βάσις εἰς τὰ αβγ αγδ αδε τρίγωνα. ἡ δὲ ζηθκλ εἰς τὰ ζηθ ζθκ ζκλ τρίγωνα. καὶ νενοήσθωσαν ἐφ᾽ ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς, ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ αγδ τρίγωνον οὕτως ἡ αβγμ πυραμὶς πρὸς τὴν αγδμ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ αβγδ τραπέζιον πρὸς τὸ αγδ τρίγωνον, οὕτως ἡ αβγδμ πυραμὶς πρὸς τὴν αγδμ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ αγδ τρίγωνον

τρίγωνον πρὸς τὸ αδε τρίγωνον, οὕτως ἡ αγδμ πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν αδε βάσιν, οὕτως ἡ αβγδμ πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ αβγδε βάσις πρὸς τὴν αδε, οὕτως ἡ αβγδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ πυραμίδα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζηθκλ βάσις πρὸς τὴν ζκλ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ζηθκλν πυραμὶς, πρὸς τὴν ζκλν πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ αδεμ ζκλν τρίγωνα ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αδε βάσις πρὸς τὴν ζκλ βάσιν, οὕτως ἡ αδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ αβγδε βάσις πρὸς τὴν αδε βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ πυραμίδα. ὡς δὲ ἡ αδε βάσις πρὸς τὴν ζκλ βάσιν, οὕτως ἡ αδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ αβγδε βάσις πρὸς τὴν ζκλ βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ζκλ βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ζκλν πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου πάλιν, ὡς ἡ αβγδε βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ζ.

ΠΑΝ πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας, ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Ἔστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ αβγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ, λέγω ὅτι τὸ αβγδεζ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ εγ γδ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ αβεδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ βδ, ἴσον ἄρα τὸ αβδ τρίγωνον τῷ εδβ τριγώνῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εδβ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται, καὶ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζγβε, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ γε, ἴσον ἐστὶ τὸ εγζ τρίγωνον τῷ γβε τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βεγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εγζ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ, τὸ δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον



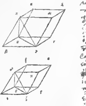
ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μέν ἐστι, τὸ γεζ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ, τὸ γ σημεῖον. διῄρηται ἄρα τὸ αβγδεζ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι ἧς βάσις μὲν τὸ γαβ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ γ σημεῖον τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ αβγ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις τὸ αβγ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ αβγ τρίγωνον. ἀπεναντίον δὲ τὸ δεζ.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βά-

εἰς τὰ πρίσματα, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον διαιρεῖται εἰς πρίσματα ἔχοντα βάσεις, καὶ τὰ ἀπεναντίον τὰ ἀπεναντίον ... παράλληλα ...

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ αβγ δεζ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η θ σημεῖα, λέγω ὅτι ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ βημλ εθπο στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ αβγη πυραμὶς τῇ δεζθ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία τῇ ὑπὸ δεζ. ἡ δὲ ὑπὸ ηβγ τῇ ὑπὸ θεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αβη τῇ ὑπὸ δεθ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν εζ, καὶ ἡ βη πρὸς τὴν εθ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν δε, οὕτως ἡ βγ πρὸς τὴν εζ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ βμ παραλληλόγραμμον τῷ επ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν βν τῷ ερ ὅμοιόν ἐστι. τὸ δὲ βκ τῷ εξ. τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ βμ κβ βγ τρισὶ τοῖς επ εξ ερ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ μβ βκ βν, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. τὰ δὲ τρία τὰ επ εξ ερ, τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ βημλ εθπο ἄρα στερεά, ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται. ὅμοιον ἄρα τὸ βημλ στερεὸν τῷ εθπο στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστί, τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ βημλ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ εθοπ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ βγ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν εζ. ὡς δὲ τὸ βημλ στερεὸν πρὸς τὸ εθοπ στερεόν, οὕτως ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμίς, ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ. διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου, τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ αβγη πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ.



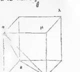
Πόρισμα.

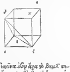
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς * τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἡ ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις, πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμίς, πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμίς, πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα, πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρά, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. θ.

Τῶν ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγ δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η θ σημεῖα, λέγω ὅτι τῶν αβγη δεζθ πυραμίδων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος, συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ βημλ εθπο στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη πυραμὶς τῇ δεζθ πυραμίδι, καὶ ἔστι τῆς μὲν αβγη πυραμίδος, ἑξαπλάσιον τὸ βημλ στερεόν, τῆς δὲ δεζθ πυραμίδος ἑξαπλάσιον, τὸ εθπο στερεόν, ἴσον ἄρα τὸ βημλ στερεὸν τῷ εθπο στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ

βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ βάσις πρὸς τὴν επ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ εθπο στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βημλ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ βμ βάσις, πρὸς τὴν επ βάσιν, οὕτως τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ εθοπ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βημλ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ εθπο στερεοῦ ὕψος, τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος. τῶν αβγη δεζθ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ τῶν αβγη δεζθ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αβγη πυραμὶς τῇ δεζθ πυραμίδι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ αβγ βάσις πρὸς τὴν δεζ βάσιν, οὕτως τὸ βμ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ επ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ βμ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ επ, οὕτως τὸ τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς δεζθ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ εθπο παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς αβγη πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ βημλ παραλληλεπιπέδου ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ βάσις πρὸς τὴν επ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ εθπο παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ βημλ, ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα τὸ βημλ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ εθπο στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν βημλ ἕκτον μέρος, ἡ αβγη πυραμίς, τοῦ δὲ εθπο στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ δεζθ πυραμίς. ἡ ἄρα αβγη πυραμὶς τῇ δεζθ πυραμίδι ἴση ἐστί. τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





ι΄.

ΠΑΣ κῶνος κυλίνδρου, τρίτον μέρος ἐστί, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ, βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν αβγδ κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον, λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος. τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, τριπλασίων ἐστίν. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων, ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων, ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων, ἢ τριπλασίων. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον τὸ αβγδ, τὸ δὴ αβγδ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ αβγδ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ τὸ δὴ ἀνιστάμενον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον, ἥμισυ ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου. καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα. τὰ ἄρα πρίσματα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις. καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ αβγδ ἄρα κύκλου ἀνασταθὲν πρίσμα, ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος, ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν αβγδ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος, ἐλάττων τοῦ πρίσματος



σματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν αβγδ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ αβγδ κύκλου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ αβ βγ γδ δα περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε ζ η θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε εβ βζ ζγ γη ηδ δθ θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος, τοῦ αβγδ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου. ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν ε ζ η θ σημείων παραλλήλους ταῖς αβ βγ γδ δα ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν αβ βγ δα παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων, ἡμίσεα ἐστὶ τὰ πρίσματα, τὰ ἐπὶ τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων. καί ἐστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων. ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα, τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ αε εβ βζ ζγ γη ηδ δθ θα. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τοῦ κώνου. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν αβγδ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλασίων. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. εἰ γὰρ δυνατόν ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. ἀνάπαλιν ἄρα, ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον τὸ αβγδ. τὸ αβγδ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ αβγδ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ αβγδ τετράγωνον, ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου. καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ αβγδ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα. καὶ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις τὸ αβγδ τετράγωνον, ἥμισυ ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ αβγδ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ αβ βγ γδ δα περιφέρειαι δίχα, κατὰ τὰ ε ζ η θ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε εβ βζ ζγ γη ηδ δθ θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων, μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἑκάστου τῶν αεβ βζγ γηδ δθα τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ



ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς ἧ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου, λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν αε εβ βζ ζγ γη ηδ δθ θα. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα πρίσμα οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου οὗ βάσις ἐστὶν ὁ αβγδ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν, ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὥστε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. πᾶς ἄρα κῶνος. καὶ τὰ ἑξῆς.

ια.

ΟΙ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις. Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ αβγδ εζηθ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ κλ μν, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ αγ εη. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς τὸν εν. εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος, ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εν κώνου στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ξ στερεὸν τοῦ εν κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ψ στερεόν. ὁ εν κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς ξ ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ κύκλον τετράγωνον, τὸ εζηθ. τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ εζηθ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης. πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις. ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. ἡ ἄρα πυραμὶς ἧς βάσις τὸ εζηθ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ εζ ζη ηθ θε περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ο π ρ σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θο οε επ πζ ζρ ρη ησ σθ. ἕκαστον ἄρα τῶν θοε επζ ζρη ησθ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν θοε επζ ζρη ησθ τριγώνων, πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν θοεπζρησ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ θοεπζρησ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω, καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον τῷ θοεπζρησ πολυγώνῳ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον, τὸ δταυβφγχ πολύγωνον. καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ αλ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτως τὸ δταυβφγχ πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ πολύγωνον. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτως ὁ αβγ κύκλος

ια



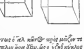
ια



πρὸς

πρὸς τὸν εζηθ κύκλον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως τὸ δτπυβφγχ πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς τὸ ξ στερεόν. ὡς δὲ τὸ δλτυβφγχ πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δλταυβφγχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν, τὸ θοεπζρησ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αλ κῶνος, πρὸς τὸ ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μὲν τὸ δλταυβφγχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ αλ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ εν κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ αλ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ εν κώνῳ πυραμίδος ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εν κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ὡς ὁ εζηθ κύκλος πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εν κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ κώνου στερεόν. λέγω δὴ, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ ξ. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ εζηθ κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτως τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὸν αλ κῶνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὸν αλ κῶνον, οὕτως ὁ εν κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ στερεοῦ. καὶ ὡς ἄρα ὁ εζηθ κύκλος, πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, οὕτως ὁ εν κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ κώνου στερεόν. ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, οὕτως ὁ αλ κῶνος πρὸς τὸν εν κῶνον. ἀλλ᾽ ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον. τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου, καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ κύκλος πρὸς τὸν εζηθ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι. οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ια



ιβ.

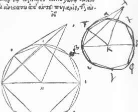
Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ εζηθ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ βδ ζθ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων οἱ κλ μν, λέγω ὅτι ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον οὗ βάσις μὲν ὁ εζηθ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ αβγδλ κῶνος πρὸς τὸν εζηθν κῶνον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ, ἕξει ὁ αβγδλ κῶνος, ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθν κώνου στερεὸν, τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρὸς ἔλαττον πρότερον, τὸ ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ κύκλον τετράγωνον τὸ εζηθ. τὸ ἄρα εζηθ τετράγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηθ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ εζηθ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ εζ ζη ηθ θε περιφέρειαι δίχα, κατὰ τὰ ο π ρ σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εο οζ ζπ πη ηρ ρθ θσ σε. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εοζ ζπη ηρθ θσε τριγώνων, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ εζηθ κύκλου, καὶ ἀνεστάτω ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν εοζ ζπη ηρθ θσε τριγώνων, πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάν-

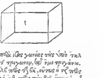
ιβ



τες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ εζηθ κῶνος, τοῦ ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εο, οζ, ζπ, πη, ηρ, ρθ, θσ, σε. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω, καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον τῷ εοζπηρθσ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ατβυγφδχ. καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ατβυγφδχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ λβτ. τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ νζο. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κτ, μο. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ αβγδ κῶνος τῷ εζηθ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ὁ κλ ἄξων πρὸς τὸν μν ἄξονα. ὡς δὲ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ἡ βκ πρὸς τὴν ζμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ βκ πρὸς τὴν ζμ, οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν μν, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς τὴν μν· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ βκλ, ζμν, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκλ τρίγωνον τῷ ζμν τριγώνῳ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν κτ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς τὴν μο, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ βκτ, ζμο, ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ βκτ γωνία, τῶν πρὸς τῷ κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζμο γωνία, τῶν πρὸς τῷ μ κέντρῳ, τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ βκτ τρίγωνον, τῷ ζμο τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ βκ πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ πρὸς τὴν μν, ἴση δὲ ἡ μὲν βκ τῇ κτ, ἡ δὲ ζμ τῇ μο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κτ πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ομ πρὸς τὴν μν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τκλ, ομν, ὀρθαὶ γὰρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ λκτ τρίγωνον τῷ νμο τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκλ, ζμν τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λβ πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ νζ πρὸς τὴν ζμ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκτ, ζμο τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ κβ πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ζο. δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ λβ πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ πρὸς τὴν ζο. πάλιν ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν λτκ, νομ τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λτ πρὸς τὴν τκ, οὕτως ἡ νο πρὸς τὴν ομ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν κβτ, ομζ τριγώνων, ἔστιν ὡς ἡ κτ πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ μο πρὸς τὴν οζ. δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ λτ πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ νο πρὸς τὴν οζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ τβ πρὸς τὴν βλ, οὕτως ἡ οζ πρὸς τὴν ζν. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τλ πρὸς τὴν λβ, οὕτως ἡ ον πρὸς τὴν νζ. τῶν λτβ, νοζ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ λτβ, νοζ τρίγωνα. ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα ἧς βάσις μὲν τὸ βκτ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ζμο τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται, ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα βκτλ πυραμὶς πρὸς τὴν ζμον πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βκ πρὸς τὴν ζμ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν α, χ, δ, φ, γ, υ εὐθείας ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἀπὸ τῶν ε, σ, θ, ρ, η, π ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ βκ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζμ ὁμόλογον πλευράν. τουτέστιν ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς

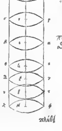
ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ βκλ γωνία τῇ ὑπὸ ζμν.





ὡς βντλ πυραμὶς πρὸς τὴν ξμον πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς ἧς βάσις τὸ ατευγφδλχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ατευγφδλχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὸ ξ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων, ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον πρὸς τὸ ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μὲν τὸ ατευγφδλχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ πρὸς τὴν πυραμίδα ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ αβγδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ατευγφδλχ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ, οὕτως τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος ἐστὶ τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος. ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ στερεὸν ἐστὶ πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ αβγδ κύκλος, κορυφὴ δὲ, τὸ λ σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ εζηθ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει. ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ εζηθν κῶνος, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ κώνου στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ αβγδλ κῶνος, πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ ξ. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ζθ πρὸς τὴν βδ. ὡς δὲ τὸ ξ στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ κῶνον, οὕτως ὁ εζηθν κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ κώνου στερεόν. καὶ ὁ εζηθν κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ζθ πρὸς τὴν βδ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ αβγδλ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν εζηθν κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον. τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ, καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ. ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ πρὸς τὴν ζθ. οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ιγ. ιγ



ΕΑΝ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. Κύλινδρος γὰρ ὁ αδ, ἐπιπέδῳ τῷ ηθ τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, τοῖς αβ γδ, καὶ συμβαλλέτω τῷ εζ ἄξονι, κατὰ τὸ κ σημεῖον, λέγω ὅτι ὡς ὁ βη κύλινδρος, πρὸς τὸν ηδ κύλινδρον, οὕτως ὁ εκ ἄξων πρὸς τὸν κζ ἄξονα. ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ εζ ἄξων ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ λ μ σημεῖα. καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν εκ ἄξονι ἴσοι, ὁσοιδηποτοῦν, οἱ εν νλ, τῷ δὲ ζκ ἴσοι, ὁσοιδηποτοῦν, οἱ ζξ ξμ. καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν λ ν ξ μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς αβ γδ. καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν λ ν ξ μ ἐπιπέδοις, περὶ κέντρα, τὰ λ ν ξ μ. κύκλοι, οἱ οπ ρσ τυ φχ ἴσοι, τοῖς αβ γδ. καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι, οἱ πρ ρβ δτ τχ. καὶ ἐπεὶ οἱ λν νε εκ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα πρ ρβ βη κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα καὶ οἱ πρ ρβ βη κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ λν νε εκ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ πρ ρβ βη κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν λν νε εκ τῷ

πλήθει

πλήθει τῶν πρ ρβ βη, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ κλ ἄξων τοῦ εκ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ πη κύλινδρος τοῦ βη κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ μκ ἄξων τοῦ κζ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ χη κύλινδρος τοῦ ηδ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κλ ἄξων τῷ κμ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ πη κύλινδρος τῷ ηχ κυλίνδρῳ. εἰ δὲ μείζων ὁ κλ ἄξων τοῦ κμ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ πη κύλινδρος τοῦ ηχ κυλίνδρου. εἰ δὲ μείζων ὁ κλ ἄξων τοῦ κμ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ πη κύλινδρος τοῦ ηχ κυλίνδρου. καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν εκ κζ, κυλίνδρων δὲ τῶν βη ηδ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν εκ ἄξονος καὶ τοῦ βη κυλίνδρου, ὅ τε κλ ἄξων καὶ ὁ πη κύλινδρος, τοῦ δὲ κζ ἄξονος καὶ τοῦ ηδ κυλίνδρου, ὅ τε κμ ἄξων καὶ ὁ ηχ. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ κλ ἄξων τοῦ κμ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ πη κύλινδρος τοῦ ηχ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εκ ἄξων πρὸς τὸν κζ ἄξονα, οὕτως ὁ βη κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη. Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ γδ κύλινδροι οἱ εβ ζδ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ εβ κύλινδρος πρὸς τὸν ζδ κύλινδρον, οὕτως ὁ ηθ ἄξων πρὸς τὸν κλ ἄξονα. ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ κλ ἄξων, ἐπὶ τὸ ν σημεῖον. καὶ κείσθω τῷ ηθ ἄξονι ἴσος, ὁ λν. καὶ περὶ ἄξονα τὸν λν κύλινδρος νενοήσθω ὁ γμ. ἐπεὶ οὖν οἱ εβ γμ κύλινδροι, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις, ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ εβ γμ κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ζμ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ γδ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γμ κύλινδρος πρὸς τὸν ζδ κύλινδρον, οὕτως ὁ λν ἄξων πρὸς τὸν κλ ἄξονα, ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν γμ κύλινδρος, τῷ εβ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ λν ἄξων τῷ ηθ ἄξονι. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εβ κύλινδρος πρὸς τὸν ζδ κύλινδρον, οὕτως ὁ ηθ ἄξων, πρὸς τὸν κλ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ εβ κύλινδρος πρὸς τὸν ζδ κύλινδρον, οὕτως ὁ αβη κῶνος πρὸς τὸν γδκ κῶνον. τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων. καὶ ὡς ἄρα ὁ ηθ ἄξων πρὸς τὸν κλ ἄξονα, οὕτως ὁ αβη κῶνος πρὸς τὸν γδκ κῶνον, καὶ ὁ εβ κύλινδρος πρὸς τὸν ζδ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



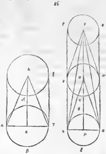
ιε.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ εζηθ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ αγ εη, ἄξονες δὲ οἱ κλ μν, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ αξ εο κύλινδροι, λέγω ὅτι τῶν αξ εο κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ λκ ὕψος. τὸ γὰρ λκ ὕψος τῷ μν ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ αξ κύλινδρος τῷ εο κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβγδ βάσις τῇ εζηθ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν, ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος, πρὸς τὸ λκ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ λκ ὕψος τῷ μν ἴσον, ἀλλ᾽ ἔστω μεῖζον τὸ μν, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ μν ὕψους τῷ κλ ἴσον τὸ πμ, καὶ κείσθω τῷ λκ ὕψει ἴσον τὸ πμ, καὶ διὰ τοῦ π σημείου τετμήσθω ὁ εο κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ τυσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, τοῖς τῶν εζηθ ρο κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ εζηθ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ πμ, κύλινδρος νενοήσθω ὁ εσ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ αξ κύλινδρος τῷ εο κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ εσ κύλινδρος, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ κύλινδρος πρὸς τὸν εσ κύλινδρον, οὕτως ὁ εο κύλινδρος πρὸς τὸν εσ κύλινδρον. ἀλλ᾽

ὡς

ὡς μὲν ὁ αξ κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, οὕτως ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ αξ, εσ κύλινδροι. ὡς δὲ ὁ εσ κύλινδρος πρὸς τὸν εο, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ μπ ὕψος. ὁ γὰρ εο κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ μπ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ μπ ὕψος τῷ κλ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ κλ ὕψος. τῶν ἄρα αξ, εο κυλίνδρων, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ιε



Ἀλλὰ δὴ τῶν αξ, εο κυλίνδρων, ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ κλ ὕψος, λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ αξ κύλινδρος τῷ εο κυλίνδρῳ. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ κλ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ κλ ὕψος τῷ μπ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ μπ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αβγδ βάσις πρὸς τὴν εζηθ βάσιν, οὕτως ὁ αξ κύλινδρος πρὸς τὸν εσ κύλινδρον. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. ὡς δὲ τὸ μν ὕψος πρὸς τὸ μπ ὕψος, οὕτως ὁ εο κύλινδρος πρὸς τὸν εσ κύλινδρον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ κύλινδρος πρὸς τὸν εσ κύλινδρον, ἴσος ἄρα ὁ αξ κύλινδρος τῷ εο κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι, οἱ αβγδ, εζηθ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ κ, δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον, τὸν αβγδ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ εζηθ κύκλου. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ κέντρου εὐθεῖα ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ η σημείου τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αη. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ γ, ἡ αγ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ εζηθ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν βαδ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς αδ. λελείφθω καὶ ἔστω ἡ λδ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἐπὶ τὴν βδ κάθετος ἤχθω ἡ λμ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λδ, δν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ λδ τῇ δν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ λν τῇ αγ, ἡ δὲ αγ ἐφάπτεται τοῦ εζηθ κύκλου, ἡ λν ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ εζηθ κύκλου. πολλῷ ἄρα αἱ λδ, δν, οὐκ ἐφάπτονται τοῦ εζηθ κύκλου. ἐὰν δὲ τῇ λδ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν αβγδ κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ εζηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις

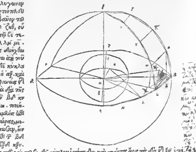


ιζ.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ α, δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζο-

να σφαῖ-

να σφαῖραν, στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν σφαῖραν. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι, ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου. ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι. ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου, καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ σφαῖρα. ὥστε καθ᾽ οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ διὰ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον, ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον. ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ αβγδε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ζηθ. καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, αἱ βδ γε. καὶ δύο κύκλων, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν βγδε ζηθ, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, τὸν βγδε πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ζηθ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ βε τεταρτημορίῳ αἱ βκ κλ λμ με. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κα διήχθω ἐπὶ τὸ ν. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ α σημείου, τῷ τοῦ βγδε κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αξ. καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, κατὰ τὸ ξ. καὶ διὰ τῆς αξ καὶ ἑκατέρας τῶν βδ κν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν βδ κν διαμέτρων, τὰ βξδ κξν.



ιζ

καὶ ἐπεὶ ἡ ξα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ξα ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον. ὥστε καὶ τὰ βξδ κξν ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ βξδ κξν ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων, τῶν βδ κν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ βε βξ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ βε τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς βξ κξ τεταρτημορίοις, ἴσαι ταῖς βκ κλ λμ με εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ βο οπ πρ ρξ κσ στ τυ υξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σο τπ υρ. καὶ ἀπὸ τῶν ο σ, ἐπὶ τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν. πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς βδ κν. ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν βξδ κξν ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι, πρὸς τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον, πιπτέτωσαν. καὶ ἔστωσαν αἱ οφ σχ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φχ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς βξδ κξν, ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ βο κσ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ οφ σχ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν οφ τῇ σχ, ἡ δὲ βφ τῇ κχ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βα ὅλῃ τῇ κα ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ φα λοιπῇ τῇ χα ἐστὶν ἴση. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βφ πρὸς τὴν φα, οὕτως ἡ κχ πρὸς τὴν χα. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φχ τῇ κβ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν οφ σχ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ οφ τῇ σχ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. αἱ χφ σο ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ χφ σο, ἀλλὰ ἡ χφ τῇ κβ ἐστὶ παράλληλος, καὶ ἡ σο ἄρα τῇ κβ ἐστὶ παράλληλος, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βο κσ. τὸ κβοσ ἄρα τετράπλευρον, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπι-

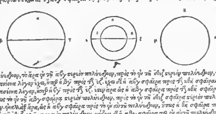


πέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν σοπτ τπρυ τετραπλεύρων, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ τὸ υρξ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν, ἀπὸ τῶν ο σ π τ ρ υ σημείων, ἐπὶ τὸ α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον, μεταξὺ τῶν βξ κξ περιφερειῶν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν, τὰ κβοσ σοπτ τπρυ τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν κλ λμ μβ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς κβ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ τρίγωνον, καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. λέγω ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ζηθ κύκλος. ἤχθω ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ τοῦ κβοσ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ αψ. καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ψ σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ βψ ψκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αψ ὀρθή ἐστιν πρὸς τὸ τοῦ κβοσ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αψ. ἡ αψ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν βψ ψκ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ ακ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τῷ ἀπὸ τῆς ακ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ ἴσα, τὰ ἀπὸ τῶν αψ ψβ. ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ ψ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ ἴσα, τὰ ἀπὸ τῶν αψ ψκ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αψ ψβ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αψ ψκ. κοινὸν ἀφῃρήσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αψ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βψ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ψκ ἴσον ἐστίν. ἴση ἄρα ἡ βψ τῇ ψκ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ψ ἐπὶ τὰ ο, σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν βψ ψκ. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ψ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ψβ ψκ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν ο σ. καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ κβοσ τετράπλευρον. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ κβ τῆς χφ, ἴση δὲ ἡ χφ τῇ σο, μείζων ἄρα ἡ κβ, τῆς σο, ἴση δὲ ἡ κβ ἑκατέρᾳ τῶν κσ βο, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν κσ βο τῆς σο μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ κβοσ, καὶ ἴσαι αἱ κβ βο κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ βψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ τοῦ ἀπὸ τῆς βψ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ σημείου ἐπὶ τὴν βφ κάθετος ἡ κω. καὶ ἐπεὶ ἡ βδ τῆς δω ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δω, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δβ βω, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δω ωβ. ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς βω τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ωδ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δβ βω ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν δω ωβ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἐστὶ τῆς κδ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ δβ βω, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς βκ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν δω ωβ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κω. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ τοῦ ἀπὸ τῆς κω ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς κβ τοῦ ἀπὸ τῆς βψ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κω τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ κα, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα τῷ ἀπὸ τῆς κα. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς βα ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ ψα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κω ωα. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βψ ψα, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν κω ωα. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς κω μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ωα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ψα. μείζων ἄρα ἡ αψ τῆς αω. πολλῷ ἄρα ἡ αψ μείζων ἐστὶ τῆς αη. καὶ ἔστιν ἡ μὲν αψ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ αη ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν. ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ αψ τῆς αη, ἤχθω ἀπὸ τοῦ η τῇ αη πρὸς ὀρθὰς ἡ ηλ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. τέμνοντες δὴ τὴν εβ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ βγδ κύκλου περιφερείας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῆς ηλ. λελήφθω, καὶ ἔστω ἡ κβ περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ κβ εὐθεῖα τῆς ηλ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ βκσο τετράπλευρον, καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ οβ βκ κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βψκ γωνία. μείζων ἄρα ἡ βκ τῆς βψ. ἀλλὰ τῆς βκ μείζων ἡ ηλ. πολλῷ ἄρα ἡ ηλ μείζων τῆς βψ. μείζων τῆς βψ. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηλ τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ τῆς αβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αλ, τῷ ἀπὸ τῆς αβ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αλ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αη ηλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αβ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ ψα. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αη ηλ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βψ ψα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς βψ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ηλ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αη. μείζων ἄρα ἡ αψ τῆς αη. δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν

πολυέδρου ἐγγεγράφθαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Πόρισμα. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν, τῷ ἐν τῇ βγδε σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ βγδε σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς βγδε σφαίρας διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες, ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ κλσ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρά, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν, ἤπερ ἡ αβ, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ α, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὲ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α σφαίρᾳ, πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα, τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ, τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α στερεὸν πολύεδρον, πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αβ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. τουτέστιν ἤπερ ἡ βδ διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

ιη΄.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ, τῶν ἰδίων διαμέτρων. Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ αβγ δεζ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ βγ εζ. λέγω ὅτι ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς δεζ σφαίρας, τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μείζονα, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ηθκ. καὶ νενοήσθω ἡ δεζ σφαῖρα τῇ ηθκ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν δεζ στερεὸν πολύεδρον, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς ηθκ, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν αβγ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ δεζ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ, ὅμοιον στερεὸν



πολύεδρον, τὸ ἄρα ἐν τῇ αβγ στερεὸν πολύεδρον, πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ στερεὸν πολύεδρον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ἔχει δὲ ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ αβγ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ θκ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ αβγ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου, μείζων ἄρα καὶ ἡ θκη σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ δεζ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων. ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ αβγ σφαῖρα, πρὸς ἐλάσσονα τῆς δεζ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βγ διάμετρος πρὸς τὴν εζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ δεζ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν βγ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς δεζ σφαίρας, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν λμν. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμν σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ διάμετρος πρὸς τὴν βγ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ λμν σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ σφαῖραν, οὕτως ἡ δεζ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς αβγ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ λμν τῆς δεζ. καὶ ἡ δεζ ἄρα σφαῖρα

σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ εζ πρὸς τὴν βγ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ αβγ σφαῖρα πρὸς μείζονα τῆς δεζ σφαίρας, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ, ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα αβγ σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βγ πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

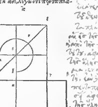
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΙΓ, ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΡΙΤΟΝ.

α.

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω, κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αγ εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ κείσθω τῆς αβ ἡμίσεια ἡ αδ, λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ τοῦ ἀπὸ τῆς δα, ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν αβ δγ τετράγωνα, τὰ αε δζ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ δζ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζγ ἐπὶ τὸ η, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ βγ τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ τὸ ζθ. ἴσον ἄρα τὸ γε τῷ ζθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα τῆς αδ, ἴση δὲ ἡ μὲν βα τῇ κα, ἡ δὲ αδ τῇ αθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κα τῆς αθ. ὡς δὲ ἡ κα πρὸς τὴν αθ, οὕτως τὸ κγ πρὸς τὸ γθ, διπλάσιον ἄρα τὸ κγ τοῦ γθ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ θγ διπλάσια τοῦ γθ. ἴσον ἄρα τὸ κγ τοῖς λθ θγ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γε τῷ ζθ ἴσον, ὅλον ἄρα τὸ αε τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα τῆς αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. τουτέστι τὸ αε τοῦ δθ. ἴσον δὲ τὸ αε τῷ μνξ γνώμονι, καὶ ὁ μνξ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ δθ, ὅλον ἄρα τὸ δζ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ δθ, καὶ ἔστι τὸ μὲν δζ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τὸ δὲ δθ τὸ ἀπὸ τῆς δα. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

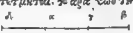


Σχόλιον. Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις τί.

Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου, διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Σύνθεσίς ἐστι λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἀκολούθων, ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν, ἢ κατάληψιν. Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ ἴση κείσθω ἡ αδ, λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῶν γα αδ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ, τὸ ἄρα ἀπὸ

τῶν γα αδ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ πενταπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ γα μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν γα αδ ἴσον ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ, διπλῆ γάρ ἡ βα τῆς αδ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον ἐστὶ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἡ γὰρ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα αγ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ βγ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ βγ, τὸ

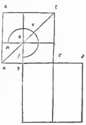


ἀπὸ τῆς αβ ἐστί. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἐστὶν ἡ βα, τῆς αδ. ὥστε [margin] ⌈Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ ἐστὶν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ αβ βγ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα αγ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὥστε τὸ ἀπὸ τῶν δα αγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, πενταπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς δα. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δα αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, τὸ ἀπὸ τῆς δγ ἐστί. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δγ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ, τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τμήματος ἑαυτῆς τοῦ αγ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ αγ διπλῆ ἔστω ἡ γδ, λέγω ὅτι τῆς γδ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ γβ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν αβ γδ τετράγωνα τὰ αζ γη, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ αζ τὸ σχῆμα. καὶ διήχθω ἡ ζβ ἐπὶ τὸ ε.

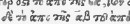


καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ αζ τοῦ αθ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ μνξ γνώμων τοῦ αθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ δγ τῆς γα, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δγ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, τουτέστι τὸ γη τοῦ αθ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ μνξ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ αθ, ἴσος ἄρα ὁ μνξ γνώμων τῷ γη. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ δγ τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ μὲν δγ τῇ γκ, ἡ δὲ αγ τῇ γθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κγ τῆς γθ. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβ τοῦ βθ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ θβ διπλάσια τοῦ θβ, ἴσον ἄρα τὸ κβ τοῖς λθ θβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ μνξ γνώμων ὅλῳ τῷ γη ἴσος, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ θζ τῷ βη ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι τὸ μὲν βη τὸ ὑπὸ τῶν γδ δβ. ἴση γὰρ ἡ γδ τῇ δη. τὸ δὲ θζ τὸ ἀπὸ τῆς βγ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ δβ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς τὴν γβ οὕτως ἡ γβ πρὸς τὴν βδ. μείζων δὲ ἡ δγ τῆς γβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γβ τῆς βδ. τῆς γδ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ γβ. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς αγ μείζων ἐστὶ τῆς βγ, οὕτως δεικτέον. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἡ βγ τῆς γα διπλῆ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ τοῦ ἀπὸ τῆς γα. πενταπλάσιον ἄρα ἑκατέρου τῶν ἀπὸ τῶν βγ γα τοῦ ἀπὸ τῆς γα. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς γα. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βα ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βγ γα. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ βγ διπλάσια τῆς αγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς βγ ~~διπλάσιόν ἐστι~~ τῆς γα. πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον. ἡ ἄρα τῆς αγ διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τὰ εἰρη-

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ γδ, τμήματός ἑαυτῆς τοῦ δα, πενταπλάσιον δυνάσθω. τῆς δὲ δα διπλῆ κείσθω ἡ αβ, λέγω ὅτι ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξαρχῆς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ ἴσον. διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ βα τῆς αδ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ὑπὸ βα αγ ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς δα. τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ μετὰ τοῦ



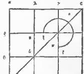
ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα αγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὑπόθεσιν.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ τὰ ἀπὸ τῶν δα αγ ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα αγ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. διελόντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν δα αγ ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν βα αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ ἐστὶ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ αγ. ἴσον, τῷ ὑπὸ τῶν βα αγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν βα αγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ βα βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ πρὸς τὴν γβ. μείζων δὲ ἡ βα τῆς αγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αγ τῆς γβ. ἡ αβ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ.

γ.

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος, τετραγώνου. Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ δ. λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γδ, τετραπλάσιον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. τουτέστι τὸ ρσ τοῦ ζη. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ρσ, τὸ ἄρα γε ἴσον ἐστὶ τῷ ρσ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ρσ τοῦ ζη. τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ γε τοῦ ζη. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θκ τῇ κζ. ὥστε καὶ τὸ ηζ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ θλ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ ηκ τῇ κλ. τουτέστιν ἡ μν τῇ νε. ὥστε καὶ τὸ μζ τῷ ζε ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ μζ τῷ γη ἐστὶν ἴσον. καὶ τὸ γη ἄρα τῷ ζε ἐστὶν ἴσον.

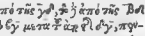


κοινὸν προσκείσθω τὸ γν. ὁ ἄρα ξοπ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ γε. ἀλλὰ τὸ γε τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ηζ. καὶ ὁ ξοπ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ηζ. τὸ ἄρα δν πενταπλάσιον ἐστὶ τοῦ ηζ τετραγώνου. καὶ ἔστι τὸ μὲν δν τὸ ἀπὸ τῆς δβ, τὸ δὲ ηζ τὸ ἀπὸ τῆς δγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. καὶ τῆς αγ ἡμίσεια ἡ γδ, λέγω ὅτι πενταπλάσιον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ

τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τουτέστι πενταπλάσιον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς βδ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς βδ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, πενταπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. δῆλον τι ἄρα τὸ ὑπὸ αβ βγ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ δγ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ βγ, ἴσον ἐστὶ,



τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἡ γὰρ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ἔστι δὲ διπλῆ γὰρ ἡ αβ, τῆς γδ.

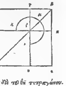
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς δγ, τετραπλάσιον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ.

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αδεβ. καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ βγ τὸ ακ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ τὸ θη, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ τῷ θη. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αζ τῷ ζε, κοινὸν προσκείσθω τὸ γκ. ὅλον ἄρα τὸ ακ ὅλῳ τῷ γε ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα γε ακ τοῦ ακ ἐστι διπλάσια, ἀλλὰ τὰ ακ γε ὁ λμν γνώμων ἐστὶ, καὶ τὸ γκ τετράγωνον. ὁ ἄρα λμν γνώμων καὶ τὸ γκ τετράγωνον, διπλάσιά ἐστι τοῦ ακ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ακ τῷ θη ἐδείχθη ἴσον. ὁ ἄρα λμν γνώμων, καὶ τὸ γκ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ θη, ὥστε καὶ ὁ λμν γνώμων καὶ τὰ γκ θη τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ θη τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὁ μὲν λμν γνώμων, καὶ τὰ γκ θη τετράγωνα, ὅλον τὸ αε καὶ τὸ γκ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ τετράγωνα, τὸ δὲ θη τὸ ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ βγ τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τριπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ ἐστὶ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. διελόντι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αγ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.



Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ, τῷ ἀπὸ τῆς αγ. τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ συνθέντι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ τὰ ἀπὸ τῶν αβ βγ ἐστὶ τετράγωνα. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ βγ τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ.

ε.

ΕΑΝ εὐθεῖα γραμμὴ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

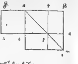
Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ ἄκρον

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρ. καὶ μέσ. λόγ. τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ μείζονος τμήματος καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω γὰρ ἡ αβ εὐθεῖα ἄκρ. καὶ μέσ. λόγον διῃρημένη κατὰ τὸ γ. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω τὸ αγ. ἡ τε δε [illegible] ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αδ καὶ ἀπὸ τῆς δε τὸ δη. δῆλον δὴ ὅτι τὸ αδ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε σὺν τῷ ὑπὸ αβ βε [illegible]



κρου καὶ μέσου λόγου τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ αγ ἴση κείσθω ἡ αδ, λέγω ὅτι ἡ δβ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ αβ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ βγ τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ τὸ γθ. ἴσον ἄρα τὸ γε τῷ γθ. ἀλλὰ τὸ μὲν γε ἴσον ἐστὶ τῷ θε, τὸ δὲ γθ ἴσον τῷ δθ. καὶ τὸ δθ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ θε. κοινὸν προσκείσθω τὸ θβ. ὅλον ἄρα τὸ δκ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ αε. καί ἐστι τὸ μὲν δκ τὸ ὑπὸ τῶν βδ δα. ἴση γὰρ ἡ αδ τῇ δλ, τὸ δὲ αε τὸ ἀπὸ τῆς αβ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βδ δα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα πρὸς τὴν αδ. μείζων δὲ ἡ δβ τῆς βα. μείζων ἄρα καὶ ἡ βα τῆς αδ. ἡ ἄρα βδ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

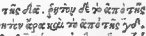
Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ. καὶ τῇ αγ ἴση κείσθω ἡ αδ. λέγω ὅτι ἡ δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ α. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ βα.



ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ. ἀναστρέψαντι ἄρα. ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δα οὕτως ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, διελόντι ἄρα. ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἔστι γὰρ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ γ. Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. συνθέντι ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βγ, ἀναστρέψαντι. ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ. ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἡ ἄρα δβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ α. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αβ.

ς.

ΕΑΝ εὐθεῖα ῥητὴ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ, ἡ αβ. καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν αγ γβ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῆς βα ἡμίσεια ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ αγ πρόσκειται ἡ αδ, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ,



τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ τοῦ ἀπὸ τῆς δα πενταπλάσιόν ἐστι. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γδ τῷ ἀπὸ τῆς δα. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δα. ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ δα ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, ῥητῆς οὔσης, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ γδ τῇ δα. αἱ γδ δα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. πάλιν ἐπεὶ ἡ αβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ ἀποτομῆς, παρὰ τὴν αβ ῥητὴν παραβεβληθὲν, πλάτος ποιεῖ τὴν βγ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ γβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ ἀποτομή. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα. καὶ τὰ ἑξῆς.

ζ.

ΕΑΝ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ αβγδε, αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ πρὸς τοῖς α β γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν, λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε πεντάγωνον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ βε ζδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ γβ βα δυσὶ ταῖς βα αε ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ βε ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ αβε τριγώνῳ ἴσον. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ βγα τῇ ὑπὸ βεα, ἡ δὲ ὑπὸ αβε τῇ ὑπὸ γαβ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αζ πλευρᾷ τῇ βζ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ αγ ὅλῃ τῇ βε ἴση. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ζγ λοιπῇ τῇ ζε ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ τῇ δε ἴση. δύο δὴ αἱ ζγ γδ δυσὶ ταῖς ζε εδ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεδ ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεδ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ βγδ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς α β, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς α β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ γδε γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α β γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε πεντάγωνον. Ἀλλὰ δὴ, μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ᾽ ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς α γ δ σημείοις, λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε πεντάγωνον. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βα αε δυσὶ ταῖς βγ γδ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε βάσει τῇ βδ ἴση ἐστί, καὶ τὸ αβε τρίγωνον τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ γωνία τῇ ὑπὸ γδβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βεδ γωνία τῇ ὑπὸ βδε ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ βε πλευρᾷ τῇ βδ ἐστὶν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ γδε ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ γδε ταῖς πρὸς τοῖς α γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς α γ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α γ δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε πεντάγωνον.





η΄.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ αβγδε, δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς α β ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ αγ βε, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ θ σημεῖον, λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ αβγδε πεντάγωνον, κύκλος ὁ αβγδε. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ εα αβ δυσὶ ταῖς αβ βγ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε βάσει τῇ αγ ἴση ἐστί, καὶ τὸ αβε τρίγωνον τῷ αβγ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ γωνία τῇ αβε. διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ αθε τῆς ὑπὸ βαθ γωνίας. ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ αβθ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαγ τῆς ὑπὸ βαγ διπλῆ. ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ εδγ περιφερείας τῆς γβ ἐστὶ διπλῆ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ θαε γωνία τῇ ὑπὸ αθε. ὥστε καὶ ἡ θε εὐθεῖα τῇ εα, τουτέστι τῇ αβ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα εὐθεῖα τῇ αε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε τῇ ὑπὸ αεβ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αβε τῇ ὑπὸ βαθ ἐδείχθη ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ βεα ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ βαθ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε αβε, καὶ τοῦ αβθ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαε γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αθβ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβε τρίγωνον τῷ αβθ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ εβ πρὸς τὴν βα οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βθ. ἴση δὲ ἡ βα τῇ εθ. ὡς ἄρα ἡ βε πρὸς τὴν εθ, οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν θβ.



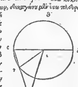
μείζων

μείζων δὲ ἡ βε τῆς εα, μείζων ἄρα καὶ ἡ εβ τῆς θβ. ἡ βε ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ θε ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ αγ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ.

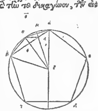
ΕΑΝ ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων, συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ τῶν εἰς τὸν αβγ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ βγ, ἑξαγώνου δὲ ἡ γδ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας, λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ βδ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἐστὶν ἡ γδ. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εβ εγ εδ. καὶ διήχθω ἡ βε ἐπὶ τὸ α. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αγβ περιφέρεια τῆς βγ περιφερείας. τετραπλασίων ἄρα ἡ αγ περιφέρεια τῆς γβ. ὡς δὲ ἡ αγ περιφέρεια πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ὑπὸ αεγ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γεβ. τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ τῆς ὑπὸ γεβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ γωνία τῇ ὑπὸ εγβ. ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγβ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εγ εὐθεῖα τῇ γδ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν αβγ κύκλον ἐγγραφομένου. ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γεδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γδε. διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ εγβ τῆς ὑπὸ εδγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ εγβ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ αεγ, τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ τῆς ὑπὸ εδγ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βεγ τετραπλασία ἡ ὑπὸ αεγ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδγ τῇ ὑπὸ βεγ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε βεγ, καὶ τοῦ βεδ ἡ ὑπὸ εβδ γωνία. καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βεδ λοιπῇ τῇ ὑπὸ εγβ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ εβδ τρίγωνον τῷ εβγ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ εβ πρὸς τὴν βγ. ἴση δὲ ἡ εβ τῇ γδ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δγ πρὸς τὴν γβ. μείζων δὲ ἡ βδ τῆς δγ. μείζων ἄρα καὶ ἡ δγ τῆς γβ. ἡ βδ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ. καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστὶν, ἡ δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



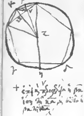
ι.

ΕΑΝ εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται, τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.



Ἔστω κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν πεντάγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, λέγω ὅτι ἡ τοῦ αβγδε πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευράν, τῶν εἰς τὸν αβγδε κύκλον ἐγγραφομένων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αζ, διήχθω ἐπὶ τὸ η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ ζθ. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ κβ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὴν ακ, κάθετος ἤχθω ἡ ζλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη περιφέρεια τῇ αεδη περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ τῇ αεδ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη περιφέρεια λοιπῇ τῇ δη ἐστὶν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ γδ, δεκαγώνου ἄρα ἡ γη. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ζα τῇ ζβ, καὶ κά-

θετος

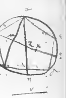


τέρος ἡ ζθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζκ γωνία τῇ ὑπὸ κζβ. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ακ, τῇ κβ ἐστὶν ἴση. διπλῆ ἄρα ἡ αβ περιφέρεια τῆς βκ περιφερείας. δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν, ἡ ακ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ ἡ ακ τῆς κμ ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ περιφέρεια τῆς βκ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ γδ περιφέρεια τῇ αβ περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ γδ περιφέρεια τῆς βκ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ γδ περιφέρεια καὶ τῆς γη διπλῆ. ἴση ἄρα ἡ γη περιφέρεια τῇ βκ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ βκ τῆς κμ ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ κα, καὶ ἡ γη ἄρα τῆς κμ ἐστὶ διπλῆ. ἴση ἄρα ἡ γβ περιφέρεια τῇ βα περιφερείᾳ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ηβ περιφέρεια τῆς βμ ἐστὶ διπλῆ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηζβ, γωνίας τῆς ὑπὸ βζμ ἐστὶ διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ηζβ καὶ τῆς ὑπὸ ζαβ διπλῆ. ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ζαβ τῇ ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ ὑπὸ βζν ἄρα, τῇ ὑπὸ ζαβ ἐστὶν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε αβζ καὶ τοῦ βζν ἡ ὑπὸ αβζ γωνία, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αζβ λοιπῇ τῇ ὑπὸ βνζ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ αβζ τρίγωνον τῷ βζν τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ αβ εὐθεῖα πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς τὴν βν. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ τῇ λκ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ λν, βάσις ἄρα ἡ κν βάσει τῇ αν ἐστὶν ἴση. καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν ἐστὶν ἴση ~~καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν ἐστὶν ἴση~~ ἀλλὰ ἡ ὑπὸ λαν τῇ ὑπὸ κβν ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ λκν ἄρα τῇ ὑπὸ κβν ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ακβ καὶ τοῦ ακν, ἡ ὑπὸ νακ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ λοιπῇ τῇ ὑπὸ κνα ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβα τρίγωνον τῷ κνα τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βα εὐθεῖα πρὸς τὴν ακ, οὕτως ἡ κα εὐθεῖα πρὸς τὴν αν. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα αν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ακ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ βν, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ βν μετὰ τοῦ ὑπὸ βα αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ακ. καί ἐστιν ἡ μὲν βα, πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ βζ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ακ δεκαγώνου, ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια.

ΕΑΝ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγδε, ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε, λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ αβγδε, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ κείσθω τῆς αζ τέταρτον μέρος ἡ ζκ, ῥητὴ δὲ ἡ αζ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζκ. ἔστι δὲ καὶ ἡ βζ ῥητή, ὅλη ἄρα ἡ βκ ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν, ἡ αγη περιφέρεια τῇ αδη περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ τῇ αεδ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη λοιπῇ τῇ ηδ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν αδ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ γδ τῆς γλ. διὰ τὰ αὐτὰ δή, καὶ αἱ πρὸς τῷ μ ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ αγ τῆς γμ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν, ἡ ὑπὸ αλγ γωνία, τῇ ὑπὸ αμζ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε αλγ, καὶ τοῦ αμζ, ἡ ὑπὸ λαγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγλ λοιπῇ τῇ ὑπὸ μζα ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αγλ τρίγωνον, τῷ αμζ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ λγ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ζα. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια. ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ τῆς μζ διπλῆ πρὸς τὴν ζα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ τῆς μζ διπλῆ πρὸς τὴν ζα, οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα. καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα. καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεα. ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ διπλῆ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ζα. καί ἐστι τῆς μὲν λγ διπλῆ ἡ δγ, τῆς δὲ γα ἡμίσεια, ἡ γμ, τῆς δὲ ζα τέταρτον μέρος, ἡ ζκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μζ πρὸς τὴν ζκ. συντεθέντι καὶ ὡς συναμφοτέρος





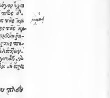
φότερος ἡ δγμ πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μκ πρὸς τὴν ζκ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς δγμ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς μκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. τουτέστι, τῇ δγ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καί ἐστιν ὅλης τῆς αγ ἡμίσεια ἡ γμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δγμ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς γμ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δγμ, ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς μκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς μκ τοῦ ἀπὸ τῆς κζ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κζ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μκ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μκ. λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς μκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ βζ τῆς ζκ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ βκ, τῆς κζ. εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον δὲ, τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ. πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ τοῦ ἀπὸ τῆς κμ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ βκ τῇ κμ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν. αἱ βκ κμ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν, ἀποτομὴ ἄρα ἡ μβ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ μκ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ν. ἡ βκ ἄρα τῆς κμ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κζ τῇ ζβ, καὶ συνθέντι, σύμμετρός ἐστιν ἡ κβ τῇ βζ. ἀλλὰ ἡ βζ τῇ βθ σύμμετρός ἐστι μήκει καὶ ἡ βκ ἄρα τῇ βθ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ λόγον ἔχει ὃν ε πρὸς α. ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν, λόγον ἔχει ὃν ε πρὸς δ. οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βκ τῇ ν. ἡ βκ ἄρα τῆς κμ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ βκ τῆς προσαρμοζούσης τῆς κμ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ βκ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ βθ, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν, ἡ μβ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάσσων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν θβ βμ ἡ αβ. διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς αθ ἰσογώνιον γίνεσθαι, τὸ αβθ τρίγωνον τῷ αβμ. καί ἐστιν ὡς ἡ θβ πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ αβ πρὸς τὴν βμ. ἡ ἄρα αβ τοῦ πενταγώνου πλευρά, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ.

ΕΑΝ εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρά, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ, τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ καὶ εἰς αὐτὸν, τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγ, λέγω ὅτι ἡ τοῦ αβγ τριγώνου μία πλευρά, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ, τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγ κύκλου. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αδ διήχθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, ἡ βεγ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα βε περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ, τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν, ἡ βε εὐθεῖα. ἴση ἄρα ἐστὶ, τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ δε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αε τῆς δε, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῦ ἀπὸ τῆς δε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βε. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ βε τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς βε. διελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βε. ἴση δὲ ἡ βε τῇ δε. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δε, ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρά δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ



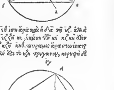
ιγ.

Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

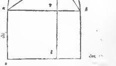
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν αγ, τῆς βγ. καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζη, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ δγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζη κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ εζη, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ θζ θη, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ θ σημείου τῷ τοῦ εζη κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ θκ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς θκ τῇ αγ εὐθείᾳ ἴση ἡ θκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε κζ κη. καὶ ἐπεὶ ἡ κθ ὀρθή ἐστιν πρὸς τὸ τοῦ εζη κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ εζη κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν θε θζ θη. ἡ θκ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν θε θζ θη ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ τῇ θκ, ἡ δὲ γδ τῇ θε, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ δα βάσει τῇ κε ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν κζ κη τῇ δα ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ κε κζ κη ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ τῆς βγ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ. ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αγ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἀναστρέψαντι ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε τοῦ ἀπὸ τῆς εθ τριπλάσιον. καί ἐστιν ἴση ἡ δγ τῇ εθ. ἴση ἄρα καὶ ἡ δα τῇ εζ. ἀλλὰ ἡ δα ἑκάστῃ τῶν κε κζ κη ἐδείχθη ἴση. καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν εζ ζη ηε ἑκάστῃ τῶν κε κζ κη ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ εζη κεζ κζη κεη. πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εζη τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κ σημεῖον. δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ θκ εὐθεῖα ἡ θλ. καὶ κείσθω τῇ βγ ἴση ἡ θλ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αγ πρὸς τὴν γδ, οὕτως ἡ γδ πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ μὲν αγ τῇ κθ, ἡ δὲ γδ τῇ θε, ἡ δὲ γβ τῇ θλ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κθ πρὸς τὴν θε, οὕτως ἡ εθ πρὸς τὴν θλ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν κθ θλ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εθ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ κθε εθλ γωνιῶν. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κλ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ελ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ λεκ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ελκ τρίγωνον, ἑκατέρῳ τῶν ελθ εθκ τριγώνων. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κλ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ζλ λη, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς ζ η γωνιῶν. καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ κλ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ, τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ, τῇ αβ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν

ιγ





ιγ

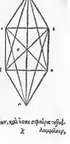


τῇ μὲν αγ ἴση κεῖται ἡ κθ, τῇ δὲ γβ ἡ θλ. Λέγω δὴ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ τῆς βγ. ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ αβ τῆς αγ. ὡς δὲ ἡ βα πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ. ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς βδ, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν αγ. διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν δαβ δαγ τριγώνων. καὶ [illegible] ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν βα ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. ἡ δὲ αδ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ. ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αγ τετράγωνον τὸ εγ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζβ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ δαβ τρίγωνον τῷ δαγ τριγώνῳ, ἐστὶν ὡς ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα πρὸς τὴν αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα αγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ εβ πρὸς τὸ βζ. καὶ ἔστι τὸ μὲν εβ τὸ ἀπὸ τῶν βα αγ. ἴση γάρ ἐστιν ἡ εα τῇ αγ, τὸ δὲ βζ τῷ ὑπὸ τῶν αγ γβ, ὡς ἄρα ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν βα αγ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ γβ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα αγ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ γβ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ. ἡ γὰρ δγ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν αγ γβ μέση ἀνάλογόν ἐστι. διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι, τὴν ὑπὸ αδβ. ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ.

ιδ.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασία ἐστὶ, τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ εη, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κ σημείου τῷ τοῦ εζηθ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ κλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ κμ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν κλ κμ μιᾷ τῶν κε κζ κη κθ ἴση ἑκατέρα τῶν κλ κμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λε λζ λη λθ με μζ μη μθ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κε τῇ κθ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εκθ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θε διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λκ τῇ κε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ λκε γωνία. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θε διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λε ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εθ, ἴση ἄρα ἡ λε, τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λθ τῇ θε ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ λεθ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ εζηθ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ λ μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν. ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων ἐστὶ, τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ λκ κμ κε ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς λμ γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἐὰν μενούσης τῆς λμ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ η θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περι-



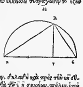


λημμένον, τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ λε τῇ κμ, κοινὴ δὲ ἡ κε, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ λε βάσει τῇ εμ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λεμ γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λμ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ τῆς βγ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δβ. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λμ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς βδ τῷ ἀπὸ τῆς λε. ἴση γὰρ κεῖται ἡ εθ τῇ δβ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τῷ ἀπὸ τῆς λμ. ἴση ἄρα ἡ αβ τῇ λμ, καὶ ἐστὶν ἡ αβ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ λμ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

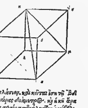
ιε.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλῆ ἐστι, τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν αγ τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ δβ, καὶ ἀπὸ τῶν ε ζ η θ τῶν τοῦ εζηθ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ εκ ζλ ημ θν, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης τῶν εκ ζλ ημ θν, μιᾷ τῶν εζ ζη ηθ θε, ἴση ἑκάστη τῶν εκ ζλ ημ θν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ κλ λμ μν νκ. κύβος ἄρα συνίσταται, ὁ ζν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ, τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ κη ηε. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ κεη γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν κε ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ εη ἐπίπεδον, δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν εη εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κη γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ζη ὀρθή ἐστι, πρὸς ἑκατέραν τῶν ζλ ζε, καὶ πρὸς τὸ ζκ ἄρα ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστιν ἡ ζη. ὥστε κἂν ἐπιζεύξωμεν τὴν ζκ ἡ ζη ὀρθὴ ἔσται, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ηκ

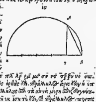


γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κη, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηζ τῇ ζε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ εζ τῇ εκ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη διπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ηε εκ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ αβ τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηκ τοῦ ἀπὸ τῆς κε τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση τῇ βδ ἡ κε, ἴση ἄρα καὶ ἡ κη τῇ αβ. καὶ ἔστιν ἡ αβ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. καὶ ἡ κη ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος. καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶν, τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

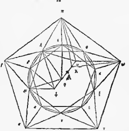


ις.

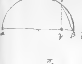
Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε τετραπλασίαν εἶναι τὴν αγ τῆς γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζηθκ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ δβ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθκ κύκλον, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ εζηθκ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ εζ ζη ηθ θκ κε περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ λ μ ν ξ ο σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λμ μν νξ ξο ολ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ λμνξο πεντάγωνον. καὶ δεκάγωνος ἡ εο. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν ε ζ η θ κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ επ ζρ ησ θτ κυ, ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ

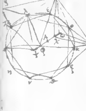


εζηθκ κύκλου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πρ ρσ στ τυ υπ πλ λρ ρμ μσ σν ντ τξ ξυ υο οπ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν επ κυ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ επ τῇ κυ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν. ἡ πυ ἄρα τῇ εκ ἴση τέ ἐστι, καὶ παράλληλος. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ εκ. πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ πυ, τοῦ εἰς τὸν εζηθκ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἑκάστη τῶν πρ ρσ στ τυ, πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν εζηθκ κύκλον ἐγγραφομένου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ πρστυ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ επ, δεκαγώνου δὲ ἡ εο, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ πεο, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ πο, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρά, δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ ου πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ πενταγώνου. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ που τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν πλρ ρμσ σντ τξυ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν πλ πο. ἔστι δὲ καὶ ἡ λο πενταγώνου. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ πλο τρίγωνον, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἕκαστον τῶν λρμ μσν νοτ ξυο τριγώνων, ἰσόπλευρόν ἐστιν.



εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ εζηθκ κύκλου τὸ φ σημεῖον. καὶ ἀπὸ τοῦ φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ φω, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, ὡς ἡ φψ. καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν φψ χω. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πω πχ λψ ψμ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν φχ πε τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φχ τῇ πε. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι. καὶ αἱ εφ πχ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ εφ. ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ πχ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ πχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ πχω γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ πω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ υω



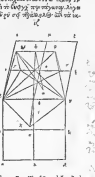


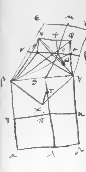
πενταγώνου ἐστὶν, ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς φκ χυ, ἴσαι τε ἀπεναντίον ἔσονται. καὶ ἔστιν ἡ φκ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ χυ. δεκαγώνου δὲ ἡ χω. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ υχω. πενταγώνου ἄρα ἡ υω. ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ πενταγώνου. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πυω τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν, αἱ πς ςσ στ τυ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ ω σημεῖον ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ φλ, δεκαγώνου δὲ ἡ φψ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λφψ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ λψ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν μφ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ μψ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ πενταγώνου. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λμψ τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ μν νξ ξο ολ, κορυφὴ δὲ τὸ ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μέν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, ἡ φω ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ. καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ φχ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ πρὸς τὴν χω. ἴση δὲ ἡ μὲν φχ, τῇ φλ, ἡ δὲ χω τῇ φψ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ πρὸς τὴν φλ, οὕτως ἡ φλ πρὸς τὴν φψ. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ωφλ λφψ γωνίαι. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν λω εὐθεῖαν ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ψλω γωνία, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ψλω φλω τριγώνων. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ωφ πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ πρὸς τὴν χω. ἴση δὲ ἡ μὲν ωφ τῇ ψχ, ἡ δὲ φχ τῇ χπ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ψχ πρὸς τὴν χπ, οὕτως ἡ πχ πρὸς τὴν χω, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν πψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ π γωνία. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ψω, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ φχ δίχα κατὰ τὸ α. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ φω ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ωχ, ἡ ἄρα ωχ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν χα, πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωα τοῦ ἀπὸ τῆς αχ. καὶ ἔστι τῆς μὲν ωα διπλῆ ἡ ωψ, τῆς δὲ αχ διπλῆ ἡ χφ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ τοῦ ἀπὸ τῆς φχ. καὶ ἐπεὶ τετραπλάσιον ἐστὶν ἡ αγ τῆς γβ, πενταπλάσιον ἄρα ἡ αβ τῆς βγ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς φχ. καὶ ἔστιν ἡ δβ ἴση τῇ φχ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ εζηθκ. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ τῇ ψω. καὶ ἔστιν ἡ αβ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. καὶ ἡ ψω ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ κύκλου. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ κύκλου ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ εζηθκ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς ἑξαγώνου, καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

ιζ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή. Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ αβγδ γβεζ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αβ βγ γδ δα εζ εβ ζγ πλευρῶν,

πλευρῶν, δίχα κατὰ τὰ Η Θ Κ Λ Μ Ν Ξ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ ΜΘ ΝΞ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ ΟΞ ΘΠ εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ Σ Τ σημεῖα. καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ ΟΣ ΤΠ. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ Σ Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθάς, ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ ΣΦ ΤΧ. καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ ΟΣ ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ ΒΧ ΧΓ ΓΦ ΦΥ, λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ ΣΒ ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστιν ἴσον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ ἴσον ἐστί, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ. διπλῆ ἄρα ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ. ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΡΣ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ ἐστὶ διπλῆ. ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ ΧΓ ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΥ ΥΦ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ ΟΨ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ ΘΧ, λέγω ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ ΟΨ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ, τῇ ΤΧ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ δὲ ΤΘ, τῇ ΟΨ. ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν (ὡς τὰ ΨΟΘ ΘΤΧ) τὰς δύο πλευρὰς, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα. ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι, ἐπ' εὐθείας ἔσονται. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον. λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ, ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ. ἴση δὲ ἡ ΡΟ τῇ ΟΣ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ. ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΝ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ. ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΦ τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ ΣΝ ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ ΝΒ ἴσον ἐστί, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΦΒ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. διπλῆ ἄρα ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ ΧΓ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ ΒΥΦ ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ πεντάγωνον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον. καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ιβ πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ





δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἡ ψο, καὶ ἔσω ἡ ψω συμβάλλει ἄρα ἡ ψω, τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ια΄ βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ω. τὸ ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ψω ἡμίσεια πλευρὰ τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ υω. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νσ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ νο, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο. ἴση δὲ ἡ μὲν νσ, τῇ ψω, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν νο τῇ οω ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ψο τῇ οσ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οσ τῇ ψυ, ἐπεὶ καὶ τῇ ρο. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ωψ ψυ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ωψ ψυ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς υω. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς υω τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, δυνάμει τριπλασίων, τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ, τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας. καί ἐστιν ἡ νο ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ἡ ἄρα υω ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καὶ ἔστι τὸ ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. τὸ υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου, πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον, τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή. ἐπεὶ γὰρ τῆς νο ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ρο, ὅλης ἄρα τῆς νξ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν, ἡ ρσ. οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ νο πρὸς τὴν ορ, ἡ ορ, πρὸς τὴν ρν. καὶ τὰ διπλάσια. τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ὡς ἄρα ἡ νξ πρὸς τὴν ρσ, οὕτως ἡ ρσ πρὸς συναμφότερον τὴν νρ σξ. μείζων δὲ ἡ νξ τῆς ρσ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ρσ συναμφοτέρου, τῆς νρ σξ, ἡ νξ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ρσ. ἴση δὲ ἡ ρσ τῇ υφ. τῆς ἄρα νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ υφ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ νξ, πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή, ἡ υφ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

ιη΄.

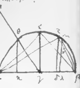
Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

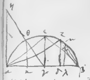
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ γ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αγ τῇ γβ, κατὰ δὲ τὸ δ, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν αδ τῆς δβ. καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ ἡμικύκλιον τὸ αεβ, καὶ ἀπὸ τῶν γ δ τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ γε δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ ζβ εβ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ τῆς δβ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῆς βδ. ἀναστρέψαντι, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ βα τῆς αδ. ὡς δὲ ἡ βα πρὸς τὴν αδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς βα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ. ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ αζβ τρίγωνον τῷ αζδ τριγώνῳ. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα τοῦ ἀπὸ τῆς αζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καὶ ἔστιν ἡ αβ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ αζ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος. πάλιν ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ αδ τῆς



δβ. τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῆς βδ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζβ. τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος

διάμετρος, δυνάμει τριπλασίων, τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἔστιν ἡ αβ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ βζ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ γβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῆς βγ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν βγ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βε. διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς βε. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καὶ ἔστιν ἡ αβ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος. ἡ βε ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αβ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αη. καὶ κείσθω ἡ αη τῇ αβ ἴση. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὴν αβ κάθετος ἤχθω ἡ θκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ηα τῆς αγ, ἴση γὰρ ἡ ηα τῇ αβ, ὡς δὲ ἡ ηα πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ θκ πρὸς τὴν κγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ θκ τῆς κγ. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ τοῦ ἀπὸ τῆς κγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν θκ κγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ γβ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ τοῦ ἀπὸ τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ αβ τῆς βγ, ὧν ἡ αδ τῆς δβ ἐστὶ διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ βδ, λοιπῆς τῆς δγ ἐστὶ διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ βγ τῆς γδ. ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βγ τοῦ ἀπὸ τῆς γκ. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γκ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. μείζων ἄρα ἡ γκ τῆς γδ. κείσθω τῇ γκ ἴση ἡ γλ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ λμ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἔστι τῆς μὲν βγ διπλῆ ἡ αβ, τῆς δὲ γκ διπλῆ ἡ κλ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς κλ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἔστιν ἡ αβ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ κλ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκ τε τῆς ἑξαγώνου, καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ κλ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ακ τῇ λβ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ακ λβ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρά, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ λβ, ἑξαγώνου δὲ ἡ μλ, ἴση γάρ ἐστι τῇ κλ, ἐπεὶ καὶ τῇ θκ. ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν θκ κλ διπλασίων τῆς κγ. πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστίν, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου. εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζβ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ νβ. ἡ νβ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν αζ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς βε δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ζβ δυνάμει τριπλασίων. οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου, τριῶν. ἡ δὲ τοῦ κύβου, δύο. ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρά, τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος. τῆς δὲ τοῦ κύβου, δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου, δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας, οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή. Ὅτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ μβ, τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς νβ, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ζδβ τρίγωνον τῷ ζαβ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ δβ πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ βζ πρὸς τὴν βα. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν βδ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ζβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ. τριπλῆ δὲ ἡ αβ τῆς βδ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζβ τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ τοῦ ἀπὸ τῆς δβ τετραπλάσιον. διπλῆ γὰρ ἡ αδ τῆς δβ. μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ. μείζων ἄρα καὶ ἡ αδ τῆς ζβ. πολλῷ ἄρα ἡ αλ τῆς ζβ μείζων ἐστί. καὶ τῆς μὲν αλ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ κλ. ἐπειδήπερ ἡ μὲν λκ ἑξαγώνου ἐστί, ἡ δὲ κα δεκαγώνου. τῆς δὲ ζβ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν, ἡ νβ. μείζων ἄρα ἡ κλ τῆς νβ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ λμ. μείζων ἄρα ἡ λμ τῆς νβ. τῆς δὲ λμ μείζων ἡ μβ. πολλῷ ἄρα ἡ μβ, πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς νβ, πλευρᾶς, οὔσης





τοῦ δωδεκαέδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἄλλως δὲ, ὅτι μείζων ἡ μβ τῆς νβ. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ αδ τῆς δβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ τῆς βδ. ὡς δὲ ἡ αβ πρὸς τὴν δβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς αβ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ζαβ τρίγωνον τῷ ζβδ τριγώνῳ, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς βζ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ τοῦ ἀπὸ τῆς κλ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ζβ, ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς κλ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς νβ μεῖζόν ἐστι. μείζων ἄρα ἡ κλ τῆς νβ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ λμ. μείζων ἄρα ἡ μλ τῆς νβ. πολλῷ ἄρα ἡ μβ τῆς νβ μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς βν μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ βν τῆς νζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζβ βν, μεῖζόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῶν βζ ζν. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ ζβ βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ βζ ζν μεῖζόν ἐστι ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ βζ ζν. ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ βζ ζν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς νβ. ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ βζ, κατὰ τὸ ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης. τρία ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ζβ. μεῖζόν ἐστι, τοῦ ἀπὸ τῆς βν, ἢ διπλάσιον. τρία ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, δύο τῶν ἀπὸ τῶν βν, μεῖζόν ἐστιν. Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα ε̄ σχήματα, οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, ἴσων ἀλλήλοις. ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ ε̄ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου. ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἓξ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία, ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν, ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον. ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον. οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι, τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων, περιεχθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ ἄτοπον. οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα ε̄ σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται, ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον. ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα ζβ ζγ ζδ ζε. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς α β γ δ ε πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ ζ πέντε γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ εἰσὶν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν ὡς ἡ ὑπὸ αζβ μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ζαβ αβζ, μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ζαβ τῇ ὑπὸ ζβγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ καὶ πέμπτου, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη



ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ

ΙΔ, ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ, ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ, ΩΣ ΑΛΛΟΙ ΔΕ ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ Ἀλεξανδρέως, περὶ τῶν ε̄ σωμάτων πρῶτον.

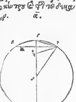
Βασιλείδης ὁ Τύριος ὦ πρώταρχε παραγενηθεὶς εἰς ἀλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διαλαβόντες τὸ ὑπὸ ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου, καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα. ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα διακαθάραντες, ἔγραψαν, ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ. καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου. καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τῇ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν. καὶ γὰρ περιφέρεται, τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος ἐκεῖνα προσφωνῆσαί σοι διὰ τὴν ἐν ἅπασι μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν ἐμπείρως κρινοῦντι τὰ ῥηθησόμενα. διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν. εὐμενῶς ἀκουσομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

α.

Η ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

α.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν τῷ αβγ κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τὴν βε κάθετος ἤχθω ἡ δε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ δε, εὐθεῖα ἡ αεζ, λέγω ὅτι ἡ δε ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δγ γζ, καὶ κείσθω τῇ εζ ἴση ἡ ηε. καὶ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ γ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς βζγ περιφερείας. καί ἐστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ αγζ, τῆς δὲ βζγ ἡμίσεια ἡ ζγ, καὶ ἡ αζγ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ζγ περιφερείας. τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ τῆς ζγ. ὡς δὲ ἡ αγ πρὸς τὴν ζγ, οὕτως ἡ ὑπὸ αδγ πρὸς τὴν ὑπὸ ζδγ γωνίαν, τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ ζδγ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ εζγ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζγ



τῆς

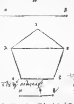
τῆς ηδγ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ εζγ ἴση τῇ ὑπὸ εηγ, διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ εηγ τῆς ὑπὸ ηδγ. ἴση ἄρα ἡ δγ τῇ ηγ. ἀλλὰ ἡ ηγ τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ δη τῇ ζγ. ἔστι δὲ ἡ ηγ τῇ εζ ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ δε συναμφοτέρῳ τῇ εζγ. κοινὴ προσκείσθω ἡ δε. συναμφότερος ἄρα ἐστὶν ἡ δεζ διπλῆ τῆς δε. καί ἐστιν ἡ μὲν δζ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου. ἡ δὲ ζγ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου. ἡ δε ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. φανερὸν δὴ ἐκ τῶν, ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου, ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ, πέντε σχημάτων σύγκρισις. ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου, ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. διὰ τὸ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπί τε τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. προγραφέντος τοῦδε· ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης εὐθείας, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου. ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν τῷ αβγ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τὴν αγ κάθετος ἡ δζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ β ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ, λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν βα αγ τετράγωνα, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ δε τετραγώνου. ἐπεζεύχθω ἡ αε. δεκαγώνου ἄρα ἡ αε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ βε τῆς βδ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βε τοῦ ἀπὸ τῆς δε. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς βε ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν βα αε. τετραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ βα αε τοῦ ἀπὸ δε. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ αβ αε καὶ δε, τοῦ ἀπὸ δε. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δε εα ἴσα τῷ ἀπὸ αγ. πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ βα αγ τοῦ ἀπὸ δε. τούτου δεδειγμένου, δεικτέον ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. ἐκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω ἐν μὲν τῷ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ γδεζη, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ κλθ, λέγω ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε γδεζη πεντάγωνον καὶ τὸ κλθ τρίγωνον. ἐπεζεύχθω ἡ δη, κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ δη. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ μν, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ αβ τοῦ ἀπὸ μν. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, τετμήσθω ἡ μν ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ξ, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ μξ. δεκαγώνου ἄρα ἡ μξ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ αβ τοῦ μν, τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ βα τοῦ ἀπὸ δη, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ δη, ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ μν, ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ δη πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ μν, οὕτως τρία τὰ ἀπὸ γη, πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ μξ, τρία ἄρα τὰ ἀπὸ γη τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ μξ ἐστὶν ἴσα. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ

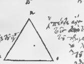
β



β



ἀπὸ κλ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ μν, καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ μξ ἐστὶν ἴσα. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ κλ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ δη καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ γη. τρία δὲ τὰ ἀπὸ δη καὶ τρία τὰ ἀπὸ γη, ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ γδεζη. ἐδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ δη μετὰ τοῦ ἀπὸ γη πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ γδεζη. ἀλλὰ πέντε καὶ τὰ ἀπὸ κλ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ τρίγωνον κύκλου. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἀπὸ κλ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ τρίγωνον κύκλου. δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσον ἑνὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ ἄρα διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.



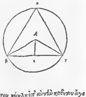
γ.

ΕΑΝ ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὴν γδ κάθετος ἤχθω ἡ ζη, λέγω ὅτι τριακοντάκις ὑπὸ γδ ηζ ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς αβγδε. ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ ζδ. ἐπεὶ τὸ ὑπὸ γδ ηζ διπλάσιόν ἐστι τοῦ γδζ τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ γδ ζη δέκα τριγώνοις ἐστὶν ἴσα. τὰ δὲ δέκα τρίγωνα, δύο ἐστὶ πεντάγωνα. καὶ πέντε ἑξάκις. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ γδ ηζ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφάνεια. τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ γδ ζη ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.



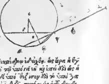
Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ αβγ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, κάθετος ἡ δε, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ βγ δε ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ δε βγ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ δε βγ. ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ δβγ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ὑπὸ δε βγ. ἓξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ δβγ ἴσα ἐστὶ δύο τοῖς αβγ, καὶ πεντεκαιδεκάκις, τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ δε βγ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς αβγ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ γδ ζη πρὸς τὸ ὑπὸ βγ δε. ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου, ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.



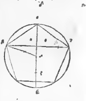
Τούτ

δ.

Τούτου δήλου ὄντος, δεικτέον ὅτι ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ αβγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ γδ, πενταγώνου δὲ ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὰς δγ γα κάθετοι ἤχθωσαν αἱ εζ εη, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ εη εὐθεῖα ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ θ, λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ θ πρὸς τὴν γδ. ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς εβγ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ βε, καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς εβγ ἡμίσεια ἡ εη, τῆς δὲ βε ἡμίσεια ἡ εζ, καὶ τῆς εη ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ εζ. ἔστι δὲ καὶ τῆς θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ γα, ὡς ἐν τῷ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη. ὡς ἄρα ἡ θ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ εη πρὸς τὴν εζ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ θ ζε τῷ ὑπὸ γα εη. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ θ πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὑπὸ θ εζ πρὸς τὸ ὑπὸ γδ ζε. τῷ δὲ ὑπὸ θ εζ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ γα ηε. ὡς ἄρα ἡ θ πρὸς τὴν γδ, οὕτως τὸ ὑπὸ γα ηε πρὸς τὸ ὑπὸ γδ ζε, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ θ πρὸς τὴν γδ.

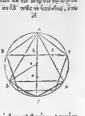


Ἄλλως δεῖξαι ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν, προγραφέντος τοῦδε. ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν αβγ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ αβ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ δ ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αδ εὐθεῖα ἡ δε, καὶ κείσθω τῆς μὲν αδ εὐθείας ἡμίσεια ἡ δζ, ἡ δὲ ηγ τῆς γθ τριπλῆ ἔστω. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ αζ θβ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ. ἀπὸ γὰρ τοῦ β ἐπὶ τὸ δ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ αδ τῆς δζ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς αδ ἡ αζ. πάλιν ἐπεὶ τριπλῆ ἐστὶν ἡ ηγ τῆς γθ, διπλῆ δὲ ἡ ηθ τῆς θγ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ηγ τῆς θη. ὡς ἄρα ἡ ζα πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ γη πρὸς τὴν ηθ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ αζ θη τῷ ὑπὸ δα γη. ἡ δὲ γη τῇ βη ἴση ἐστί. τὸ ἄρα ὑπὸ αδ βη ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ αζ θη. τὸ δὲ ὑπὸ αδ βη δύο ἐστὶ τρίγωνα ὡς τὰ αβδ. καὶ τὸ ὑπὸ αζ ηθ ἄρα δύο ἐστὶ τὰ αβδ. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ αζ ηθ, δέκα τρίγωνά ἐστι. δέκα δὲ τρίγωνα, δύο ἐστὶ πεντάγωνα. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ αζ ηθ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ γθ τῆς θγ, τὸ ὑπὸ αζ ηθ διπλοῦν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ αζ θγ. δύο ἄρα τὰ ὑπὸ αζ θγ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ αζ θη, πέντε τοῖς ὑπὸ αζ γθ, τουτέστι δύο πεντάγωνα. ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ αζ θγ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ, πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ αζ θγ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ αζ θβ. ἐπεὶ δὴ πενταπλῆ ἐστὶν ἡ θβ τῆς θγ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ αζ. τὸ ἄρα ὑπὸ αζ βθ ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ.

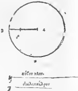


Τούτου δήλου ὄντος, νῦν ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν αβγ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ βα αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αε ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἔστω ἡ αε τῆς εη διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ κγ τῆς γθ, καὶ ἀπὸ τοῦ η τῇ αζ πρὸς ὀρθὰς ἡ δμ. τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ δμ. ἰσο-

δμ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδμ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ αη θβ ἴσον ἐστὶ τῷ πεντα-
γώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ακδ τῷ αδμ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ηκ θβ πρὸς τὸ ὑπὸ δκα, οὕτω
τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ βθ αη
πρὸς τὸ ὑπὸ δκα, ἡ βθ πρὸς τὴν δκ. καὶ ὡς ἄρα δώδε-
κα αἱ θβ πρὸς εἴκοσι δκ, οὕτω δώδεκα πεντάγωνα πρὸς
εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς
τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἔστι δώδεκα μὲν αἱ βθ, δέκα αἱ
βγ. ἡ μὲν γὰρ βθ τῆς βγ ἐστὶ πενταπλῆ, ἡ δὲ βγ τῆς βγ ἑξαπλῆ.
δώδεκα ἄρα αἱ βθ ἴσαι εἰσὶ δέκα ταῖς βγ. εἴκοσι γὰρ δὴ
δέκα εἰσὶν αἱ δμ. διπλῆ γὰρ ἡ δμ τῆς δκ. ὡς ἄρα δέκα αἱ
βγ πρὸς δέκα τὰς δμ, τουτέστιν ὡς ἡ βγ πρὸς τὴν δμ, οὕ-
τως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου
ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν βγ ἡ τοῦ κύβου πλευρά, ἡ δὲ δμ,
ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου
ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ βγ



πρὸς τὴν δμ. τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεικτέον
δὴ ὅτι καὶ εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυνα-
μένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης,
καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ
εἰκοσαέδρου πλευράν. ἔστω κύκλος ὁ αβ περιλαμβάνων τό τε
τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγω-
νον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήφθω
τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις ἀπὸ τοῦ
γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ βγ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λό-
γον κατὰ τὸ δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ γδ. δεκαγώνου ἄρα
ἐστὶ πλευρὰ ἡ γδ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. ἐκ-
κείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ ζ,
κύβου δὲ ἡ η. ἡ μὲν ἄρα ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευ-
ρά, ἡ δὲ ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφο-
μένου, ἡ δὲ ζ τῆς η μεῖζον ἐστὶ τμῆμα. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ἴση ἐστὶ τῇ
τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσο-
πλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς βγ, τριπλά-
σιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε τοῦ ἀπὸ τῆς βγ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ
τῆς βγ βδ, τριπλάσια τοῦ ἀπὸ γδ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἄρα τὸ
ἀπὸ ε πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ

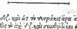




γδ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ γδ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζ. μεῖζον γάρ ἐστι
τμῆμα ἡ ζ τῆς η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ε πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ζ.
καὶ ἐναλλάξ, ~~καὶ ἀνάπαλιν~~, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὸ ἀπὸ ζ πρὸς τὰ ἀπὸ
γβ βδ. τῷ δὲ ἀπὸ ζ ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ βγδ. ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε
τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ η πρὸς τὸ ἀπὸ ε, οὕτω τὰ
ἀπὸ βγ γδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβ βδ, ὡς δὲ τὰ ἀπὸ βγδ πρὸς τὰ ἀπὸ γβδ, οὕτως εὐθείας ἧς
δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ~~ἡ δυναμένη~~ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ
μείζονος τμήματος, πρὸς ~~τὴν δυναμένην~~ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμή-
ματος. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ
μέσον λόγον τεμνομένης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς
τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. καὶ ἔστιν ἡ μὲν η κύ-
βου πλευρά, ἡ δὲ ε εἰκοσαέδρου. ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυνα-
μένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, οὕ-
τως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Δεικτέον

Δεικτέον δὴ νῦν ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι, ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον ἴσαι εἰσί, τουτέστιν αἱ κάθετοι. ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα, καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστι. ἔστι ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι, τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι, τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐδείχθη ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἑξῆς. Ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ δείξομεν οὕτως. τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν αβ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ αγ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ δε ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ δζ, λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ὅλη ἡ αβ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν αγ, οὕτως ὅλη ἡ δε πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν δζ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ αβγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ αγ, τὸ δὲ ὑπὸ δεζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ δζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αβγ πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, οὕτως τὸ ὑπὸ δεζ πρὸς τὸ ἀπὸ δζ.



καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα αβ βγ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἐστὶν, οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ δε εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ αβγ μετὰ τοῦ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ αγ, οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ δεζ μετὰ τοῦ ἀπὸ δζ πρὸς τὸ δζ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς δεζ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ αβγ πρὸς τὴν αγ, οὕτω συναμφότερος ἡ δεζ πρὸς δζ. συνθέντι ὡς συναμφότεροι αἱ αβγ μετὰ τῆς αγ πρὸς τὴν αβ, οὕτω συναμφότεροι αἱ δεζ μετὰ τῆς δζ πρὸς τὴν δζ, τουτέστι δύο αἱ δε, πρὸς δζ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τουτέστιν ὡς ἡ αβ πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν δζ. Δεδειγμένου ὅτι εὐθείας ἡστινοσοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. δεδειγμένου δὲ, τοῦ δέ ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια, πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προσηνεγμένου δὲ καὶ τοῦ δ', ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἕξουσιν εὐθείας ἡστινοσοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς

τὴν

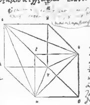
τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἕξει ὃν εὐθείας οἵας δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην ὅλην καὶ ἔλαττον τμῆμα. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐστὶν εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως εὐθείας ἧς δήποτ' οὖν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΙΕ, ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΕΜΠΤΟΝ, ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ, ΩΣ ΑΛΛΟΙ ΔΕ ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ Ἀλεξανδρέως, περὶ τῶν ε̄ σωμάτων δεύτερον.

α.

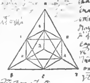
ΕΙΣ τὸν δοθέντα κύβον, πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ αε γε αθ εθ θγ. φανερὸν δὴ ὅτι τὰ αεγ αθε αθγ γθε τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι. τετραγώνων γάρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραί. πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ αεγθ. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον.



β.

ΕΙΣ τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδ, καὶ τετμήσθω δίχα τοῖς ε ζ η θ κ λ σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θη θλ εζ ζη, καὶ αἱ λοιπαί. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν βη ηζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ βη τῇ ηζ, καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ θη τῇ ζκ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ θκζη, λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς κλ κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ἐζθη ζγαη ἐζθη θκζη, ὁμοίως δείξομεν τὰ ἐπὶ τοῦ θκζη τετράγωνα ἰσόπλευρα.

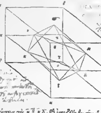
β.



γ.

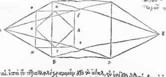
ΕΙΣ τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι. Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ κ λ μ

κλ μν, λέγω ὅτι τὸ κλμν τετράγωνόν ἐστι. ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κλ παράλληλοι αἱ ξο πο. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστὶν ἡ μὲν πο τῆς οκ, ἡ δὲ ξο τῆς λξ, ἴση δέ ἐστιν ἡ πο τῇ ξο, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ οκ τῇ ολ. τὸ ἄρα ἀπὸ κλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ολ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ μλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ λξ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ κλ τῷ ἀπὸ μλ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ κλμν. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, εἰλήφθω τῶν ... ἐκ δύο τετραγώνων, καὶ τὰ κέντρα τὰ ρστ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ ρμ ρκ ρν σκ σλ σμ σν. καὶ φανερὸν ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα. τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν.



δ.

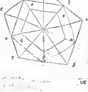
Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι. Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ αβγ αγδ αδε αεβ τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ η θ κ λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ ηκ λκ λθ, λέγω ὅτι τὸ ηθκλ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν η θ κ λ ταῖς βγ γδ δε επ παράλληλοι αἱ μο μν νξ ξο. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ θ κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγ τρίγωνον κύκλου, δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ α γωνίαν τοῦ αβγ τριγώνου. ἴση ἄρα ἡ νθ τῇ μθ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μη τῇ ηο. ἐπεὶ δὲ ἡ μν τῇ μο, καὶ ἡ μο τῇ ξο ἐστὶν ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ νθ τῇ μη, καὶ ἡ θμ τῇ ηο καὶ ἡ μη τῇ οκ. αἱ ὑπὸ θμη καὶ ηοκ ὀρθαί. ἐξ ὧν φανερὸν ὅτι ἡ ηθ ἴση ἐστὶ τῇ ηκ. διὰ



τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ηθκλ, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ μηθ οηκ ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θηκ ὀρθή ἐστι. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί. τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ηθκλ. διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ ἀρχῆς λαμβάνοντες τὰ ηθκλ κέντρα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντες τὰς μν νξ ξο ομ, ἐπιζεύξαντες τὰς ηθ θλ λκ κη, καὶ εἰπεῖν τὸ ηθκλ τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ τὰ αὐτὰ δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα καὶ ἕξομεν εἰς τὸν δοθέντα ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ε.

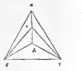
Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι. Ἐκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ αβγδε, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ αζε αζβ βζγ ζγδ δζε τρίγωνα, τὰ η θ κ λ μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηθ θκ κλ λμ μη. καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ζη ζθ ζκ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ ξ ν ο. δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ



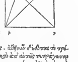
τα αβγ τοῖς ξ, ν, ο σημείοις. καὶ ὡς ἡ νξ πρὸς νο, οὕτως ἡ κθ πρὸς θκ. ἴση ἄρα καὶ ἡ θν τῇ νο. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ κύκλου πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ νξ, νο ταῖς δύο ταῖς κθ, θκ ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. νενοήσθω ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ τοῦ αβγδε ἐπιπέδου πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου, ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ ν σημείου καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ ζ κάθετος ἐπιζεύξωμεν καὶ διὰ τοῦ θ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν. φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ ζ καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ξ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ ζ καθέτου. πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ ζη ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγδε πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ θ τῇ ἀπὸ τοῦ η ἐπιζευγνυμένη ὀρθή, ἣν περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς. ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ κύκλῳ πεντάγωνον. Δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς ὅτι ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν οὕτως. φανερὸν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται. δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνονται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως γὰρ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου. πάλιν ἐπειδὴ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, γίνονται ἑξήκοντα. πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα, διὰ τί δὲ τὸ ἥμισυ ποιοῦμεν; ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρά, κἂν τε ἡ τρίγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ τετράγωνον ὡς ἐπὶ κύβου ἐκ δευτέρου λαμβάνεται. ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου, καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας, εὑρήσεις τὰς πλευράς. εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ, οἷον, ἐπειδὴ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι ε τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰς ε, γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου, ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέρισον παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις κ γωνίας οὔσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας. ἐζητήθη πῶς ἐφ' ἑκάστου τῶν ε στερεῶν σχημάτων ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιουοῦν δοθέντος, εὑρήσομεν καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἑκάστου τῶν σχημάτων. ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου κατ' ὀρθὴν τέμνουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας. καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι, περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι, ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου. οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος διδάσκαλος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῆ ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως. ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνιοῦμεν. καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νενοήσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη ἡ αβγδ,

τοῦ

τοῦ αβγ βάσεως νοουμένης, κορυφῆς δὲ τοῦ δ, καὶ τμηθείσης τῆς αδ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε εγ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ αδβ αδγ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, καὶ δίχα τέτμηται ἡ αδ, αἱ βε γε ἄρα κάθετοι εἰσὶν ἐπὶ τὴν αδ, λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βεγ γωνία ὀξεῖα ἐστί. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ τῆς αε, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ τοῦ ἀπὸ τῆς αε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αε εγ, ὧν τὸ ἀπὸ αγ πρὸς τὸ ἀπὸ γε λόγον ἔχει ὃν δ πρὸς γ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ γε τῇ εβ. τὸ ἄρα ἀπὸ βγ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ βε εγ. ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βεγ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν αβδ αδγ κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αδ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς εἰσὶν εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι, αἱ βε εγ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ βεγ ἄρα γωνία ἡ κλίσις ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων. καὶ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ βγ πλευρὰ οὖσα τοῦ τριγώνου. καὶ ἑκατέρα τῶν εβ εγ κάθετος οὖσα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, κέντροις τοίνυν τοῖς βγ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας ἐπὶ τὸ ε σημεῖον. καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ βγ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. ἔσται δέ σοι οὖν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν, ἑκατέρα γὰρ τῶν βε εγ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βγ. εἰ δὲ κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βγ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. εἰ δὲ ἐλάττων ᾖ, οὐδὲ ἐφάπτονται οὐδὲ τέμνουσιν. εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι, καὶ οὕτως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.



Συνεστάσθω πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ αβγδ πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔσται δὲ ἡ αβγδε πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ αε δίχα ἐπὶ τὸ ζ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ δζ. ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ βζ δζ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αε. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ γωνία ἀμβλεῖα ἐστί. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ αγ, διάμετρος δὲ ἡ βδ, τὸ ἀπὸ βδ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ λόγον ἔχει ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν δ πρὸς γ. καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία. ἴση δὲ ἡ δζ τῇ ζβ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βδ τῶν ἀπὸ τῶν βζ ζδ μεῖζόν ἐστιν. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βζδ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν αβε αδε τεμνόντων ἀλλήλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αε, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσίν, αἱ δὲ βζ ζδ περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ βζδ ἄρα γωνία λείπουσα ἐστὶν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν αβε αδε ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ βζδ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ αδ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγεγράφθαι τὸ αγ, δέδοται καὶ ἡ βδ διάμετρος, οὖσα τοῦ τετραγώνου, ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ βζ ζδ κάθετοι τοῦ τριγώνου, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βζδ γωνία δέδοται. ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τοῦ αγ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τῆς βδ, ἐὰν κέντροις τοῖς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους ἐπὶ τὸ ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ βζδ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα ὡς εἴρηται εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν ὡς ἑκατέρα τῶν βζ ζδ ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ μείζων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους, καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ βδ πρὸς μὲν τὴν δζ δυνάμει λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς βδ δυνάμει ἐστὶ τετραπλασία. ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν βζ ζδ τῆς ἡμισείας τῆς βδ. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

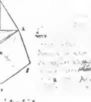


Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυ-

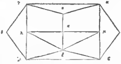
μιᾶς κορυφὴν ἔχουσι τὸ ζ, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα ὄντα, ἔσται δὴ ἡ αβγδε πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ζγ δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βη, ηδ, ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ζγ, λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. καί ἐστιν αὐτόθι φανερόν. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βδ, ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ βγδ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ βηδ. ἐλάττονες γὰρ αἱ βη, ηδ τῶν βγ, γδ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ γωνία, ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο, τῆς κλίσεως τῶν βζγ, γζδ τριγώνων. ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς βδ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν βη, ηδ καθέτων τῶν τριγώνων, δεδοται καὶ ἡ ὑπὸ βηδ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ η. καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὰ β δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστι, ὅτι ἑκατέρα τῶν βη, ηδ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ. ἔστι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι.



Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ θκλ, ἀπὸ δὲ τῆς κλ πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ κμνξλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μλ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ θκλ τριγώνου ἡ θο, λέγω ὅτι ἡ θο μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων, ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ κ ἐπὶ τὴν μλ καθέτου τῆς κπ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κλπ μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ κθο, συνεστάτω τῇ ὑπὸ κθο ἴση ἡ ὑπὸ κλρ. ἡ ἄρα κρ κάθετός ἐστι ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ρλ. ὥστε τὸ ἀπὸ ρλ πρὸς τὸ ἀπὸ λπ, λόγον ἔχει ὃν ὁ δ πρὸς τὸν γ. μείζων δὲ ἡ κλ τῆς λρ. τὸ ἄρα ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λπ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ πρὸς τὸν γ. ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θο, ὃν ὁ δ πρὸς τὸν γ. ἡ ἄρα κλ πρὸς τὴν λπ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν θο. μείζων ἄρα ἡ θο τῆς λπ.



Ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, οὕτως. Νενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου ἀφ' οὗ τὸ δωδεκάεδρον ἀναγράφεται τὸ αβγδ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ αεβζη, ηδβγζ, λέγω δὴ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. τετμήσθω ἡ ζη δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ ζη πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῷ ἐπιπέδῳ αἱ κλ κμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μλ, λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ μκλ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ βιβλίῳ τῶν στοιχείων ἐπὶ τῆς στάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ αβγδ τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ μκλ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ κλ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου.



ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν κλ καὶ τὴν κμ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μλ. τῆς ἄρα ὑπὸ μκλ γωνίας δοθείσης ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ κλίσις, ἔσται τῶν ἐπιπέδων δηλονότι δεδομένη. ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ αβγδ τετραγώνου ἡ ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευ-

ρὰς

ρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον, δέδοται ἄρα ἡ μλ. δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν μκ κλ. κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αβ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν, τοῦ πενταγώνου ὡς τὴν ζη. δέδοται ἄρα ἡ ὑπὸ λκμ ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἴπομεν, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου, ἐπιζεῦξαι τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου. καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, αἱ κλ κμ γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζεῦξαι εὐθείας περιέχουσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων, ὅτι γὰρ ἡ κλ κάθετος, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, εἴρηται. ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο.

Τέλος Εὐκλείδου στοιχείων.

ΠΡΟΚΛΟΥ ΔΙΑΔΟΧΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Τὴν μαθηματικὴν οὐσίαν, οὔτε τῶν πρωτίστων ἐν τοῖς οὖσι γενῶν, οὔτε τῶν ἐσχάτων εἶναι, καὶ παρὰ τὴν ἁπλῶν διῃρημένων ἀναγκαῖον, ἀλλὰ τὴν μέσην χώραν ἀπειληφέναι τῶν τε ἀμερίστων καὶ ἁπλῶν καὶ ἀσυνθέτων καὶ ἀδιαιρέτων ὑποστάσεων, καὶ τῶν μεριστῶν καὶ ἐν συνθέσεσι παντοίαις καὶ ποικίλαις διαιρέσεσιν ἀφωρισμένων. τὸ μὲν γὰρ ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἔχον καὶ μόνιμον καὶ ἀνέλεγκτον τῶν περὶ αὐτὴν λόγων ὑπερανέχουσαν αὐτὴν ἀποφαίνει τῶν ἐν ὕλῃ φερομένων εἰδῶν, τὸ δὲ διεξοδικὸν τῶν ἐπιβολῶν, καὶ τὸ ταῖς διαστάσεσι τῶν ὑποκειμένων προσχρώμενον, καὶ τὸ ἀπ' ἄλλων ἀρχῶν, ἄλλα προκατασκευάζειν, καταδεεστέραν αὐτῇ δίδωσι τάξιν τῆς ἀμερίστου καὶ ἐν αὑτῇ τελέως ἱδρυμένης φύσεως. διόπερ οἶμαι καὶ ὁ Πλάτων, τὰς γνώσεις διῄρει τῶν ὄντων, ταῖς πρώταις καὶ μέσαις καὶ τελευταίαις ὑποστάσεσι. καὶ τοῖς μὲν ἀμερίστοις τὴν νόησιν ἀπέδωκε τὴν ἀθρόως καὶ μετὰ ἁπλότητος διαιροῦσαν τὰ νοητά, καὶ τῇ τε ἀυλίᾳ καὶ τῇ καθαρότητι, καὶ τῇ ἑνοειδεῖ προσβολῇ, καὶ ἐπαφῇ τῶν ὄντων τὰς ἄλλας ὑπεραίρουσαν γνώσεις. τοῖς δὲ μεριστοῖς καὶ φύσιν ἐσχάτην λαχοῦσι, καὶ αἰσθητοῖς ἅπασι τὴν δόξαν ἀμυδρᾶς ἀληθείας ἀντιλαμβανομένην. τοῖς δὲ μέσοις, οἷα δή ἐστι τὰ τῆς μαθηματικῆς εἴδη, καὶ τῆς ἀμερίστου φύσεως ἀπολειπομένοις, καὶ τῆς μεριστῆς ὑπεριδρυμένοις τὴν διάνοιαν. καὶ γὰρ αὕτη, νοῦ μὲν ἐστι δευτέρα, καὶ τῆς ἀκροτάτης ἐπιστήμης, δόξης δὲ τελειοτέρα, καὶ ἀκριβεστέρα, καὶ καθαρωτέρα. διεξοδεύει μὲν γὰρ καὶ ἀναπλοῖ τὸ νοῦ τὴν ἀμετρίαν, καὶ ἀνελίσσει τὸ συνεσπειραμένον τῆς νοερᾶς ἐπιβολῆς, συνάγει δὲ αὖ πάλιν τὰ διῃρημένα, καὶ ἀναφέρει πρὸς τὸν νοῦν. ὥσπερ οὖν αἱ γνώσεις ἀπ' ἀλλήλων διεστήκασιν, οὕτω δὴ καὶ τὰ γνωστὰ διακέκριται φύσει. καὶ τὰ μὲν νοητὰ πάντων, ὑπερήπλωται ταῖς ἑνοειδέσιν ὑπάρξεσι, τὰ δὲ αἰσθητὰ τοῖς πᾶσιν ὑπολείπεται τῶν πρώτων οὐσιῶν. τὰ δὲ μαθηματικά, καὶ ὅλως τὰ διανοητά, μέσην κεκλήρωται τάξιν, τῶν μὲν τῇ διαιρέσει πλεονάζοντα, τῶν δὲ τῇ ἀυλίᾳ προέχοντα. καὶ τῶν μὲν, τῇ ἁπλότητι λειπόμενα, τῶν δὲ, τῇ ἀκριβείᾳ προϋπάρχοντα, καὶ τρανεστέρας μὲν, ἐμφάσεις ἔχοντα τῶν αἰσθητῶν τῆς νοερᾶς οὐσίας, εἰκόνες δὲ ὅμως ὄντα, καὶ μεριστῶς μὲν τὰ ἀμέριστα πολυειδῶς δὲ τὰ μονοειδῆ παραδείγματα τῶν ὄντων ἀπομιμούμενα, καὶ ὡς συλλήβδην εἰπεῖν ἐν προθύροις τεταγμένα τῶν πρώτων εἰδῶν, καὶ ἐκφαίνοντα τὴν ἡνωμένην, καὶ ἀμερῆ, καὶ γόνιμον ἐκείνων ὕπαρξιν, οὔπω δὲ ἄρα τοῦ μερισμοῦ, καὶ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων ὑπερέχοντα καὶ τῆς προσηκούσης ταῖς εἰκόσιν ὑποστάσεως, οὐδὲ ὑπερδραμόντα τὰς ποικίλας καὶ διεξοδικὰς τῆς ψυχῆς νοήσεις, καὶ αὐταῖς συναρμοσθέντα ταῖς ἁπλαῖς καὶ ὕλης ἁπάσης καθαρευούσαις γνώσεσιν. ἡ μὲν δὴ μεσότης τῶν μαθηματικῶν γενῶν δὲ καὶ εἰδῶν τοιαύτη νοείσθω. πρὸς δὲ τὸ παρὸν τὸ μεταξὺ συμπληροῦσα, τῶν τε παντελῶς ἀμερίστων, καὶ τῶν περὶ τὴν ὕλην μεριστῶν γινομένων. Τὰς δὲ ἀρχὰς τῆς μαθηματικῆς ὅλης οὐσίας ἐπισκοποῦντες, ἐπ' αὐτὰς ἀνίωμεν, τὰς διὰ πάντων τῶν ὄντων διηκούσας ἀρχάς, καὶ πάντα ἀφ' ἑαυτῶν ἀπογεννώσας. λέγω δὴ τὸ πέρας, καὶ τὸ ἄπειρον, ἐκ γὰρ τούτων τῶν δύο πρώτων μετὰ τὴν τοῦ ἑνὸς ἀπερίληπτον καὶ τοῖς ἅπασιν ἄληπτον αἰτίαν, ὑπέστη τά τε ἄλλα πάντα, καὶ ἡ μαθηματικῶν φύσις, ἐκείνων μὲν ἀθρόως πάντα παραγουσῶν καὶ ἐξῃρημένως, τῶν δὲ προϊόντων ἐν μέτροις, τοῖς προσήκουσιν, καὶ τάξει τῇ πρεπούσῃ, τὴν πρόοδον κατεχομένων. καὶ τῶν μὲν πρώτων, τῶν δὲ δευτέρων, τῶν δὲ τελευταίων ὑφισταμένων. τὰ μὲν γὰρ νοητὰ γένη διὰ τὴν ἑαυτῶν ἁπλότητα, πρώτως μετέχει τοῦ πέρατος, καὶ τοῦ ἀπείρου διὰ μὲν τὴν ἕνωσιν, καὶ τὴν ταυτότητα καὶ τὴν μόνιμον ὕπαρξιν καὶ

μεσότης τῶν μαθηματικῶν.

κοιναὶ τῶν ὄντων ἀρχαί.

σιν τρόπον τοῦ πέρατος ἐκπληρούμενα, διὰ δὲ τὴν εἰς τὸ πλῆθος διαίρεσιν καὶ τὴν γεννητικὴν προουσίαν, καὶ τὴν θείαν ἑτερότητα καὶ πρόοδον τῆς ἀπειρίας ἐκλαμβάνοντα. τὰ δὲ μαθηματικά, πέρατος μέν ἐστιν ἔκγονα, καὶ ἀπειρίας, ἀλλ' οὐ τῶν πρωτίστων μόνων, οὐδὲ τῶν νοητῶν καὶ κρυφίων ἀρχῶν, ἀλλὰ καὶ τῶν αὖ προελθουσῶν μὲν ἀπ' ἐκείνων εἰς δευτέραν τάξιν, ἀπογεννωσῶν δὲ μετ' ἀλλήλων ἐξαρκοῦσι τοὺς μέσους διακόσμους τῶν ὄντων, καὶ τὴν ἐν αὐτοῖς ποικιλίαν. ὅθεν δὴ καὶ ἐν τούτοις προέρχονται μὲν εἰς ἄπειρον οἱ λόγοι, κρατοῦνται δὲ ὑπὸ τῆς περατοειδοῦς αἰτίας. ὅ τε γὰρ ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀρξάμενος, ἄπαυστον ἔχει τὴν αὔξησιν. ἀεὶ δὲ ὁ ληφθεὶς πεπέρασται, καὶ ἡ τῶν μεγεθῶν διαίρεσις, ἐπ' ἄπειρον χωρεῖ. τὰ δὲ διαιρούμενα πάντα ὥρισται, καὶ κατ' ἐνέργειαν πεπέρασται τὰ μόρια τοῦ ὅλου. καὶ τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὔσης, οὔτε μεγέθη πάντα, σύμμετρα ἂν ἦν, καὶ οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον. οἷς δὴ δοκεῖ διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ, καὶ οἱ ἀριθμοὶ τὴν γόνιμον τῆς μονάδος δύναμιν, οὐκ ἂν ἐδύναντο δεικνύναι, οὐδὲ ἂν πάντας εἶχον τοὺς λόγους ἐν ἑαυτοῖς τῶν ὄντων, οἷον τοὺς πολλαπλασίους, ἢ τοὺς ἐπιμορίους. πᾶς γὰρ ἀριθμὸς ἐξαλλάττει τὸν λόγον πρὸς τὴν μονάδα, καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ γενόμενον ἐξεταζόμενος. τοῦ δὲ πέρατος συμμετρία τε καὶ κοινωνία λόγων, καὶ ταυτότης εἰδῶν καὶ ἰσότης. καὶ ὅσα τῆς ἀμείνονός ἐστι συστοιχίας, οὐκ ἄν ποτε ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο. οὐδ' ἂν ἐπιστῆμαι τῶν τοιούτων ἦσαν, οὐδὲ καταλήψεις μόνιμοι καὶ ἀκριβεῖς. δεῖ τοίνυν ἀμφοτέρων τῶν ἀρχῶν, ὥσπερ τοῖς ἄλλοις γένεσι τῶν ὄντων, οὕτω δὴ καὶ τοῖς μαθηματικοῖς. τὰ δὲ ἔσχατα, καὶ ἐν ὕλῃ φερόμενα καὶ ὑπὸ τῆς φύσεως διαπλαττόμενα πάντῃ αὐτόθεν ἀμφοῖν μετέχοντα καταφαίνεται. τῆς μὲν ἀπείρου κατὰ τὴν ὑποκειμένην αὐτοῖς ἕδραν τῶν εἰδῶν, τοῦ δὲ πέρατος, κατὰ τοὺς λόγους καὶ τὰ σχήματα, καὶ τὰς μορφάς. ἀλλ' ὅτι μὲν ἀρχαὶ καὶ τῶν μαθηματικῶν αὗται προεστήκασιν, αἱ καὶ τῶν ὄντων ἁπάντων, φανερόν.

Communia mathematicae principia.

ὥσπερ δὲ τὰς κοινὰς αὐτῶν ἀρχὰς τεθεωρήκαμεν καὶ διὰ πάντων διηκούσας τῶν μαθηματικῶν γενῶν, οὕτω δὴ καὶ τὰ κοινὰ αὐτῶν θεωρήματα, καὶ ἁπλᾶ, καὶ τῆς μιᾶς ἐπιστήμης ἔγγονα τῆς πάσας ὁμοῦ τὰς μαθηματικὰς γνώσεις ἐν ἑνὶ περιεχούσης ἀναλογισώμεθα, καὶ ὅπως ἐφαρμόττει πάσαις, καὶ δύναται καὶ ἐν ἀριθμοῖς, καὶ ἐν μεγέθεσι, καὶ ἐν κινήσεσι θεωρεῖσθαι, σκοπήσωμεν. τοιαῦτα δέ ἐστι τά τε τῶν ἀναλογιῶν, καὶ τὰ τῶν συνθέσεων καὶ διαιρέσεων, καὶ ἀναστροφῶν καὶ ἐναλλαγῶν. ἔτι δὲ τὰ τῶν λόγων πάντων, οἷον πολλαπλασίων, καὶ ἐπιμορίων ἐπιμερῶν, καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων. καὶ ἁπλῶς τὰ περὶ τὸ ἴσον, καὶ ἄνισον καθόλου θεωρούμενα καὶ κοινῶς, οὐ καθόσον ἐστὶν ἐν σχήμασιν ἢ ἀριθμοῖς, ἢ κινήσεσιν, ἀλλ' αὐτὸ καθ' αὐτὸ τούτων ἑκάτερον φύσιν τινὰ ἔχον κοινήν, καὶ γνῶσιν ἑαυτοῦ παρεχόμενον ἁπλουστέραν. καὶ μὴν καὶ τὸ κάλλος καὶ ἡ τάξις κοινὰ πάντων ἐστὶ τῶν μαθημάτων, καὶ ἡ ἀπὸ τῶν γνωριμωτέρων ὁδὸς ἐπὶ τὰ ζητούμενα, καὶ ἡ ἐκ τούτων ἐπ' ἐκεῖνα μετάβασις, ἃς δὴ καλοῦσιν ἀναλύσεις, καὶ συνθέσεις, ἥ τε ὁμοιότης, καὶ ἡ ἀνομοιότης τῶν λόγων. οὐδ' ὁτουοῦν τῶν μαθηματικῶν γενῶν ἀπολείπουσι. καὶ γὰρ σχήματα, τὰ μὲν ὅμοια, τὰ δὲ, ἀνόμοια λέγομεν. καὶ ἀριθμοὺς ὡσαύτως τοὺς μὲν ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους. καὶ ὅσα κατὰ τὰς δυνάμεις ἀναφαίνονται, πᾶσιν ὁμοίως προσήκει τοῖς μαθήμασι, τῶν μὲν δυναμένων, τῶν δὲ, δυναστευομένων. ἃ δὴ καὶ ὁ ἐν πολιτείᾳ σωκράτης ταῖς μούσαις ὑψηλολογουμέναις, ἀνέθηκε τὰ κοινὰ πάντων μαθηματικῶν λόγων ἐν περιόδοις ὡρισμένοις περιλαβών, καὶ προστησάμενος ἐν τοῖς εἰρημένοις ἀριθμοῖς. ἐφ' ὧν δὴ καὶ τὰ μέτρα, τῆς τε εὐγονίας, καὶ τῆς ἐναντίας πρὸς ταύτην ἀγονίας καταφαίνεται.

Quomodo insit haec principia.

δεῖ δὲ ἄρα τὰ κοινὰ ταῦτα, μήτε ἐν τοῖς πολλοῖς καὶ διῃρημένοις εἴδεσι πρώτως ὑφεστάναι νομίζειν, μήτε ὑστέρως καὶ αὐτῶν πολλῶν ἔχοντα τὴν γένεσιν, ἀλλ' ὡς πρὸ αὐτῶν ἑστῶτα καὶ ἁπλότητι καὶ ἀκριβείᾳ διαφέροντα τίθεσθαι. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ ἡ γνῶσις αὐτῶν προηγεῖται τῶν πολλῶν γνώσεων, καὶ δίδωσι τὰς ἀρχὰς ἐκείναις, καὶ αἱ πολλαὶ περὶ αὐτὴν ὑφεστήκασι καὶ ἐπ' αὐτὴν ἀναφέρονται. λεγέτω γὰρ ὁ γεωμέτρης, ὅτι τεττάρων ὄντων μεγεθῶν, ἀνάλογον ἔσται καὶ τὸ ἐναλλάξ, καὶ δεικνύτω κατὰ τὰς οἰκείας ἀρχάς, αἷς ὁ ἀριθμητικὸς, οὐκ ἄν ποτε χρήσαιτο. καὶ αὖ ὁ ἀριθμητικὸς, ὅτι τεττάρων ὄντων ἀριθμῶν, ἀνάλογον ἔσται, καὶ τὸ ἐναλλάξ, καὶ τοῦτο ἀπὸ τῆς οἰκείας ἐπιστήμης ἀρχῶν. τίς οὖν ὁ καθ' ἑαυτὸν γνωρίζων τὸ ἐναλλάξ, εἴτε ἐν μεγέθεσιν, εἴτε ἐν ἀριθμοῖς, καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν συγκειμένων μεγεθῶν, ἢ ἀριθμῶν, καὶ τὴν σύνθεσιν ὡσαύτως τῶν διῃρημένων. οὐ γὰρ δή που, τῶν μὲν με-

ριστῶν

ρίστων εἰσὶν ἐπιστῆμαι καὶ γνώσεις, τῶν δ' αὖ ἀΰλων, καὶ τῆς νοερᾶς θεωρίας ἐγγυτέρω τεταγμένων, οὐδεμίαν ἔχομεν ἐπιστήμην, ἀλλὰ πολλῷ πρότερον ἡ ἐκείνων γνῶσίς ἐστιν ἐπιστήμη, καὶ ἀπ' ἐκείνης αἱ πολλαὶ τοὺς κοινοὺς ὑποδέχονται λόγους. καὶ μέχρι ποσούτων γνώσεων, ἡ ἄνοδος ἀπὸ τῶν μερικωτέρων ἐστὶ τὰς ὁλικωτέρας, ἕως ἂν ἐπ' αὐτὴν ἀναδράμωμεν, τὴν τοῦ ὄντος ᾗ ὂν ἐστὶν, ἐπιστήμην. αὕτη γὰρ, οὐ τὰ καθ' αὑτὰ τοῖς ἀριθμοῖς ὑπάρχοντα, σκοπεῖν ἀξιοῖ, οὐδὲ τὰ κοινὰ πᾶσι τοῖς ποσοῖς, ἀλλὰ τῶν ὄντων ἁπάντων τὴν μίαν καὶ μόνιμον οὐσίαν, καὶ ὕπαρξιν θεωρεῖ. καὶ διὰ τοῦτο πασῶν ἐστὶ τῶν ἐπιστημῶν περιληπτικωτάτη, καὶ πᾶσαι, παρ' ἐκείνης λαμβάνουσι τὰς ἀρχάς. ἀεὶ γὰρ αἱ ἀνωτέρω ταῖς ὑπ' αὐτὰς παρέχουσι, τὰς πρώτας τῶν ἀποδείξεων ὑποθέσεις. ἡ δὲ τελειοτάτη τῶν ἐπιστημῶν, ἁπάσαις ἀφ' ἑαυτῆς ἐνδίδωσι, ταῖς μὲν, ὁλικωτέρας ἀρχάς. διὸ καὶ ὁ ἐν θεαιτήτῳ σωκράτης [illegible] περιστεραῖς μὲν ἀπεικάζει τὰς ἐν ἡμῖν ἐπιστήμας. πέτεσθαι δὲ αὐτὰς φησί, τὰς μὲν, κατ' ἀγέλας, τὰς δὲ, καὶ χωρὶς ἀπὸ τῶν ἄλλων. αἱ μὲν γὰρ κοινότεραι, πολλὰς ἐν αὑταῖς περιέχουσι μερικωτέρας, αἱ δὲ τῶν διῃρημένων κατ' εἴδη γνωστῶν ἐφαπτόμεναι, διεστήκασιν ἀλλήλων, καὶ ἀσύνακτοι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ἀπὸ διαφερουσῶν ὁρμώμεναι, τῶν πρώτων ἀρχῶν. μία τοίνυν ἐπιστήμη προτετάχθαι τῶν πολλῶν ἐπιστημῶν, καὶ μαθημάτων, ἣ τὰ κοινὰ καὶ διὰ πάντων διήκοντα τῶν γενῶν γνωρίζουσα, καὶ πάσαις ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις χορηγοῦσα τὰς ἀρχὰς, καὶ μέχρι τοῦδε ἐν ἡμῖν ἡ περὶ αὐτῆς ἀφωρίσθω διδασκαλία.

Prima philosophia.

μετὰ δὲ τοῦτο ποτ' αὖ εἴη τὸ κριτήριον τῶν μαθημάτων θεωρήσωμεν, καὶ προσθώμεθα δὲ, ὑπὲρ τῆς τούτων παραδόσεως ἡγεμόνα τὸν πλάτωνα, διαιρούμενον ἐν πολιτείᾳ χωρὶς μὲν τὰ γνωστὰ, χωρὶς δὲ, τὰς γνώσεις. καὶ συζύγους ἀπονέμοντα τοῖς γνωστοῖς τὰς γνώσεις. τῶν γὰρ ὄντων, τὰ μὲν νοητὰ θέμενος, τὰ δὲ αἰσθητὰ, τῶν δ' αὖ νοητῶν, τὰ μὲν νοητὰ πάλιν, τὰ δὲ, διανοητά. καὶ τῶν μὲν αἰσθητῶν τὰ μὲν, αἰσθητὰ, τὰ δὲ, εἰκαστά. τοῖς μὲν νοητοῖς ἃ δὴ τῶν τεττάρων ἐστὶ γενῶν πρώτιστα, γνῶσιν ἐφίστησι τὴν νόησιν, τοῖς δὲ διανοητοῖς διάνοιαν, ταῖς δὲ αἰσθητοῖς, πίστιν, καὶ τοῖς εἰκαστοῖς, εἰκασίαν. καὶ ταύτην ἔχουσαν τὸν λόγον ἀποφαίνει τὴν εἰκασίαν πρὸς τὴν αἴσθησιν, ὃν ἡ διάνοια πρὸς τὴν νόησιν. ἥτε γὰρ εἰκασία, τὰ εἴδωλα γιγνώσκει τῶν αἰσθητῶν, ἐν τε ὕδασι φανταζόμενα καὶ τοῖς ἄλλοις κατόπτροις, ἐσχάτην πως ἐν εἴδεσιν ἔχοντα τάξιν, καὶ εἰδώλων ὄντως εἴδωλα γεγονότα. καὶ ἡ διάνοια τὰς τῶν νοητῶν, εἰκόνας θεωρεῖ, τὰς ἀπὸ τῶν πρώτων καὶ ἁπλῶν καὶ ἀμερίστων εἰδῶν, εἰς πλῆθος καὶ διαίρεσιν ὑποβάσας. διὸ καὶ ταύτης μὲν ἡ γνῶσις, ἀπ' ἄλλων ὑποθέσεων εἴρηται πρεσβυτέρων, ἡ δὲ νόησις ἐπ' αὐτὴν ἄνεισι τὴν ἀνυπόθετον ἀρχήν. εἰ τοίνυν τὰ μαθηματικὰ, μήτε τὴν ἀμέριστον ἔλαχον ὑπόστασιν καὶ χωριστὴν ἀπὸ πάσης διαιρέσεως καὶ ποικιλίας, μήτε τὴν αἰσθήσει γνωριζομένην καὶ πολυμετάβολον, καὶ πάντῃ μεριστὴν, παντί που καταφανὲς, ὅτι διανοητὰ μέν ἐστι κατὰ τὴν οὐσίαν. διάνοια δὲ αὐτῶν προέστηκεν ὡς κριτήριον, ὥσπερ τῶν αἰσθητῶν, ἡ αἴσθησις, καὶ εἰκασία τῶν εἰκαστῶν. ὅθεν δὴ καὶ ὁ σωκράτης, ἀμυδροτέραν μὲν τὴν τούτων γνῶσιν εἶναι διορίζεται τῆς πρωτίστης ἐπιστήμης, τρανοτέραν δὲ τῆς δοξαστικῆς ἐπιβολῆς. τὸ μὲν γὰρ ἀνειλιγμένον καὶ διεξοδικὸν τῆς θεωρίας πλεονάζον ἔχουσι τῆς νοήσεως, τὸ δὲ μόνιμον, τῶν λόγων καὶ ἀνέλεγκτον ὑπερέχον τῆς δόξης. καὶ τὸ μὲν ἐξ ὑποθέσεως ὡρισμένον κατὰ τὴν ὕφεσιν ἔλαχον τῆς πρώτης ἐπιστήμης, τὸ δὲ ἐν ἀΰλοις εἴδεσιν ὑφεστὸς κατὰ τὴν τελειοτέραν τῶν αἰσθητῶν εἴδησιν. τὸ μὲν οὖν κριτήριον τῶν μαθημάτων, ἁπάντων, τοιόνδε κατὰ τὸν νοῦν ἀφοριζόμεθα τοῦ πλάτωνος τὴν διάνοιαν, δόξης μὲν, ὑπεριδρύουσαν ἑαυτὴν, τῆς δὲ νοήσεως ἀπολειπομένην.

Quae uis animi iudicet Mathematicen.

ἕπεται δέ που κατιδεῖν ἡμᾶς, τίνα τὴν οὐσίαν προσήκει λέγειν τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν τε καὶ γενῶν, καὶ πότερον ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν αὐτὴν, ὑφιστάνειν συγχωρητέον, εἴτε κατὰ ἀφαίρεσιν ὥς που λέγειν εἰώθασιν, εἴτε κατὰ ἄθροισιν τῶν μερικῶν εἰς ἕνα τὸν κοινὸν λόγον, ἢ καὶ πρὸ τούτων αὐτῇ τὴν ὑπόστασιν δοτέον, ὥσπερ πλάτων ἀξιοῖ, καὶ ἡ τῶν ὅλων δείκνυσι πρόοδος. πρῶτον μὲν οὖν, εἰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν τὰ μαθηματικὰ εἴδη λέγομεν ὑποστῆναι, τῆς ψυχῆς ἀπὸ τῶν ἐν ὕλῃ τριγώνων ἢ κύκλων, τὸ εἶδος τὸ κυκλικὸν ἢ τὸ τριγωνικὸν ὑστερογενῶς ἐν ἑαυτῇ μορφούσης, πόθεν ἡ ἀκρίβεια καὶ τὸ ἀνέλεγκτον ὑπάρχει τοῖς λόγοις. ἀνάγκη γὰρ, ἢ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν, ἢ ἀπὸ ψυχῆς, ἀλλὰ μὴν ἀπό γε τῶν αἰσθητῶν ἀδύνατον, πολλῷ γὰρ ἂν μᾶλλον ἀκριβείας τούτοις μέτεστιν, ἀπὸ τῆς

Quae substantia totius mathematici generis.

Certitudo huic generi unde.

ψυχῆς ἄρα, τοῖς μὲν ἀτελέσι τὸ τέλειον, τοῖς δὲ μὴ ἀκριβέσι τὸ ἀκριβὲς προστιθείσης. ποῦ γὰρ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, τὸ ἀμερὲς ἢ τὸ ἀπλατὲς, ἢ τὸ ἀβαθὲς, ποῦ δὲ, ἡ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου γραμμῶν ἰσότης, ποῦ δὲ οἱ ἑστῶτες ἀεὶ λόγοι τῶν πλευρῶν, ποῦ δὲ αἱ τῶν γωνιῶν ὀρθότητες, οὐχ ὁρῶμεν ὡς ἐν ἀλλήλοις πάντα τὰ μεριστὰ συμμέμικται, καὶ οὐδὲν ἐν τούτοις εἰλικρινὲς, οὐδὲ τοῦ ἐναντίου καθαρεῦον, ἀλλὰ μεριστὰ πάντα, καὶ διαστατὰ, καὶ ἔνυλα. πῶς οὖν τοῖς ἀκινήτοις ἐκ τῶν κινουμένων καὶ ἄλλοτε ἄλλως ἐχόντων, αὐτὴν τὴν μόνιμον οὐσίαν δώσομεν; πᾶν γὰρ τὸ ἀπὸ κινουμένων οὐσιῶν ὑφιστάμενον, καὶ ὕπαρξιν μεταβλητὴν ἔχειν ὁμολογεῖται παρ' αὐτῶν. πῶς δὲ τοῖς ἀκριβέσι καὶ ἀνελέγκτοις εἴδεσιν ἀπὸ τῶν μὴ ἀκριβῶν τὴν ἀκρίβειαν προσήσομεν. πᾶν γὰρ τὸ τῆς ἀεὶ κινήτου γνώσεως αἴτιον, μειζόνως ἐστὶν αὐτὸ τοιοῦτον. ψυχὴν ἄρα τὴν γεννητικὴν ὑποθετέον, τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν καὶ λόγων. ἀλλ' εἰ μὲν ἔχουσα τὰ παραδείγματα, κατ' οὐσίαν ὑφίστησιν αὐτὰ, καὶ εἰσὶν αἱ γενέσεις προβολαὶ τῶν ἐν αὐτῇ προϋπαρχόντων εἰδῶν. ὥστε Πλάτωνι συνεσόμεθα ταῦτα λέγοντες, καὶ τὴν ἀληθῆ οὐσίαν τῶν μαθημάτων εὑρηκότες ἂν εἴημεν. εἰ δὲ μὴ ἔχουσα, μηδὲ προειληφυῖα τοὺς λόγους τοσοῦτον ὑφαίνει διάκοσμον ἄϋλον, καὶ τοσαύτην ἀπογεννᾷ θεωρίαν, πῶς τὰ γεννηθέντα δύναται διακρίνειν, εἴτε γόνιμα τυγχάνει ὄντα, εἴτε ἀνεμιαῖα καὶ εἴδωλα, ἀντ' ἀληθῶν; ποίοις δὲ κανόσι χρωμένη τὴν ἐν τούτοις ἀλήθειαν παραμετρεῖ; πῶς δὲ καὶ μὴ ἔχουσα τὴν οὐσίαν αὐτῶν ἀπογεννᾷ, τοσαύτην ποικιλίαν λόγων; αὐτοματισμένην γὰρ οὕτω τὴν ὑπόστασιν αὐτῶν ποιησόμεθα καὶ πρὸς οὐδένα ὅρον ἀναφερομένην. εἰ ἄρα ψυχῆς ἐστιν ἔκγονα τὰ μαθηματικὰ εἴδη, καὶ οὐκ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἔχει τοὺς λόγους ὡς ὑφίστησιν ἡ ψυχὴ, καὶ ἀπ' ἐκείνων ταῦτα προβάλλεται, καὶ αἱ ὠδῖνες αὐτῆς, καὶ οἱ τόκοι μενόντων εἰσὶ καὶ ἀϊδίων ἐκφάνσεις εἰδῶν. δεύτερόν τοι νῦν εἰ κάτωθεν καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἀθροίζομεν τοὺς τῶν μαθημάτων λόγους πῶς οὐκ ἀνάγκη τὰς ἀποδείξεις ἀμείνους λέγειν, ὅσαι ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν συνίστανται, καὶ οὐ τὰς ἀπὸ καθολικωτέρων ἀεὶ καὶ ἁπλουστέρων εἰδῶν; τὰ γὰρ αἴτια πανταχοῦ ταῖς ἀποδείξεσιν οἰκεῖα πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν εἶναι φαμέν. εἰ οὖν τὰ μερικὰ τῶν καθόλου, καὶ τὰ αἰσθητὰ τῶν διανοητῶν αἴτια, τίς μηχανὴ τὸν ὅρον τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τὰ καθόλου μᾶλλον ἀναφέρειν ἀντὶ τῶν μερικῶν, καὶ τῶν διανοητῶν τὴν οὐσίαν πρὸ τῶν αἰσθητῶν ταῖς ἀποδείξεσι συγγενεστέραν ἀποφαίνειν. οὐ γὰρ εἴ τις φασὶν ἀποδείξειεν ὅτι τὸ ἰσοσκελὲς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς γωνίας, καὶ ὅτι τὸ ἰσόπλευρον ὡσὶ καὶ τὸ σκαληνὸν ἐπίσταται κατὰ τρόπον, ἀλλὰ πᾶν τρίγωνον, καὶ ἁπλῶς ἀποδείξας ἔχει τὴν ἐπιστήμην καθ' αὐτό. καὶ πάλιν ὅτι τὸ καθόλου βέλτιον, τοῦ ἐπὶ μέρους πρὸς ἀπόδειξιν, καὶ ἐξ ὧν ὅτι αἱ ἀποδείξεις αὐτῶν καθόλου μᾶλλον. ἐξ ὧν δὲ αἱ ἀποδείξεις, ταῦτα πρότερα, καὶ τῇ φύσει προηγούμενα τῶν καθέκαστα, καὶ αἴτια τῶν δεικνυμένων. πολλοῦ ἄρα δέουσιν αἱ ἀποδεικτικαὶ τῶν ἐπιστημῶν, πρὸς τὰ ὑστερογενῆ καὶ τὰ ἀμυδρότερα τῶν αἰσθητῶν ἀφορᾷν. ἔτι δὲ τὸ τρίτον λέγομεν, ὅτι καὶ τὴν ψυχὴν ἀτιμοτέραν ποιοῦσι τῶν ἐνύλων εἰδῶν, οἱ ταῦτα λέγοντες. εἰ γὰρ ἡ μὲν ὕλη, τὰ οὐσιώδη, καὶ μᾶλλον ὄντα καὶ τρανέστερα παρὰ τῆς φύσεως δέχεται, ἡ δὲ ψυχὴ δεύτερα ἀπ' ἐκείνων, καὶ εἴδωλα καὶ εἰκόνας, ὑστερογενεῖς ἐν ἑαυτῇ διαπλάττει πρὸς οὐσίας ἀτιμοτέρας ἀφαιροῦσα τῆς ὕλης τὰ περὶ φύσιν αὐτῆς ἀχώριστα, πῶς οὐχὶ τὴν ψυχὴν, ἀδρανεστέραν τῆς ὕλης, καὶ καταδεεστέραν ἀποφαίνουσι; τόπος μὲν γὰρ καὶ ὕλη τῶν ἐνύλων λόγων, καὶ ἡ ψυχὴ τῶν εἰδῶν. ἀλλ' ἡ μὲν, τῶν πρώτων, ἡ δὲ, τῶν δευτέρων. καὶ ἡ μὲν, τῶν προηγουμένως ὄντων ἡ δὲ τῶν ἐκεῖθεν ὑφισταμένων. καὶ ἡ μὲν, τῶν κατ' οὐσίαν, γινομένων ἡ δὲ, τῶν κατ' ἐπίνοιαν* λεγομένων. πῶς οὖν ἡ νοῦ καὶ τῆς νοερᾶς οὐσίας πρώτης μετέχουσα καὶ πληρουμένη τῆς γνώσεως ἐκεῖθεν, καὶ τῆς ὅλης ζωῆς, ἀμυδροτέρων εἰδῶν ἐστιν ὑποδοχὴ τῆς ἐσχάτης ἐν τοῖς οὖσιν ἕδρας, καὶ πρὸς τὸ εἶναι πάντων ἀτελεστέρας. ἀλλὰ πρὸς μὲν ταύτην ἀπαντᾷν τὴν δόξαν πολλοῖς πολλάκις δυνάμενοι δεδωκέναι, πάρεργον. εἰ δὲ μήτε ἐστὶ περὶ ἀφαίρεσιν τῶν ἐνύλων τὰ μαθηματικὰ εἴδη, μήτε περὶ συναθροισμὸν τῶν ἐν τοῖς καθέκαστα κοινῶν, μήθ' ὅλως ὑστερογενῆ καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν, ἀνάγκη δή που τὴν ψυχὴν, ἢ ἀπ' αὐτῆς, ἢ παρὰ νοῦ λαμβάνειν αὐτὰ, ἢ καὶ παρὰ αὐτῆς καὶ παρ' ἐκείνου. ἀλλ' εἰ μὲν παρ' αὐτῆς μόνον, πῶς εἰκόνες ταῦτα τῶν νοερῶν εἰδῶν, πῶς δὲ μεταξὺ τῆς ἀμερίστου φύσεως καὶ τῆς μεριστῆς μεσιτείαν ἀπὸ τῶν πρώτων εἰς τὸ εἶναι συμπλήρωσιν λαχόντα. πῶς δὲ πρωτουργὰ παραδείγματα τῶν ὅλων τὰ ἐν νῷ προέστηκεν, εἰ δὲ παρ

*πινομένων·

δὲ παρ' ἐκείνου μόνου, πῶς τὸ αὐτενέργητον τῆς ψυχῆς καὶ αὐτοκίνητον δύναται μένειν, ἐπεὶ οἱ ἐν αὐτῇ λόγοι, κατὰ τὴν τῶν ἑτεροκινήτων ὑπόστασιν ἀλλαχόθεν εἰς αὐτὴν ἐῤῥύησαν. καὶ τί διοίσει τῆς ὕλης τῇ δυνάμει μόνον οὔσης πάντα, γεννώσης δὲ οὐδὲν τῶν ἐνύλων εἰδῶν. λείπεται δὴ οὖν καὶ παρ' αὐτῆς καὶ παρὰ νοῦ ταῦτα παράγειν, καὶ εἶναι πλήρωμα τῶν εἰδῶν αὐτήν. ἀπὸ μὲν τῶν νοερῶν παραδειγμάτων ὑφισταμένων αὐτογόνων, καὶ τὴν εἰς τὸ εἶναι πάροδον λαχόντων. καὶ οὐκ ἄρα ἦν ἡ ψυχὴ γραμματεῖον καὶ τῶν λόγων κενόν, ἀλλὰ γεγραμμένον ἀεὶ καὶ γράφον ἑαυτό, καὶ ὑπὸ νοῦ γραφόμενον. νοῦς γάρ ἐστι καὶ ἡ ψυχή, κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ νοῦν ἀνελίττων ἑαυτὸν καὶ εἰκὼν ἐκείνου, καὶ τύπος ἔξω γενόμενος. εἰ οὖν ἐκεῖνος πάντα νοερῶς, καὶ ἡ ψυχὴ τὰ πάντα ψυχικῶς, καὶ εἰ παραδειγματικῶς ἐκεῖνος, ἡ ψυχὴ εἰκονικῶς. καὶ εἰ συνῃρημένως ἐκεῖνος, ἡ ψυχὴ διῃρημένως. ὃ δὴ καὶ ὁ Πλάτων ἰδών, ἐκ πάντων ὑφίστησι τὴν ψυχήν, καὶ κατ' ἀριθμοὺς αὐτὴν διαιρεῖ, καὶ συνδεῖ ταῖς ἀναλογίαις καὶ τοῖς ἁρμονικοῖς λόγοις, καὶ τὰς πρωτουργοὺς ἀρχὰς τῶν σχημάτων ἐν αὐτῇ καταβάλλεται, τό, τε εὐθὺ, καὶ τὸ περιφερές, καὶ κινεῖ τοὺς ἐν αὐτῇ κύκλους νοερῶς. πάντα ἄρα τὰ μαθηματικά, πρώτως ἔστιν ἐν τῇ ψυχῇ, καὶ πρὸ τῶν ἀριθμῶν οἱ αὐτοκίνητοι, καὶ πρὸ τῶν φαινομένων σχημάτων, τὰ ζωτικὰ σχήματα, καὶ πρὸ τῶν ἡρμοσμένων, οἱ ἁρμονικοὶ λόγοι καὶ πρὸ τῶν κύκλῳ κινουμένων σωμάτων, οἱ ἀφανεῖς κύκλοι δεδημιούργηνται. καὶ πλήρωμα πάντων ἡ ψυχή, καὶ διάκοσμος οὗτος ἄλλος αὐτὸς ἑαυτὸν παράγων, καὶ ἀπὸ τῆς οἰκείας ἀρχῆς παραγόμενος, ζωῆς τε πληρῶν ἑαυτόν, καὶ ἀπὸ τοῦ δημιουργοῦ πληρούμενος, ἀσωμάτως καὶ ἀδιαστάτως. καὶ ὅταν προβάλλῃ τοὺς αὐτοῦ λόγους, τότε καὶ ἐπιστήμας προφαίνει, πάσας καὶ ἀρετάς. οὐσιοῦται οὖν ἐν τούτοις ἡ ψυχὴ τοῖς εἴδεσι, καὶ οὔτε τὸν ἀριθμὸν ἐπ' αὐτῆς μονάδων πλῆθος ὑποληπτέον, οὔτε τὴν τῶν διαστατῶν ἰδέαν σωματικῶς ἀκουστέον, ἀλλὰ πάντα ζωτικῶς καὶ νοερῶς τὰ παραδείγματα τῶν φαινομένων ἀριθμῶν καὶ σχημάτων καὶ λόγων καὶ κινήσεων ὑποθετέον, ἑπομένους τῷ Τιμαίῳ, πᾶσαν αὐτῆς τὴν γένεσιν καὶ τὴν δημιουργίαν, ἀπὸ τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν συμπληρώσαντι, καὶ πάντων ἐν αὐτῇ τὰς αἰτίας ἱδρύσαντι. τῶν μὲν γὰρ ἀριθμῶν πάντων οἱ ἑπτὰ ὅροι, κατ' αἰτίαν ἐν αὐτῇ προυφεστήκασι. τῶν δ' αὖ σχημάτων αἱ ἀρχαὶ δημιουργικῶς ἱδρύθησαν ἐν αὐτῇ. τῶν δὲ κινήσεων ἡ πρωτίστη, καὶ τὰς ἄλλας ἁπάσας περιέχουσα καὶ κινοῦσα συνυφέστηκεν αὐτῇ, πάντων γὰρ τῶν κινουμένων ὁ κύκλος ἀρχὴ καὶ ἡ κύκλῳ κίνησις. οὐσιώδεις ἄρα καὶ αὐτοκίνητοι τῶν μαθηματικῶν εἰσὶν οἱ λόγοι, συμπληροῦντες τὰς ψυχάς, οὓς δὴ καὶ προβάλλουσα ἡ διάνοια καὶ ἐξελίττουσα πᾶσαν τὴν ποικιλίαν ὑφίστησι τῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν. καὶ οὐ μή ποτε παύσηται γεννῶσα μὲν ἀεὶ καὶ ἀνευρίσκουσα ἄλλα ἐπ' ἄλλοις. τοὺς δὲ ἀμερεῖς αὐτῆς λόγους ἐξαπλοῦσα. πάντα γὰρ προείληφεν ἀρχοειδῶς καὶ κατὰ τὴν ἄπειρον ἑαυτῆς δύναμιν ἐκ τῶν προειλημμένων ἀρχῶν παντοδαπῶν θεωρημάτων ποιεῖται προβολάς.

λόγοι.

ἀλλὰ δὴ μετὰ τὴν οὐσίαν τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν, ἐπὶ τὴν μετὰ αὐτῶν ἐπιστήμην ἀναδράμωμεν, ἣν πρὸ τῶν πολλῶν ἐδείκνυμεν οὖσαν, καὶ θεωρήσομεν, τί τὸ ἔργον αὐτῆς, καὶ τίνες αἱ δυνάμεις, καὶ ἐπὶ πόσον διατείνουσαι τῆς ἐνεργείας. τὸ μὲν δὴ ἔργον τῆς ὅλης μαθηματικῆς διανοητικόν. ὥσπερ τὸ πρότερον ἔπομεν θετέον, καὶ οὔτε τοιοῦτον ὁποῖον τὸ νοερὸν ἐν ἑαυτῷ μονίμως ἱδρυμένον καὶ τέλειον, καὶ αὐταρκὲς ἀφ' ἑαυτοῦ, καὶ πρὸς ἑαυτὸ συννεῦον, οὔτε οἷον τὸ τῆς δόξης καὶ τῆς αἰσθήσεως. αὗται γὰρ αἱ γνώσεις πρὸς τὰ ἐκτὸς ἀποβλέπονται, καὶ περὶ ἐκεῖνα ἐνεργοῦσι, καὶ τὰς αἰτίας οὐκ ἔχουσι τῶν γιγνωσκομένων, ἡ δὲ αὖ μαθηματική, τῆς μὲν ἀναμνήσεως, ἔξωθεν ἄρχεται. τελευτᾷ δὲ εἰς τοὺς ἔνδον λόγους. καὶ ἀνεγείρεται μὲν ἀπὸ τῶν ὑστέρων, καταντᾷ δὲ εἰς τὴν προηγουμένην οὐσίαν τῶν εἰδῶν. καὶ ἀκίνητος μὲν αὐτῆς οὐκ ἔστιν ἐνέργεια, καθάπερ ἡ νοερά. διὰ δὲ κινήσεως, οὐ τοπικῆς, οὐ δὲ ἀλλοιωτικῆς, ὥσπερ αἱ αἰσθήσεις, ἀλλὰ ζωτικῆς ἀνελίσσεται καὶ διέξεισι τὸν ἀσώματον τῶν λόγων διάκοσμον, τό τε μὲν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ἐπὶ τὰ ἀποτελέσματα χωροῦσα. τό τε δὲ ἀνάπαλιν ἀνοδεύουσα, καὶ τό τε μὲν ἀπὸ τῶν προγιγνωσκομένων, ἐπὶ τὰ ζητούμενα, τό τε δ' ἀπὸ τῶν ζητουμένων, ἐπὶ τὰ προηγούμενα κατὰ τὴν γνῶσιν. ἔτι τοίνυν, οὔτε ὡς πλήρης ἑαυτῆς ἁπάσης ζητήσεως ὑπερίδρυται καθάπερ ὁ νοῦς. οὔτε ἀφ' ἑτέρων τελειοῦται, ὡς ἡ αἴσθησις, ἀλλὰ διὰ ζητήσεως ὑπερίδρυται καθάπερ ὁ νοῦς, οὔτε ἀφ' ἑτέρων τελειοῦται ὡς ἡ αἴσθησις, ἀλλὰ διὰ ζητήσεως εἰς τὴν εὕρεσιν πρόεισι. καὶ ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς εἰς τελειότητα ἀπάνεισι. δυνάμεις γε μὴν ἔχει διττάς,

Mathematicae quod opus, quae uis.

τὰς μὲν εἰς πλῆθος προαγούσας τὰς ἀρχὰς καὶ ἀπογεννώσας τὰς πολυειδεῖς τῆς θεωρίας ἀτραπούς, τὰς δὲ συναγωγοὺς τῶν πολλῶν διεξόδων, εἰς τὰς οἰκείας ὑποθέσεις. διότι γὰρ ἀρχὰς προείληφε, τό, τε ἓν καὶ τὸ πλῆθος, τό, τε πέρας καὶ τὸ ἄπειρον, καὶ τὰ ὑποκείμενα αὐτῇ πρὸς τὴν κατάληψιν μέσην ἐκληρώσατο τάξιν τῶν ἀμερίστων εἰδῶν, καὶ τῶν πάντῃ μεριστῶν, εἰκότως δή οἶμαι καὶ αἱ γνωστικαὶ δυνάμεις τῆς ὅλης αὐτῶν ἐπιστήμης διπλαῖ πεφύκασιν οὖσαι, καὶ αἱ μὲν, εἰς τὴν ἕνωσιν ἀποδίδουσι, καὶ συμπτύσσουσι τὸ πλῆθος· αἱ δὲ, διακριτικαὶ τῶν ἁπλῶν εἰς τὰ ποικίλα, καὶ τῶν καθολικωτέρων εἰς τὰ μερικώτερα, καὶ τῶν ἐν ἀρχικοῖς λόγων τεταγμένων εἰς τὰ δεύτερα καὶ τὰ πολλοστὰ, ἀπὸ τῶν ἀρχῶν. ἄνωθεν γὰρ ἀρχομένη, διήκει μέχρι τῶν αἰσθητῶν ἀποτελεσμάτων, καὶ συνάπτει πρὸς τὴν φύσιν, καὶ συναποδείκνυσι πολλὰ μετὰ τῆς φυσιολογίας. ὥσπερ δὴ κάτωθεν ἐπανιοῦσα συνεγγίζει πως τῇ νοερᾷ γνώσει καὶ ἐφάπτεται τῆς τῶν πρώτων θεωρίας. διὸ δὴ καὶ ἐν περατώσεσιν ἑαυτῆς, τήν τε μηχανικὴν ὅλην προὐβάλετο καὶ τὴν ὀπτικὴν, καὶ τὴν κατοπτρικὴν θεωρίαν, καὶ ἄλλας πολλὰς συμπεπλεγμένας τοῖς αἰσθητοῖς, καὶ δι᾽ ἐκείνων ἐνεργούσας, καὶ ἐν ταῖς ἀνόδοις τῶν ἀμερίστων καὶ ἀΰλων νοήσεων ἀντιλαμβάνεται, καὶ μετ᾽ ἐκείνων τελειοῖ τὰς μεριστὰς ἐπιβολὰς, καὶ τὰς ἐν διεξόδοις φερομένας γνώσεις, τά τε ἑαυτῆς γένη καὶ εἴδη. καὶ ταῖς οὐσίαις ἐκείναις ἀφομοιοῖ, καὶ τὴν περὶ θεῶν ἀλήθειαν, καὶ τὴν περὶ τῶν ὄντων θεωρίαν, ἐν τοῖς οἰκείοις ἐμφαίνει λογισμοῖς. τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων εἰρήσθω. τὸ δὲ ἐντεῦθεν τῆς ἐπιστήμης ταύτης κατίδωμεν ἐξαίφνης, ἀπὸ τῶν ἀρχηγικωτάτων γνώσεων, μέχρι τῶν ἐσχάτων διατεῖνον. ὁ μὲν οὖν τίμαιος, ἐπὶ παίδευσιν ὁδὸν τὴν τῶν μαθημάτων γνῶσιν ἀπεκάλει, διότι δὴ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον πρὸς τὴν τῶν ὅλων ἐπιστήμην, καὶ τὴν πρώτην φιλοσοφίαν, ὃν ἡ παιδεία πρὸς τὴν ἀρετήν. ἡ μὲν γὰρ προδιευτρεπίζει τὴν ψυχὴν ἔθεσι ἀδιαστρόφοις εἰς τὴν τελείαν ζωήν, ἡ δὲ, προκατασκευάζει τὴν διάνοιαν ἡμῶν καὶ τὸ ὄμμα τῆς ψυχῆς εἰς τὴν ἐντεῦθεν περιαγωγήν. διὸ καὶ ἐν πολιτείᾳ σωκράτης ὀρθῶς εἶπεν, ὄμμα γὰρ τῆς ψυχῆς ὑπὸ τῶν ἄλλων ἐπιτηδευμάτων ἀποτυφλούμενον καὶ κατορυττόμενον ὑπὸ τῶν μαθημάτων μόνων ἀναζωπυρεῖσθαί τε, καὶ ἀνεγείρεσθαι πέφυκεν. πάλιν εἰς τὴν θέαν τοῦ ὄντος, καὶ ἀπὸ τῶν εἰδώλων ἐπὶ τὰ ἀληθῆ, καὶ ἀπὸ τῆς σκοτώδους εἰς τὸ νοερὸν μεθίστασθαι φῶς, καὶ ὅλως ἀπὸ τοῦ σπηλαίου καὶ τῶν ἐν τούτῳ γενεσιουργῶν δεσμῶν καὶ τῶν ἀγκτήρων τῆς ὕλης ἐπὶ τὴν ἀσώματον ἀνατείνεσθαι ἀμέριστον οὐσίαν. τό, τε γὰρ κάλλος, καὶ ἡ τάξις τῶν ἐν μαθηματικῇ λόγων, καὶ τὸ μόνιμον καὶ ἑστὸς τῆς θεωρίας, αὐτοῖς ἡμᾶς συνάπτει τοῖς νοητοῖς, καὶ ἐνιδρύει τελέως, ἀεὶ μὲν ἑστῶσιν, ἀεὶ δὲ τῷ θείῳ κάλλει διαπρέπουσιν, ἀεὶ δὲ τὴν πρὸς ἄλληλα τάξιν διασώζουσιν. ὁ δὲ ἐν τῷ φαίδρῳ σωκράτης, τρεῖς ἡμῖν παραδίδωσι τοὺς ἀναγομένους, οἳ καὶ τὸν πρωτιστὸν αὐτῷ συμπληροῦσι βίον, τὸν φιλόσοφον, τὸν ἐρωτικὸν, τὸν μουσικόν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἐρωτικῷ, τῆς ἀναγωγῆς ἀρχὴ καὶ ὁδὸς ἐντεῦθεν ἀπὸ τοῦ φαινομένου κάλλους ἐπαναβιβασμοῖς χρωμένῳ τοῖς μέσοις εἴδεσι τῶν καλῶν. τῷ δὲ μουσικῷ, τρίτην λαχόντι τάξιν ἀπὸ τῶν ἐν αἰσθήσεσιν ἁρμονιῶν, ἐπὶ τὰς ἀφανεῖς ἁρμονίας, καὶ τοὺς λόγους τοὺς ἐν ταύταις ἡ μετάβασις, καὶ τῷ μὲν, ἡ ὄψις, τῷ δὲ, ἡ ἀκοὴ τῆς ἀναμνήσεως ὄργανον. τῷ δὲ φιλοσόφῳ τὴν φύσιν πόθεν ἄρα καὶ διὰ τίνων ἡ ἀνάμνησις τῆς νοερᾶς γνώσεως, καὶ ἡ πρὸς τὸ ὄντως ὂν καὶ τὴν ἀλήθειαν ἔγερσις, δεῖ δὴ καὶ τοῦτον διὰ τὸ ἀτελὲς τῆς οἰκείας ἀρχῆς, ἡ γὰρ φυσικὴ ἀρετὴ, καὶ ὄμμα ἀτελὲς, καὶ ἦθος ἔλαχεν. ἐγήγερται μὲν οὖν ἤδη παρ᾽ αὐτοῦ καὶ ἐπτόηται περὶ τὸ ὂν ὁ τὴν φύσιν τοιοῦτος. δοτέον δὲ αὐτῷ τὰ μαθήματα φησὶν ὁ πλωτῖνος, πρὸς συνεθισμὸν τῆς ἀσωμάτου φύσεως, καὶ τούτοις ὥσπερ σχήμασι χρώμενον, ἀκτέον ἐπὶ τοὺς ἐν τῇ διαλεκτικῇ λόγους. καὶ ὅλως ἐν τῇ τῶν ὅλων θεωρίᾳ. ἀλλ᾽ ὅτι μὲν πρὸς φιλοσοφίαν ἡ μαθηματικὴ τὴν πρωτίστην παρέχεται συντέλειαν, ἐκ τούτων δῆλον. δεῖ δὲ καὶ τῶν καθέκαστον μεμνῆσθαι, καὶ ὅτι θεολογίᾳ μὲν προδιευτρεπίζει τὰς νοερὰς ἐπιβολάς. ὅσα γὰρ τοῖς ἀτελέσι, δυσθήρατα καὶ δυσάλωτα φαίνεται τῆς περὶ τῶν θεῶν ἀληθείας, εἰς διάγνωσιν, ταῦτα οἱ τῆς μαθηματικῆς λόγοι, πιστὰ καὶ κατάφανῆ καὶ ἀνέλεγκτα διὰ τῶν εἰκόνων ἀποφαίνουσι. τῶν μὲν γὰρ ὑπερουσίων ἰδιοτήτων ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τὰς ἐμφάσεις δεικνύουσι, τῶν δὲ νοερῶν σχημάτων, ἐν τοῖς διανοητοῖς τὰς δυνάμεις ἐμφαίνουσι. διὸ δὴ καὶ ὁ πλάτων πολλὰ καὶ θαυμαστὰ δόγματα περὶ θεῶν διὰ τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἡμᾶς ἀναδιδάσκει, καὶ ἡ τῶν πυθαγορείων φιλοσοφία παραπετάσμασι τούτοις χρω-

ταῖς χρωμένη τὴν μυσταγωγίαν κατακρύπτει τῶν θείων δογμάτων. τοιοῦτος γὰρ καὶ ὁ ἱερὸς σύμπας λόγος, καὶ ὁ Φιλόλαος ἐν ταῖς Βάκχαις, καὶ ὅλος ὁ τρόπος τῆς Πυθαγόρου περὶ θεῶν ὑφηγήσεως. πρὸς δὲ τὴν φυσικὴν θεωρίαν, τὰ μέγιστα συμβάλλεται, τήν τε τῶν λόγων εὐταξίαν ἀναφαίνουσα καθ' ἣν διαδεδημιούργηται τὸ πᾶν, καὶ ἀναλογίαν τὴν πάντα τὰ ἐν τῷ κόσμῳ συνδήσασαν, ὥς πού φησιν ὁ Τίμαιος, καὶ φίλα τὰ μαχόμενα, καὶ προσήγορα καὶ συμπαθῆ τὰ διεστῶτα ποιήσασαν, καὶ τὰ ἁπλᾶ καὶ πρωτουργὰ στοιχεῖα, καὶ πάντα τῇ συμμετρίᾳ, καὶ τῇ ἰσότητι συνεχόμενα δείξασαν. δι' ὧν καὶ ὅλος οὐρανὸς ἐτελειώθη, σχήματα τὰ προσήκοντα κατὰ τὰς ἑαυτοῦ μερίδας ὑποδεξάμενος, ἔτι δὲ ἀριθμοὺς τοὺς οἰκείους ἑκάστῳ τῶν γιγνομένων, καὶ ταῖς περιόδοις αὐτῶν, καὶ ταῖς ἀποκαταστάσεσιν ἀνευροῦσα. δι' ὧν τάς τε εὐγονίας ἑκάστων, καὶ τὰς ἐναντίας φορὰς συλλογίζεσθαι δυνατόν. ταῦτα γὰρ οἶμαι καὶ ὁ Τίμαιος ἐνδεικνύμενος πανταχοῦ, διὰ τῶν μαθηματικῶν ὀνομάτων, ἐκφαίνει τὴν περὶ τῆς φύσεως τῶν ὅλων θεωρίαν, καὶ τὰς γενέσεις τῶν στοιχείων ἀριθμοῖς καὶ σχήμασι κατακοσμεῖ, καὶ τὰς δυνάμεις αὐτῶν καὶ τὰ πάθη, καὶ τὰς ποιήσεις εἰς αὐτὰ ἀναφέρει, τῶν τε γωνιῶν τὰς ὀξύτητας καὶ τὰς ἀμβλύτητας, καὶ τῶν πλευρῶν τὰς λειότητας, ἢ τὰς ἐναντίας δυνάμεις, τό τε πλῆθος, καὶ τὴν ὀλιγότητα τῶν στοιχείων αἰτιώμενος τῆς παντοίας μεταβολῆς. πρός γε μὴν τὴν πολιτικὴν καλουμένην φιλοσοφίαν πῶς οὐχὶ φήσομεν αὐτὴν πολλὰ δὴ καὶ θαυμαστὰ συντελεῖν, τούς τε καιροὺς τῶν πράξεων ἀναμετρουμένην, καὶ τὰς ποικίλας περιόδους τοῦ παντός, καὶ τοὺς προσήκοντας ἀριθμοὺς ταῖς γενέσεσι, τούς τε ἀφομοιωματικούς, καὶ τοὺς τῆς ἀνομοιότητος αἰτίους, τούς τε γονίμους καὶ τελείους, καὶ τοὺς ἐναντίους τούτοις, τούς τε ἐναρμονίους ζωῆς χορηγούς, καὶ τοὺς τῆς ἀναρμοστίας, παρεκτικούς. καὶ ὅλως φορᾶς καὶ ἀφορίας οἰκείους. ἃ δὴ καὶ ὁ ἐν Πολιτείᾳ τῶν Μουσῶν λόγος ἐκφαίνει, τὸν γεωμετρικὸν ἀριθμὸν σύμπαντα κύριον ἀμεινόνων καὶ χειρόνων γενέσεων τιθέμενος, καὶ τῆς τε ἀλύτου τῶν ἀδιαστρόφων ἠθῶν διαμονῆς, καὶ τῆς μεταβολῆς τῶν ἀρίστων πολιτειῶν, εἰς τὰς ἀλόγους καὶ ἐμπαθεῖς. ὅτι γοῦν τῆς ὅλης μαθηματικῆς δεῖ τὴν ἐπιστήμην παραδιδοῦσαν τοῦ λεγομένου τούτου γεωμετρικοῦ ἀριθμοῦ, καὶ οὐ μιᾶς τινὸς οἷον ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρίας, παντί που δῆλον. διὰ πάντων γὰρ τῶν μαθημάτων οἱ λόγοι τῆς εὐγονίας καὶ τῆς ἀγονίας διήκουσι. πρὸς δὲ αὖ τὴν ἠθικὴν φιλοσοφίαν ἡμᾶς τελεῖ, τάξιν καὶ ἐναρμόνιον ζωὴν ἐντιθεῖσα ἤθεσιν ἡμῶν, καὶ σχήματα πρέποντα τῇ ἀρετῇ καὶ μέλη καὶ κινήσεις παραδιδοῦσα, ἀφ' ὧν δὴ καὶ ὁ Ἀθηναῖος ξένος τελειοῦσθαι βούλεται τοὺς τῆς ἠθικῆς ἀρετῆς ἐκ νέων μεταληψομένους. τῶν τε ἀρετῶν προτείνει τοὺς λόγους, ἄλλως μὲν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, ἄλλως δὲ ἐν τοῖς σχήμασιν, ἄλλως δὲ ἐν τοῖς κατὰ μουσικὴν συμφωνίαις, καὶ τῶν κακιῶν τὰς ὑπερβολὰς καὶ ἐνδείας παραδεικνύουσι, δι' ὧν ἀποτελούμεθα μέτριοι τὸ ἦθος καὶ κεκοσμημένοι. καὶ διὰ τοῦτο ὁ Σωκράτης ἐν Γοργίᾳ μὲν τὸν Καλλικλέα τῆς ἀτάκτου καὶ ἀκολάστου ζωῆς αἰτιώμενος, γεωμετρίας γάρ φησιν ἀμελεῖς, καὶ τῆς κατ' αὐτὴν ἰσότητος. ἐν Πολιτείᾳ δέ, τῆς τυραννικῆς ἡδονῆς τὴν ἀπόστασιν ἣν ἔλαχεν εὑρίσκει πρὸς τὴν τοῦ βασιλικοῦ κατὰ τὴν ἐπίπεδον γένεσιν, καὶ τὴν στερεάν. ἀλλὰ μὴν ταῖς τε ἄλλαις ἐπιστήμαις τε καὶ τέχναις ἡλίκον τὸ ἀπὸ τῆς μαθηματικῆς ὄφελος παραγίγνεται, μάθοιμεν ἂν ἐννοήσαντες, ὅτι ταῖς μὲν θεωρητικαῖς οἷον ῥητορικῇ καὶ ταῖς τοιαῖσδε πάσαις, ὅσαι διὰ λόγων κυροῦνται, τελειότητα καὶ τάξιν προστίθησι, καὶ τὸ ἐκ πρώτων τε καὶ μέσων καὶ τελευταίων συμπληροῦσθαι, κατὰ τὴν πρὸς αὐτὴν ἀπεικασίαν. ταῖς δὲ ποιητικαῖς ἐν παραδείγματος τάξει προϋφέστηκε τοὺς λόγους τῶν ποιουμένων, καὶ τὰ μέτρα τὰ ἐν αὐτῇ προϋπεστήσατο. ταῖς δὲ πρακτικαῖς, τὴν ἐνέργειαν καὶ τὴν κίνησιν ἀφορίζει διὰ τῶν ἑστώτων ἑαυτῆς καὶ ἀκινήτων εἰδῶν. ὅλως γὰρ αἱ τέχναι πᾶσαι καθάπερ διήρησεν ὁ ἐν Φιλήβῳ Σωκράτης, ἀριθμητικῆς δέονται καὶ μετρικῆς, καὶ στατικῆς, ἤτοι πασῶν, ἢ τινῶν. αὗται δὲ πᾶσαι περιέχονται ἐν τοῖς τῆς μαθηματικῆς λόγοις, καὶ κατ' ἐκείνους ὁρίζονται. καὶ γὰρ αἱ τῶν ἀριθμῶν διανομαί, καὶ ἡ τῶν μέτρων ποικιλία, καὶ ἡ τῶν βαρβάρων διαφορότης, ὑπὸ ταύτης γνωρίζονται. τὸ μὲν τοίνυν ὄφελος, τῆς μαθηματικῆς ὅλης πρός τε φιλοσοφίαν αὐτήν, καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας καὶ τέχνας ἔσται διὰ τούτων γνώριμον τοῖς ἀκούουσιν. ἤδη δέ τινες τῶν ἀντιλογικῶν διὰ τοὺς βουλομένους ἀναβρέπειν

γεωμετρικὸς ἀριθμὸς ὁ ἐν τῷ η' τῆς πολιτείας, πᾶσαν μαθηματικὴν ἀνήκει.

Obiectio cōtra utilitatem.

τὴν γεωμετρίαν ἐπιχειροῦσι καθαιρεῖν τὴν ἀξίαν τῆς ἐπιστήμης ταύτης. οἱ μὲν τὸ καλὸν αὐτῆς καὶ τὸ ἀγαθὸν ἀφαιροῦντες ὡς οὐ περὶ τούτων ποιουμένης τοὺς λόγους, οἱ δὲ χρησιμωτέρας τὰς τῶν αἰσθήσεων ἐμπειρίας ἀποφαίνονται τῶν ἐν αὐτῇ καθόλου θεωρουμένων, οἷον γεωδαισίαν, γεωμετρίας, καὶ τὴν τῶν πολλῶν ἀριθμητικήν, τῆς ἐν θεωρήμασιν ὑφεστώσης, καὶ τὴν ναυτικὴν ἀστρολογίαν, τῆς καθόλου δεικνυούσης. οὔτε γὰρ πλουτοῦμεν περὶ τὸ γιγνώσκειν τὸν πλοῦτον, ἀλλὰ περὶ τὸ χρῆσθαι, οὔτε εὐδαιμονοῦμεν, περὶ τὴν εὐδαιμονίαν γιγνώσκειν, ἀλλὰ περὶ τὸ ζῆν εὐδαιμονικῶς, ὥστε καὶ πρὸς τὸν βίον τὸν κοινὸν καὶ τὰς πράξεις οὐ τὰς γνωστικὰς τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ τὰς ἐμπειρικὰς συντελεῖν ὁμολογήσομεν. οἱ γὰρ ἀγνοοῦντες μὲν τοὺς λόγους γεγυμνασμένοι δέ, περὶ τὴν ἐν τοῖς καθέκαστα πεῖραν, ὅλῳ καὶ παντὶ διαφέρουσι, πρὸς τὰς κοινὰς χρείας τῶν περὶ τὴν θεωρίαν μόνην ἐσχολακότων. πρὸς δὴ τοὺς ταῦτα λέγοντας, ἀπαντησόμεθα, τὸ μὲν κάλλος ἐπιδεικνύντες τῶν μαθημάτων ἀπὸ τούτων ἀφ' ὧν καὶ ἀριστοτέλης ἐπιχείρησεν ἡμᾶς πείθειν. τρία γὰρ ταῦτα διαφερόντως, καὶ

Responsio.

ἐν τοῖς σώμασι, καὶ ἐν ταῖς ψυχαῖς τὸ κάλλος ἀποτελεῖν, τὴν τάξιν, τὴν συμμετρίαν, τὸ ὡρισμένον. ἐπεὶ καὶ τὸ αἶσχος, τὸ μὲν σωματικὸν ἀπὸ τῆς ὑλικῆς ἀταξίας, καὶ ἀμορφίας, καὶ ἀσυμμετρίας, καὶ ἀοριστίας ἐν τῷ συνθέτῳ κρατησάσης, παρυφίσταται. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἀλογίας πλημμελῶς καὶ ἀτάκτως κινουμένης καὶ ἀναρμόστου πρὸς λόγον οὔσης, καὶ τὸν ἐκεῖθεν ὅρον οὐ καταδεχομένης. ὥστε καὶ τὸ κάλλος ἐν τοῖς ἐναντίοις ἂν ἔχοι τὴν ὕπαρξιν, τάξει δηλαδὴ καὶ συμμετρίᾳ, καὶ τῷ ὡρισμένῳ. ταῦτα δὲ ἐν τῇ μαθηματικῇ μάλιστα θεωροῦμεν ἐπιστήμῃ, τὴν μὲν τάξιν ἐν τῇ τῶν ὑστέρων ἀεὶ καὶ ποικιλωτέρων, ἀπὸ τῶν πρώτων καὶ ἁπλουστέρων ἐμφάσει, συνήρτηται γὰρ ἀεὶ τὰ ἑπόμενα τοῖς ἔμπροσθεν, καὶ τὰ μὲν ἀρχῆς ἔχει λόγον, τὰ δέ, τῶν ἑπομένων ταῖς πρώταις ὑποθέσεσι. τὴν δὲ συμμετρίαν ἐν τῇ συμφωνίᾳ τῶν δεικνυμένων πρὸς ἄλληλα καὶ τῇ πρὸς τὸν νοῦν πάντων ἀναφορᾷ. μέτρον γάρ ἐστι τῆς ὅλης ἐπιστήμης, ὁ νοῦς, παρ' οὗ καὶ τὰς ἀρχὰς λαμβάνει καὶ πρὸς ὃν ἐπιστρέφει τοὺς μανθάνοντας. τὸ δὲ ὡρισμένον, ἐν τοῖς ἑστῶσιν ἀεί, καὶ ἀκινήτοις λόγοις. οὐ γὰρ ἄλλοτε ἄλλως ἔχει τὰ γνωστὰ αὐτῆς, ὥσπερ τὰ δοξαστὰ καὶ τὰ αἰσθητὰ ἀλλ' ἀεὶ τὰ αὐτὰ προτείνεται, καὶ ὥρισται τοῖς νοεροῖς εἴδεσιν. εἰ τοίνυν τὰ μὲν ἀποτελεστικὰ τοῦ κάλλους ταῦτα διαφερόντως ἐστί, τὰ δὲ μαθηματικὰ κατὰ ταῦτα χαρακτηρίζεται, πρόδηλον, ὅτι καὶ ἐν τούτοις ἐστὶ τὸ καλόν. καὶ πῶς γὰρ οὐ μέλλει, νοῦ μὲν καταλάμποντος ἄνωθεν τὴν ἐπιστήμην, ταύτης δὲ εἰς νοῦν ἐπειγομένης, καὶ ἡμᾶς ἀπὸ αἰσθήσεως εἰς ἐκεῖνον μετάγειν σπευδούσης, τὸ δ' αὖ ὄφελος αὐτῆς, οὐκ εἰς τὰς κοινὰς χρείας ἀφορῶντας κρίνειν ἀξιώσομεν, οὐδὲ τῆς ἀνάγκης στοχαζομένους. οὕτω γὰρ καὶ τὴν θεωρητικὴν ἀρετὴν αὐτὴν ἄχρηστον ὁμολογήσομεν εἶναι ἑαυτὴν τῶν κοινῶν χωρίζουσαν, καὶ οὐ ταῦτα συντείνει μηδὲ ὅλως γιγνώσκειν ᾑρημένην. ὃ καὶ ἐν θεαιτήτῳ σωκράτης, περὶ τῶν κορυφαίων χρησμῳδῶν ὄντων, πάσης μὲν αὐτοὺς ἀφίστησι σχέσεως τῆς πρὸς τὸν κοινὸν βίον, πάσης δὲ ἀνάγκης καὶ χρείας ἄλυτον αὐτῶν τὴν διάνοιαν εἰς τὴν τῶν ὄντων ἀνατείνει περιωπήν. καὶ τοίνυν καὶ τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην αὐτὴν δι' αὐτὴν αἱρετήν, καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς θεωρίαν εἶναι θετέον, ἀλλ' οὐ διὰ τὰς κοινὰς χρείας. εἰ δὲ χρὴ πρὸς ἄλλο τι τὸ ἐξ αὐτῆς ὄφελος ἀναφέρειν, πρὸς τὴν νοερὰν γνῶσιν τὴν ὠφέλειαν τὴν ἀπ' αὐτῆς ἀνακτέον. εἰς γὰρ ἐκείνην ἡμᾶς προάγει καὶ προευτρεπίζει τὸ ὄμμα τῆς ψυχῆς ἀποκαθαίρουσα καὶ ἀφαιροῦσα, τὰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἐμπόδια πρὸς τὴν γνῶσιν τῶν ὅλων. ὥσπερ οὖν τὴν καθαρτικὴν ὅλην ἀρετὴν οὐ πρὸς τὰς βιωτικὰς χρείας ἀποβλέποντες χρήσιμον ἢ ἄχρηστον φαμέν, ἀλλὰ πρὸς τὸν ἐν θεωρίᾳ βίον, οὑτωσὶ καὶ τῆς μαθηματικῆς τὸ τέλος εἰς νοῦν δεῖ ἀπέμπειν, προσήκει καὶ τὴν σύμπασαν σοφίαν. διὸ καὶ ἡ περὶ αὐτὴν ἐνέργεια, καθ' αὑτήν τε ἐστὶν ἀξία σπουδῆς, καὶ διὰ τὴν νοερὰν ζωήν. δηλοῖ δὲ τὸ δι' αὑτὴν εἶναι τοῖς μετιοῦσιν αἱρετήν, ὃ καὶ ἀριστοτέλης πού φησι, τὸ μηδενὸς μισθοῦ προκειμένου τοῖς ζητοῦσιν, ὅμως ἐν ὀλίγῳ χρόνῳ τοσαύτην ἐπίδοσιν τὴν τῶν μαθημάτων θεωρίαν λαβεῖν. ἔτι δὲ τὸ πάντας ἐν αὐτῇ φιλοχωρεῖν καὶ βούλεσθαι σχολάζειν τῶν ἄλλων ἀφεμένους, ὅσοι καὶ κατὰ μικρὸν ἐφήψαντο τῆς ἀπ' αὐτῆς ὠφελείας. ὥστε οἵ γε καταφρονητικῶς ἔχοντες τῆς τῶν μαθημάτων γνώσεως, ἄγευστοι τυγχάνουσιν ὄντες τῶν ἐν αὐτοῖς ἡδονῶν, οὐ δὴ οὖν διατοῦτο τὴν μαθηματικὴν ἀτιμαστέον, ὅτι μὴ πρὸς κοινὰς ἡμῖν χρείας συντελεῖ· τὰ γὰρ ἔσχατα αὐτῆς

ἀποσχήματα

*ἀποδυσάμενα τῆς τοιαύτης χρείας στοχάζεται, καὶ ὅσα μεθ' ὕλης ἐνεργεῖ, ἀλλὰ τοὐναντίον θαυμαστὴν αὐτῆς τὴν ἀϋλίαν, καὶ τὸ ἐν αὐτῇ μόνῃ τι ἀγαθὸν ἔχειν, καὶ γὰρ ὅλως παυσάμενοι τῆς περὶ τὰ ἀναγκαῖα φροντίδος οἱ ἄνθρωποι περὶ τὴν ζήτησιν ἐτράποντο τῶν μαθημάτων, καὶ τοῦτο εἰκότως. πρῶτα μὲν γὰρ τὰ σύντροφα καὶ ὁμοφυῆ τῇ γενέσει προηγουμένως ἐστὶ τοῖς ἀνθρώποις, δεύτερα δὲ τὰ τῆς γενέσεως ἀπολύοντα τὴν ψυχὴν καὶ ἀναμιμνήσκοντα τοῦ ὄντος. οὕτως ἄρα καὶ τὰ ἀναγκαῖα πρὸ τῶν δι' αὐτὰ τιμίων, καὶ τὰ τῆς αἰσθήσεως σύμφυλα πρὸ τῶν ὑπὸ νοῦ γιγνωσκομένων μετείμεν. καὶ γὰρ πᾶσα ἡ γένεσις, καὶ ἡ ἐν αὐτῇ στρεφομένη τῆς ψυχῆς ζωὴ πέφυκεν ἀπὸ ἀτελοῦς εἰς τὸ τέλειον χωρεῖν. τοσαῦτα καὶ πρὸς τούτους εἰρήσθω τοὺς τὴν μαθηματικὴν ἀτιμάζοντας ἐπιστήμην. ἴσως δ' ἄν τινες ἐκ τῆς ἡμετέρας ἑστίας ὁρμώμενοι, καὶ τὸν Πλάτωνα προϊστάμενοι μάρτυρα τῶν λόγων ἐπιχειρήσειαν εἰς ὑπεροψίαν ἄγειν τοὺς ἐπιπολαιοτέρους τῆς τῶν μαθημάτων ἀκροάσεως. καὶ γὰρ αὐτὸν δήπου τὸν φιλόσοφον ἐν τῇ Πολιτείᾳ τὴν μαθηματικὴν ταύτην γνῶσιν τοῦ τῶν ἐπιστημῶν ἀπελαύνειν χοροῦ, καὶ τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἀγνοοῦσαν διελέγχειν, καὶ τὸ ᾧ ἀρχὴ μὲν, ὃ μὴ οἶδε, τελευτὴ δὲ καὶ μέσα, ἐξ ὧν οὐκ οἶδεν. ἐπὶ τούτοις προσθήσουσι καὶ ὅσα ἄλλα παρὰ τοῦ Σωκράτους ἐν ἐκείνοις ὀνειδίζεται. κατὰ δὴ φίλους ἄνδρας ἡμεῖς ποιούμενοι τοὺς λόγους ἀναμιμνήσομεν αὐτοὺς ὅτι καὶ αὐτὸς ὁ Πλάτων καθαρτικὴν τῆς ψυχῆς καὶ ἀναγωγὸν τὴν μαθηματικὴν εἶναι σαφῶς ἀποφαίνεται, τὴν ἀχλὺν ἀφαιροῦσαν τοῦ νοεροῦ τῆς διανοίας φωτὸς τοῦ κρείττονος σωθῆναι μυρίων σωματικῶν ὀμμάτων κατὰ τὴν ὁμηρικὴν ἀθηνᾶν, ὡς αὖ, μὴ μόνων τῶν ἑρμαϊκῶν δώρων, ἀλλὰ καὶ τῶν ἀθηναϊκῶν μετέχουσαν. καὶ ὡς ἐπιστήμην αὐτὴν ἀποκαλεῖ πανταχοῦ, καὶ ὡς τὴν μεγίστης εὐδαιμονίας αἰτίαν τοῖς μετιοῦσιν. ἀλλὰ τί βούλεται διὰ τῶν ἐν Πολιτείᾳ λόγων ἀφαιρῶν αὐτῆς τὴν τῆς ἐπιστήμης ἐπωνυμίαν, ἐγὼ φράσω συντόμως. πρὸς γὰρ εἰδότας ὁ παρὼν ἔσται μοι λόγος. ἐπιστήμην ὁ Πλάτων, πολλαχοῦ μὲν προσαγορεύει πᾶσαν ὡς εἰπεῖν οὕτω τὴν τοῦ καθόλου γνῶσιν, ἀντιδιαιρούμενος αὐτὴν πρὸς τὴν αἴσθησιν, τὰ καθ' ἕκαστον γνωρίζουσαν, κἂν τεχνικῶς, κἂν ἐμπειρικῶς τῆς τοιαύτης γνώσεως ὁ τρόπος, καὶ κατὰ τοῦτον οἶμαι τὸν λόγον, ἔν τε Πολιτικῷ, καὶ ἐν Σοφιστῇ φαίνεται χρώμενος τῷ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματι, καὶ αὐτὴν τὴν γυναικὴν τὴν σοφιστικὴν ἐπιστήμην τιθέμενος, ἣν ὁ ἐν Γοργίᾳ Σωκράτης, ἐμπειρίαν ἀπέφηνεν οὖσαν, καὶ τὴν κολακικὴν, καὶ πολλὰς ἄλλας ἐμπειρίας οὔσας, ἀλλ' οὐκ ἐπιστήμας ἀληθεῖς. ταύτην δὲ αὐτὴν τὴν καθόλου γνῶσιν διελόμενος, εἴς τε τὴν τῆς αἰτίας γνωρίζουσαν, καὶ τὴν ἄνευ αἰτίας γνωστικὴν, τὴν μὲν ἑτέραν ἐπιστήμην ἀξιοῖ καλεῖν, τὴν δὲ λοιπὴν, ἐμπειρίαν. καὶ οὕτω δὲ, ταῖς μὲν τέχναις μεταδίδωσί που τῆς ἐπιστήμης ὀνόματος, ταῖς δὲ ἐμπειρίαις, οὐδαμῶς. ἄλογον γὰρ πρᾶγμά φησιν ἐν Συμποσίῳ πῶς ἂν εἴη ἐπιστήμη. καὶ πᾶσα ἄρα γνῶσις λόγον ἔχουσα τῶν γνωστικῶν καὶ αἰτίαν, ἐπιστήμη τίς ἐστι. πάλιν τοίνυν τὴν ἐπιστήμην ταύτην ἀπ' αἰτίας γνωριστικὴν τῶν ὑποκειμένων διαιρεῖ. καὶ τὴν μὲν στοχαστικὴν καὶ μεριστὴν, τὴν δὲ τῶν καθ' αὑτὰ καὶ ὡσαύτως ἐχόντων αὖ γνωριστικὴν, καὶ κατὰ ταύτην διαίρεσιν, ἰατρικὴν μὲν καὶ πᾶσαν τὴν περὶ τὰ ἔνυλα πραγματείαν χωρίζει τῆς ἐπιστήμης. τὴν δ' αὖ μαθηματικὴν, καὶ ὅλως τὴν τῶν ἀϊδίων θεωρητικὴν ἐπιστήμην προσαγορεύει. ταύτην δὲ αὖ τὴν ἐπιστήμην, ἣν τῶν τεχνῶν ἀφοριζόμενος διαιρῶν, τὴν μὲν ἀνυπόθετον εἶναι βούλεται, τὴν δὲ, ἐξ ὑποθέσεως ὡρμημένην. καὶ τὴν μὲν ἀνυπόθετον τῶν ὅλων εἶναι γνωστικὴν μέχρι τοῦ ἀγαθοῦ καὶ τῆς ἀνωτάτω τῶν πάντων αἰτίας ἀναβαίνουσαν, καὶ τῆς ἀναγωγῆς τέλος ποιουμένην τὸ ἀγαθόν, τὴν δὲ ὡρισμένας ἀρχὰς προστησαμένην, καὶ ἀπὸ τούτων δεικνύουσαν τὰ ἑπόμενα αὐταῖς, οὐκ ἐπ' ἀρχὴν, ἀλλ' ἐπὶ τελευτὴν οὖσαν. καὶ οὕτως δὴ τὴν μαθηματικὴν, ἅτε ὑποθέσεσι χρωμένην τῆς ἀνυποθέτου καὶ τελείας ἐπιστήμης αὐτὴν τῆς ἀκροτάτης δευτέραν ἀποφαίνει. μὴ δ' ὅτι τὰς οἰκείας ἀρχὰς ἀγνοεῖν αὐτὴν φησίν, ἀλλ' ὅτι παρ' ἐκείνης λαβοῦσαν, καὶ ἀναποδείκτως ἔχουσαν ἐκ τούτων τὰ ἐφεξῆς ἀποδεικνύναι. καὶ γὰρ τὴν ψυχὴν, τὴν ἐκ τῶν μαθηματικῶν ὑποστᾶσαν, ποτὲ μὲν κινήσεως ἀρχὴν εἶναι συγχωρεῖ, ποτὲ δὲ ἀπὸ τῶν νοητῶν γενῶν, δέχεσθαι τὴν κίνησιν. καὶ συνάδει ταῦτα ἀλλήλοις. τοῖς μὲν γὰρ ἀπ' ἄλλων κινουμένοις αἰτία τῆς κινήσεως ἐστίν. ἁπάσης δὲ ἄρα κινήσεως οὐκ αἰτία. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν, καὶ ἡ μαθηματικὴ, τῆς μὲν πρωτίστης ἐστὶν ἐπιστήμης δευτέρα, καὶ ὡς πρὸς ἐκείνην ἀτελής, ἐπιστήμη δὲ ὅμως,

Ad ea quae ex Platone obstare uidentur respondet,

οὐχ ὡς

οὐχ ὡς ἀνυπόθετος, ἀλλ' ὡς τῶν ἰδίων ἐν ψυχῇ λόγων γνωριστική, καὶ ὡς τὰς αἰτίας ἀποδιδοῦσα τῶν συμπερασμάτων, καὶ λόγον ἔχουσα τῶν ὑποκειμένων ἐν αὐτῇ γνωστῶν. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς τοῦ Πλάτωνος γνώμης ὑπὲρ τῶν μαθηματικῶν εἰρήσθω. τίνα δ' ἄν τις ἀπαιτήσειεν τὸν μαθηματικόν, καὶ πῶς ἂν δύναιτό τις αὐτὸν κρίνειν ὀρθῶς, μετὰ ταῦτα λέγωμεν. ὁ μὲν γὰρ ἁπλῶς πεπαιδευμένος τῶν ἐν τούτοις λόγων, ἔσται κριτικὸς τῆς ὀρθότητος. δεῖ τοίνυν ὅρους προσειληφέναι τῆς κρίσεως, καὶ γιγνώσκειν, πρῶτον μὲν ἐφ' ὧν δεῖ κατὰ τὰ κοινὰ ποιεῖσθαι τὰς ἀποδείξεις, καὶ ἐφ' ὧν εἰς τὰς ἑκάστων ἰδιότητας ἀποβλέπειν. πολλὰ γὰρ ὑπάρχει τὰ αὐτὰ τοῖς κατ' εἶδος διαφέρουσιν, οἷον τριγώνοις πᾶσιν αἱ δύο ὀρθαί. πολλὰ δὲ τὴν μὲν αὐτὴν ἔχει κατηγορίαν, διαφέρει δὲ κατ' εἶδος ἐπ' ἑκάστων τὸ κοινόν, οἷον ἡ ὁμοιότης ἐν σχήμασι καὶ ἀριθμοῖς. οὐ δεῖ δὲ μίαν ἀπόδειξιν περὶ τούτων ἀπαιτεῖν τὸν μαθηματικόν. οὐ γὰρ αἱ αὐταὶ ἀρχαὶ σχημάτων καὶ ἀριθμῶν, ἀλλὰ διαφέρουσαι κατὰ τὸ ὑποκείμενον γένος. ὥσπερ δὴ καὶ τὸ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν. εἰ δὲ τὸ καθ' αὑτὸ συμβεβηκὸς ἓν καὶ ἡ ἀπόδειξις μία. τὸ γὰρ δύο ὀρθὰς ἔχειν γωνίας ταὐτὸν ἐν πᾶσι τριγώνοις, καὶ τὸ ᾧ συμβέβηκεν ταὐτὸν ἐν ἅπασιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν τὰς ἐκτὸς τὸ τρίγωνον, καὶ ὁ τριγωνικὸς λόγος. ὥσπερ δὴ καὶ τὸ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν τὰς ἐκτός, οὐ τοῖς τριγώνοις μόνον, ἀλλὰ καὶ πᾶσιν εὐθυγράμμοις ὑπάρχει, καὶ ἡ ἀπόδειξις περὶ πάντα ἐφαρμόττει καθ' ὅσον εὐθύγραμμα. καὶ γὰρ ἕκαστος λόγος, συνεισφέρει τινά, πάντως ἰδιότητα καὶ πάθος οὗ μετέχει πάντα κατὰ τὸν λόγον ἐκεῖνον. οἷον τὸν τριγωνικόν, ἢ τὸν εὐθυγραμμικόν, ἢ ὅλως τὸν τοῦ σχήματος. δεύτερον τοίνυν εἰ κατὰ τὴν ὑποκειμένην ὕλην ποιεῖται τὰς ἀποδείξεις, οἷον, εἰ ἀναγκαίους ἀποδίδωσι λόγους καὶ ἀνελέγκτους. ὅμοιον γάρ φησιν Ἀριστοτέλης ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν, καὶ μαθηματικοῦ πιθανολογοῦντος ἀποδέχεσθαι. δεῖ γὰρ ἕκαστον τὸν ἐπιστήμονα καὶ τεχνίτην προσήκοντας ἀποδιδόναι τοῖς πράγμασι περὶ ἃ πραγματεύεται τοὺς λόγους. οὕτω καὶ ὁ Πλάτων ἐν Τιμαίῳ τὸν μὲν φιλόσοφον εἰκότας ἀπαιτεῖ λόγους, ὡς ἂν περὶ τούτων πραγματευόμενον. τὸν δὲ περὶ τῶν νοητῶν ἀναδιδάσκοντα καὶ τῆς ἑστώσης οὐσίας ἀνελέγκτους καὶ ἀκινήτους. εὐθὺς γὰρ τὰ ὑποκείμενα ταῖς ἐπιστήμαις ἢ ταῖς τέχναις ποιεῖ διαφοράς. οἷον εἰ τὰ μὲν ἀκίνητα, τὰ δέ, κινούμενα, καὶ τὰ μέν, ἁπλούστερα, τὰ δὲ συνθετώτερα, καὶ τὰ μὲν νοητά, τὰ δέ, αἰσθητά. οὔτ' οὖν πάσης τὴν μαθηματικήν, τὴν αὐτὴν ἀκρίβειαν ἀπαιτήσομεν, εἰ γὰρ ἡ μὲν αἰσθητῶν ἐφάπτοιτό πως, ἡ δὲ νοητῶν εἴη γνῶσις ὑποκειμένων οὐχ ὁμοίως ἀμφότεραι ἀκριβεῖς, ἀλλ' ἡ ἑτέρα μᾶλλον. διὸ τὴν ἀριθμητικήν, καὶ τὰς ἄλλας ἐπιστήμας οὐ ταῖς αὐταῖς ἀποδείξεσιν, ἀξιώσομεν χρῆσθαι. τὰ γὰρ ὑποκείμενα, διαφορὰν οὐκ ὀλίγην παρέχεται. τὸ δὲ τρίγωνον λέγομεν, ὅτι καὶ περὶ ταυτότητος καὶ ἑτερότητος ἐπεσκέφθαι δεῖ τὸν μέλλοντα κρίνειν ὀρθῶς τοὺς τῶν μαθηματικῶν λόγους, καὶ τοῦ περὶ καθ' αὑτό, καὶ τοῦ κατὰ συμβεβηκός, καὶ περὶ τῆς ἀναλογίας καὶ περὶ πάντων τῶν τοιούτων. σχεδὸν γὰρ αἱ ἁμαρτίαι πᾶσαι κατὰ ταῦτα συμβαίνουσι τῶν οἰομένων ἀποδεικνύναι μαθηματικῶς, οὐ μήν τοι καὶ δεικνύντων. ὅταν τὸ ταὐτὸν ὡς ἕτερον καθ' ἕκαστον εἶδος ἀποδεικνύωσιν, ἢ τὸ ἕτερον ὡς ταὐτόν, ἢ ὅταν τὸ κατὰ συμβεβηκὸς ὑπάρχον ὡς καθ' αὑτὸ παραλαμβάνωσιν, ἢ τὸ καθ' αὑτό, ὡς κατὰ συμβεβηκός. οἷον, ὅτι ἡ περιφέρεια καλλίων τῆς εὐθείας, ἢ τὸ ἰσόπλευρον τοῦ ἰσοσκελοῦς. οὐ γὰρ μαθηματικοῦ ἐστι ταῦτα διορίζειν. τί γάρ τοι ὅτι τῆς μαθηματικῆς μέσην ἐχούσης τάξιν τῶν τε νοητῶν, καὶ τῶν αἰσθητῶν, καὶ πολλὰς μὲν εἰκόνας τῶν θείων ἐν ἑαυτῇ δεικνυούσης, πολλὰ δὲ παραδείγματα τῶν φυσικῶν λόγων, δεῖ καὶ τὰς ἀποδείξεις τριπλᾶς ἐπ' αὐτῆς θεωρεῖν, τὰς μέν, νοερωτέρας, τὰς δὲ διεξοδικωτέρας, τὰς δὲ καὶ δόξης ἐφαπτομένας. δεῖ γὰρ κατὰ τὰ προβλήματα, τὰς ἀποδείξεις διαφερούσας εἶναι, καὶ οἰκείως τοῖς γένεσι διαιρεῖσθαι τῶν ὄντων, ἐπεὶ καὶ αὐτὴ πᾶσι συνυφαίνεται αὐτοῖς, καὶ πρὸς πάντας συναρμόζει τοὺς ἑαυτῆς λόγους. ἀλλὰ τούτων μὲν ἅδην. περὶ δὲ τῶν εἰδῶν τῆς μαθηματικῆς μετὰ ταῦτα διοριστέον, τίνα τε καὶ πόσα τὸν ἀριθμόν. μετὰ γὰρ τὸ ὅλον καὶ παντελὲς αὐτῆς γένος, δεῖ δήπου καὶ τὰς μερικωτέρας ἐπιστήμας κατ' εἴδη διαφορὰς ἀναλογίσασθαι. τοῖς μὲν οὖν Πυθαγορείοις ἐδόκει τετραχῇ διαιρεῖν τὴν ὅλην μαθηματικὴν ἐπιστήμην. τὸ μὲν γὰρ αὐτῆς περὶ τὸ ποσόν, τὸ δέ, περὶ τὸ πηλίκον ἀφορίζουσι. καὶ τούτων ἑκάτερον διττὸν τιθέμενοι. τὸ τε γὰρ ποσὸν ἢ καθ' αὑτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, ἢ πρὸς ἄλλο θεωρεῖσθαι κατὰ σχέσιν

Quis uir mathematicus.

Disciplinæ mathematicæ species quæ et quot secundum Pythagoricos.

κατὰ σχέσιν. καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἑστὸς, ἢ κινούμενον εἶναι. καὶ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν, τὸ καθ' αὑτὸ ποσὸν θεωρεῖν· τὴν δὲ μουσικὴν, τὸ πρὸς ἄλλο. γεωμετρίαν δὲ, τὸ πηλίκον ἀκίνητον ὑπάρχον, καὶ τὴν σφαιρικὴν τὸ καθ' αὑτὸ κινούμενον. ἐπισκοπεῖν δὲ αὖ τὸ πηλίκον καὶ τὸ ποσὸν, οὔτε μέγεθος ἁπλῶς οὔτε πλῆθος, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑκάτερον ὡρισμένον. τὸ γὰρ ἀφελούσας τῶν ἀπείρων τὰς ἐπιστήμας κατανοεῖν, ὡς οὐ κενὸν τὴν καθ' ἑκάτερον ἀπειρίαν γνῶσιν λαβεῖν. ὅταν δὲ ταῦτα λέγωσιν ἄνδρες εἰς ἄκρον σοφίας ἐληλακότες, οὔτε τὸ ποσὸν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἀκούειν ἡμᾶς ἀξιώσομεν, οὔτε τὸ πηλίκον τὸ περὶ τὰ σώματα φανταζόμενον. τοῦ τε γὰρ οἶμαι θεωρεῖν τῆς φυσιολογίας ἐστὶν, ἀλλ' οὐ τῆς μαθηματικῆς αὐτῆς. ἀλλ' ἐπεὶ τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν ὅλων καὶ τὴν ταυτότητα μετὰ τῆς ἑτερότητος, εἰς τὴν τῆς ψυχῆς συμπλήρωσιν ὁ δημιουργὸς παρείληφε, καὶ πρὸς ταύταις, στάσιν καὶ κίνησιν, ἐκ τούτων αὐτὴν τῶν γενῶν ὑπέστησεν, ὡς ὁ Τίμαιος ἡμᾶς ἐδίδαξεν, λεκτέον ὅτι κατὰ μὲν τὴν ἑτερότητα τῆς αὐτῆς καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν λόγων καὶ τὸ πλῆθος ἡ διάνοια στᾶσα καὶ τὴν ἀριθμητικήν. κατὰ δὲ τὴν ἕνωσιν τοῦ πλήθους, καὶ τὴν πρὸς ἑαυτὸ κοινωνίαν, καὶ τὸν νοοῦσα ἑαυτὴν ἓν καὶ πολλὰ οὖσαν, τούς τε ἀριθμοὺς προβάλλει, καὶ τὴν τούτων γνῶσιν, συνδεσμὸν, τὴν μουσικήν. διὸ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ πρεσβυτέρα τῆς μουσικῆς, ἐπεὶ καὶ ἡ ψυχὴ διαιρεῖται πρώτως δημιουργικῶς, εἶθ' οὕτω συνδεῖται τοῖς λόγοις, ὡς ὁ Πλάτων ὑφηγεῖται. καὶ αὖ πάλιν, κατὰ μὲν τὴν στάσιν τὴν ἐν αὐτῇ ἐνέργειαν ἱδρύουσα, γεωμετρίαν ἀφ' ἑαυτῆς ἐξέφηνε, καὶ τὸ ἓν σχῆμα, καὶ τὰς δημιουργικὰς ἀρχὰς τῶν σχημάτων πάντων. κατὰ δὲ τὴν κίνησιν τὴν σφαιρικὴν, κινεῖται γὰρ καὶ αὐτὴ κατὰ τοὺς κύκλους, ἕστηκεν δὲ ἀεὶ ὡσαύτως κατὰ τὰς αἰτίας τῶν κύκλων, τὸ εὐθὺ καὶ περιφερές, καὶ διὰ τοῦτο κἀνταῦθα προυφέστηκεν ἡ γεωμετρία τῆς σφαιρικῆς, ὥσπερ ἡ στάσις τῆς κινήσεως. ἐπεὶ δὲ οὐκ εἰς ἀπεροδιώλαμον ἑαυτῆς ἀφορῶσα τῶν εἰδῶν ἀνέλιξιν τὰς ἐπιστήμας ἐγέννησε ταύτας, ἀλλ' εἰς τὴν κατ' αὐτὴν τοῦ πέρατος περιοχὴν, διὰ τοῦτο φασὶν αὐτὰς ἀπό τε τοῦ πλήθους καὶ μεγέθους ἀφελούσας τὸ ἄπειρον περὶ τὸ πεπερασμένον ἤδη τὴν πραγματείαν ἔχειν. ἀρχὰς γὰρ ἐν αὐτῇ πάντως ἱδρυσεν ὁ νοῦς καὶ τοῦ πλήθους, καὶ τοῦ μεγέθους. ἐπεὶ καὶ ὁμοιομερὴς οὖσα ὅλη πρὸς ἑαυτὴν, καὶ μία καὶ ἀδιαίρετος, καὶ αὖ πάλιν διῃρημένη, καὶ τὸν τῶν εἰδῶν ἐκφαίνουσα κόσμον, πέρατός τε μετέχει καὶ ἀπειρίας οὐσιωδῶς ἀπὸ τῶν νοητῶν. ἀλλὰ νοεῖ μὲν αὐτὰ κατὰ τὸ πέρας τὸ ἐν αὐτοῖς, ἀλλ' οὐ κατὰ τὴν ἀπειρίαν τῆς ζωῆς. νοῦ γὰρ εἰκόνα φέρουσιν, ἀλλ' οὐ ζωῆς. τῶν μὲν οὖν πυθαγορείων λόγος οὗτος, καὶ ἡ τῶν τεττάρων ἐπιστημῶν διαίρεσις.

κατ' ἄλλον δ' αὖ τρόπον τὴν μαθηματικὴν τέμνειν τινὲς ἀξιοῦσιν ὥσπερ καὶ γεμῖνος. καὶ ποιοῦσι τὴν μὲν περὶ τὰ νοητὰ μόνον, τὴν δὲ, περὶ τὰ αἰσθητὰ, καὶ τούτων ἐφαπτομένην. νοητὰ δὲ που καλοῦντες ὅσα καθ' ἑαυτὴν ἡ ψυχὴ θεάματα ἀνακινεῖ χωρίζουσα τῶν ἐνύλων ἑαυτὴν εἰδῶν. καὶ τῆς μὲν, περὶ τὰ νοητὰ πραγματευομένης, δύο τὰ πρώτιστα καὶ κυριώτατα μέρη τίθενται, ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρίαν. τῆς δὲ περὶ τὰ αἰσθητὰ, τὴν ἐνέργειαν ἐχούσης, ἓξ μηχανικὴν, ἀστρολογίαν, ὀπτικὴν, γεωδεσίαν, κανονικὴν, λογιστικήν. τὸ δὲ αὖ τακτικὸν, οὐκ ἀξιοῦσιν ἕν τι τῶν μερῶν τῆς μαθηματικῆς λέγειν, ὥσπερ ἕτεροι, ἀλλὰ προσχρῆσθαι, τότε μὲν, λογιστικῇ καθάπερ ἐν ταῖς τῶν ἀριθμήσεσι τῶν λόχων, τοτὲ δὲ γεωδεσίᾳ, καθάπερ ἐν ταῖς διαιρέσεσι τῶν χωρίων, καὶ ταῖς ἀναμετρήσεσιν. ὥσπερ δὴ πολλῷ πλέον, οὔτε τὸ ἱστορικὸν, οὔτε τὸ ἰατρικὸν μέρος εἶναι μαθηματικῆς, εἰ καὶ προσχρῶνται πολλάκις, οἵ τε τὰς ἱστορίας γράφοντες τοῖς μαθηματικοῖς θεωρήμασιν, ἢ θέσεις κλιμάτων φράζοντες ἢ μεγέθη πόλεων, καὶ διαμέτρους, ἢ περιβόλους ἢ περιμέτρους, συλλογιζόμενοι. καὶ ἰατροὶ πολλὰ τῶν οἰκείων διὰ τῶν τοιούτων ἐφόδων σαφηνίζοντες. τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ἀστρολογίας ὄφελος εἰς ἰατρικὴν καὶ Ἱπποκράτης δῆλον ποιεῖ, καὶ πάντες ὅσοι τι περὶ ὡρῶν καὶ τόπων εἰρήκασι. κατὰ ταὐτὰ δὴ οὖν καὶ ὁ τακτικὸς χρήσεται μὲν τοῖς θεωρήμασι τῶν μαθηματικῶν, οὐ μὲν τοι μαθηματικός ἐστιν, εἰ καὶ ποτὲ μὲν ἐλάχιστον δεῖξαι τὸ πλῆθος βουλόμενος, εἰς κύκλον σχηματίσει τὸ στρατόπεδον, ποτὲ δὲ πλεῖστον εἰς τετράγωνον, ἢ πεντάγωνον, ἢ ἄλλο τι πολύγωνον. τούτων γὰρ τῶν εἰδῶν ὄντων τῆς ὅλης μαθηματικῆς, ἡ μὲν γεωμετρία, διαιρεῖται πάλιν εἴς τε τὴν ἐπίπεδον θεωρίαν, καὶ τὴν στερεομετρίαν. περὶ γὰρ σημεῖα καὶ γραμμὰς ἰδιάζουσά τις οὐκ ἔστι πραγματεία. καθ' ὅσον οὐδὲ σχῆμα γένοιτο ἂν ἐν τούτοις ἄνευ ἐπιπέδων ἢ στερεῶν. παν

τα χοῦ γ

Alia secundum Geminum.

ταχοῦ γε μὴν ἔργον τῆς γεωμετρίας, ἔν τε ἐπιπέδοις καὶ στερεοῖς, ἢ συνιστάναι, ἢ συγκρίνειν, ἢ διαιρεῖν τὰ συνεστῶτα. τῆς δὲ ἀριθμητικῆς ὡσαύτως ἡ διαίρεσις, εἴς τε τὴν τῶν γραμμικῶν ἀριθμῶν θεωρίαν, καὶ τὴν τῶν ἐπιπέδων, καὶ τὴν τῶν στερεῶν. καὶ γὰρ τὰ εἴδη τοῦ ἀριθμοῦ καθ᾽ αὑτὰ σκοπεῖ προϊόντα ἀπὸ μονάδος, καὶ τὰς γενέσεις τῶν ἐπιπέδων τῶν τε ὁμοίων, καὶ τῶν ἀνομοίων, καὶ τὰς εἰς τρίτην αὔξησιν προόδους. γεωδαισία δὲ, καὶ λογιστικὴ, ταύταις ἀνάλογον, οὐ περὶ νοητῶν ἀριθμῶν ἢ σχημάτων, ἀλλὰ περὶ αἰσθητῶν ποιούμεναι τοὺς λόγους. οὐ γὰρ κύλινδρον ἢ κῶνον, ἔργον τῆς γεωδαισίας μετρεῖν, ἀλλὰ σωροὺς ὡς κώνους, καὶ φρέατα ὡς κυλίνδρους, οὐδὲ διὰ εὐθειῶν νοητῶν, ἀλλὰ αἰσθητῶν, ποτὲ μὲν, ἀκριβεστέρων οἷον διὰ σπάρτων καὶ διὰ στάθμης. οὐδ᾽ αὖ ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ᾽ αὑτὰ θεωρεῖ τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν· ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν τοῖς ἀπὸ τῶν μετρουμένων τίθεται, μηλίτας καλῶν τινὰς καὶ φιαλίτας, καὶ ἐλάχιστον μὲν οὐδὲν εἶναι συγχωρεῖ καθάπερ ἀριθμητικὸς, ὡς μέντοι πρός τι γένος λαμβάνει τὸ ἐλάχιστον. ὁ γὰρ εἷς ἕνος μέτρον αὐτῷ γίγνεται τοῦ πλήθους ὡς μονάς. πάλιν ὀπτικὴ καὶ κανονικὴ, γεωμετρίας εἰσὶ καὶ ἀριθμητικῆς ἔκγονοι. ἡ μὲν ταῖς ὄψεσι γραμμαῖς χρωμένη, καὶ ταῖς ἐκ τούτων συνισταμέναις γωνίαις, διαιρουμένη δὲ, εἴς τε τὴν ἰδίως καλουμένην ὀπτικὴν, ἥτις τῶν ψευδῶς φαινομένων παρὰ τὰς ἀποστάσεις τῶν ὁρατῶν τὴν αἰτίαν ἀποδίδωσιν, οἷον τῆς τῶν παραλλήλων συμπτώσεως ἢ τῆς τῶν τετραγώνων ὡς κύκλων θεωρίας. καὶ εἰς τὴν κατοπτρικὴν σύμπασαν, τὴν περὶ τὰς ἀνακλάσεις τὰς παντοίας πραγματευομένην, καὶ τῇ εἰκαστικῇ γνώσει συμπλεκομένην. καὶ τὴν λεγομένην σκιογραφικὴν, δεικνύουσαν, πῶς ἂν τὰ φαινόμενα μὴ ἄρρυθμα ἢ ἄμορφα φαντάζοιτο ἐν ταῖς εἰκόσι παρὰ τὰς ἀποστάσεις, καὶ τὰ ὕψη τῶν γεγραμμένων. ἡ δὲ αὖ κανονικὴ τοὺς φαινομένους λόγους τῶν ἁρμονιῶν σκοπεῖ, τὰς τῶν κανόνων κατατομὰς ἀνευρίσκουσα, καὶ τῇ αἰσθήσει πανταχοῦ προσχρωμένη, καὶ ὥς φησιν ὁ πλάτων, ὦτα τοῦ νοῦ. πρὸς δὲ ταύταις ἡ μηχανικὴ καλουμένη τῆς περὶ τὰ αἰσθητὰ καὶ τὰ ἔνυλα πραγματείας μέρος ὑπάρχουσα. ὑπὸ δὲ ταύτην, ἥ τε ὀργανοποιητικὴ τῶν κατὰ πόλεμον ἐπιτηδείων ὀργάνων, οἷα δὴ καὶ ἀρχιμήδης λέγεται κατασκευάσαι τῶν πολεμούντων τὴν συρακοῦσας ἀμυντικὰ ὄργανα. καὶ ἡ θαυματοποιητικὴ, τὰ μὲν, διὰ πνευμάτων φιλοτεχνοῦσα, ὥσπερ καὶ κτησίβιος καὶ ἥρων πραγματεύονται, τὰ δὲ διὰ ῥοπῶν, ὧν τῆς μὲν κινήσεως τὴν ἀνισορροπίαν αἰτιατέον, τῆς δὲ στάσεως ἰσορροπίαν, ὥσπερ καὶ ὁ τίμαιος διώρισε, τὰ δὲ διὰ νεύρων καὶ σπάρτων ἐμψύχους ὁλκὰς καὶ κινήσεις ἀπομιμουμένων. ὑπὸ δὲ τὴν μηχανικὴν ἐστὶ καὶ ἡ τῶν ἰσορρόπων ὅλως καὶ τῶν λεγομένων κεντροβαρικῶν διάγνωσις, καὶ ἡ σφαιροποιία, κατὰ μίμησιν τῶν οὐρανίων περιφορῶν, οἵαν καὶ ἀρχιμήδης ἐπραγματεύετο. καὶ ὅλως, πᾶσα ἡ τῆς ὕλης κινητική. λοιπὴ δὲ ἡ ἀστρολογία περὶ τῶν κοσμικῶν κινήσεων διαλαμβάνουσα, καὶ περὶ μεγεθῶν καὶ σχημάτων τῶν οὐρανίων σωμάτων, καὶ φωτισμῶν καὶ ἀποστάσεων τῶν ἀπὸ γῆς καὶ τῶν τοιούτων ἁπάντων, πολὺ μὲν ἀπολαύουσα τῆς αἰσθήσεως, πολὺ δὲ πρὸς τὴν φυσικὴν ἐπικοινωνοῦσα θεωρίαν. ταύτης δὲ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ἡ γνωμονικὴ περὶ τὴν ὡρῶν καταμέτρησιν ἀσχολουμένη διὰ τῆς τῶν γνωμόνων θέσεως. καὶ μετεωροσκοπικὴ τῶν ἐξαρμάτων τὰς διαφορὰς, καὶ τῶν ἄστρων τὰς ἀποστάσεις ἀνευρίσκουσα, καὶ πολλὰ ἄλλα καὶ ποικίλα τῶν κατὰ ἀστρολογίαν θεωρημάτων ἀναδιδάσκουσα. καὶ ἡ διοπτρικὴ τὰς ἀποχὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν ἄλλων ἄστρων καταμανθάνουσα διὰ τῶν τοιούτων ὀργάνων. τοιαῦτα καὶ περὶ τῶν τῆς μαθηματικῆς μερῶν ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἀναγεγραμμένα παρειλήφαμεν. εἶεν οὖν δὴ, πάλιν ἐκεῖνα θεωρήσομεν, ὅπως ὁ πλάτων θριγκὸν τῶν μαθημάτων ἐν πολιτείᾳ, τὴν διαλεκτικὴν προσείρηκεν, καὶ ὅστις ὁ σύνδεσμος αὐτῷ νοητὴν* ἐπινομίδι συνθεὶς καὶ παραδίδωσι. καὶ λέγω μὲν ὅτι καθάπερ ὁ νοῦς ὑπερίδρυται τῆς διανοίας, καὶ χορηγεῖ τὰς ἀρχὰς ἄνωθεν αὐτῇ, καὶ τελειοῖ τὴν διάνοιαν ἀφ᾽ ἑαυτοῦ, κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ διαλεκτικὴ, φιλοσοφίας οὖσα τὸ καθαρώτατον, προσεχῶς ὑπερήπλωται τῶν μαθηματικῶν, καὶ περιέχει τὴν ὅλην αὐτῶν ἀνέλιξιν, καὶ δίδωσι δυνάμεις ἀφ᾽ ἑαυτῆς ταῖς ἐπιστήμαις αὐτῶν παντοίας τελεσιουργοὺς καὶ κριτικὰς καὶ νοερὰς, τὴν ἀναλυτικὴν, λέγω καὶ τὴν διαιρετικὴν, καὶ τὴν ὁριστικὴν, καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν, ἀφ᾽ ὧν δὴ χορηγουμένη, καὶ τελειουμένη, ἡ μαθηματικὴ, τὰ μὲν διὰ ἀναλύσεως εὑρίσκει, τὰ δὲ, διὰ συνθέσεως. καὶ τὰ μὲν διαιρετικῶς ὑφηγεῖται, τὰ δὲ, ὁριστικῶς,

τὰ δὲ

τὰ δὲ, διὰ ἀποδείξεως κατασκευάζουσα τῶν ζητουμένων, καὶ συναρμόζουσα τοῖς ὑποκειμένοις ἑαυτῆς τὰς μεθόδους ταύτας, χρωμένη δὲ καὶ ἑκάστῃ πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν μέσων λόγων. ὅθεν δὴ καὶ αἱ ἀναλύσεις ἀπ' αὐτῆς καὶ οἱ ὁρισμοὶ, καὶ αἱ διαιρέσεις, καὶ αἱ ἀποδείξεις οἰκεῖαί τέ εἰσι, καὶ κατὰ τὸν τρόπον τῆς μαθηματικῆς γνώσεως ἀνελίσσονται. θριγκὸς οὖν εἰκότως ἐστὶν ἡ διαλεκτικὴ τῶν μαθημάτων, πᾶν τὸ νοερὸν αὐτῶν τελειοῦσα, καὶ τὸ ἀκριβὲς ἀνελεγκτότερον ἀπεργαζομένη, καὶ τὸ ἀκίνητον μόνιμον ὡσαύτως διαφυλάττουσα, καὶ τὸ ἄυλον καὶ τὸ καθαρὸν εἰς τὴν ἁπλότητα τὴν τοῦ νοῦ, καὶ τὴν ἀϋλίαν ἀναφέρουσα. καὶ τάς τε ἀρχὰς αὐτῶν τὰς πρώτας ἀφορίζουσα διὰ τῶν λόγων, καὶ τὰς τῶν γενῶν καὶ εἰδῶν τῶν ἐπ' αὐτὰ διακρίσεις ἐμφαίνουσα, τὰς συνθέσεις τὰς ἐκ τῶν ἀρχῶν, τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς προαγούσας, καὶ τὰς ἀναλύσεις τὰς ἐπὶ τὰ πρῶτα, καὶ τὰς ἀρχὰς ἐπανιούσας ἀναδιδάσκουσα. καὶ μὴν καὶ τὸν σύνδεσμον τῶν μαθημάτων, οὐ τὴν ἀναλογίαν ὥσπερ Ἐρατοσθένης οἴεται θετέον. ἡ γὰρ ἀναλογία τῶν κοινῶν τοῖς μαθήμασιν, ἕν τι καὶ λέγεται εἶναι καὶ ἔστι. πολλὰ δὲ αὖ καὶ ἄλλα διήκει διὰ πάντων ὡς εἰπεῖν τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα τῇ κοινῇ φύσει τῶν μαθημάτων. ἀλλ' ὡς ἡμεῖς ἂν φαίημεν, προσεχὴς μὲν ἐστιν αὐτῶν σύνδεσμος, ἡ μία καὶ ὅλη μαθηματικὴ, τὰς πασῶν τῶν καθ' ἕκαστα ἐπιστημῶν ἀρχὰς ἁπλούστερον ἐν ἑαυτῇ περιέχουσα, καὶ τήν τε κοινωνίαν αὐτῶν καὶ τὴν διαφορὰν ἐπισκεψαμένη, καὶ ὅσα τὰ αὐτὰ ἐν πάσαις ἀναδιδάσκουσα, καὶ ὅσα πλείοσιν ὑπάρχει, καὶ ὅσα ἐλάττοσι. καὶ ἐπὶ ταύτην ἐκ τῶν πολλῶν ἡ ἄνοδος τοῖς κατὰ τρόπον μανθάνουσιν. ἐπέκεινα δ' ἔτι ταύτης ἡ διαλεκτικὴ τῶν μαθημάτων εἴη σύνδεσμος. ἣν καὶ θριγκὸν αὐτῶν ὡς ἔφην ἐν πολιτείᾳ προσείρηκεν. αὕτη γὰρ καὶ τὴν ὅλην μαθηματικὴν τελειοῖ, καὶ εἰς νοῦν ἀναπέμπει ταῖς ἑαυτῆς δυνάμεσι, καὶ ἐπιστήμην ὄντως ἀποφαίνει καὶ μόνιμον, καὶ ἀνέλεγκτον ἀπεργάζεται. τρίτην δ' ἂν ἔχοι τάξιν ἐν τοῖς συνδέσμοις ὁ νοῦς αὐτὸς, ὁ πάσας τὰς διαλεκτικὰς δυνάμεις ἐν ἑαυτῷ μονοειδῶς περιέχων, καὶ τὴν ποικιλίαν αὐτῶν, διὰ τῆς ἁπλότητος, καὶ τὸν μερισμὸν, διὰ τῆς ἀμεροῦς γνώσεως, καὶ τὸ πλῆθος, διὰ τῆς ἑνώσεως συνάγων. αὐτὸς δὴ οὖν συμπεραιοῖ μὲν τὰς ἀνελίξεις τῶν διαλεκτικῶν μεθόδων, συνδεῖ δὲ ἄνωθεν πᾶσαν τὴν διέξοδον, τῶν μαθηματικῶν λόγων. τέλος δέ ἐστι τὸ ἄριστον τῆς ἀναγωγοῦ πορείας, καὶ τῆς γνωστικῆς ἐνεργείας. ταῦτά μοι περὶ τούτων διωρίσθω.

Θριγκὸς quomodo.

Τὸ δὲ αὖ ὄνομα αὐτὸ τοῦτο τῆς μαθηματικῆς, καὶ τὸ τῶν μαθημάτων, πόθεν ἂν φαῖμεν ὑπὸ τῶν παλαιῶν ταῖς ἐπιστήμαις ταύταις ἀποδεδόσθαι, καὶ τίνα ἂν ἔχοι προσήκοντα λόγον; δοκεῖ δ' ἔμοι, καὶ τῶν ἐπιτυχόντων εἶναι καθάπερ δὴ τὰ πολλὰ τῶν ὀνομάτων, ἡ τοιαύτη τῆς ἐπιστήμης τῶν διανοητικῶν λόγων προσηγορία. ἀλλ' ὥσπερ δὴ καὶ λέγεται τῶν Πυθαγορείων, κατειδότων μὲν ὅτι πᾶσα ἡ καλουμένη μάθησις, ἀνάμνησίς ἐστιν· οὐκ ἔξωθεν ἐντιθεμένη ταῖς ψυχαῖς, ὥσπερ τὰ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν φαντάσματα τυποῦται ἐν τῇ φαντασίᾳ. οὐδὲ ἐπεισόδιος οὖσα καθάπερ ἡ δοξαστικὴ γνῶσις, ἀλλ' ἀνεγειρομένη μὲν ἀπὸ τῶν φαινομένων, προβαλλομένη δὲ ἔνδοθεν ἀπ' αὐτῆς τῆς διανοίας εἰς ἑαυτὴν ἐπιστρεφομένης, κατειδότων δὲ αὖ καὶ ὅτι Πλάτων φησὶν ἐκ τῶν μαθημάτων, ἐὰν γάρ τις ἐπὶ τὰ διαγράμματα ἄγῃ φησὶν ἐκεῖνος, ἐνταῦθα ἄρα σαφέστατα κατηγορεῖ, ὡς ἐστὶν ἡ μάθησις ἀνάμνησις. ὅθεν δὴ καὶ ὁ ἐν τῷ Μένωνι Σωκράτης ἐκ τοιοῦδε τοῦ τρόπου τῆς ἐπιχειρήσεως, ἐπέδειξεν ὅτι τὸ μανθάνειν οὐκ ἄλλο τί ἐστιν, ἢ ἀναμιμνήσκεσθαι τὴν ψυχὴν, τῶν ἑαυτῆς λόγων. αἴτιον δὲ, ὅτι τὸ μὲν ἀναμιμνησκόμενον, ἐστὶ τὸ διανοητικὸν τῆς ψυχῆς, τοῦτο δὲ ἐν τοῖς λόγοις οὐσίωται τῶν μαθημάτων, καὶ τὰς ἐπιστήμας αὐτῶν, ἐν ἑαυτῷ προείληφε, κἂν μὴ ἐνεργῇ κατ' αὐτάς. ἔχει δ' οὖν πάσας οὐσιωδῶς, καὶ κρυφίως, προφαίνει δὲ ἕκαστον ὅταν ἀφαιρεθῇ τῶν ἐμποδίων τῶν ἀπὸ τῆς αἰσθήσεως. αἱ μὲν γὰρ αἰσθήσεις συνάπτουσιν αὐτὴν τοῖς μεριστοῖς, αἱ δὲ φαντασίαι μορφωτικῶν κινήσεων ἀναπιμπλᾶσιν, αἱ δὲ ὀρέξεις, περισπῶσιν εἰς τὸν ἐμπαθῆ βίον. πᾶν δὲ τὸ μεριστὸν, ἐμπόδιόν ἐστι τῆς εἰς ἑαυτοὺς ἡμῶν ἐπιστροφῆς, καὶ πᾶν τὸ μορφωτικὸν, ἐπιθολοῖ τὴν ἀμόρφωτον γνῶσιν, καὶ πᾶν τὸ ἐμπαθὲς κώλυμα τῆς ἀπαθοῦς ἐνεργείας ἐστίν. ὅταν οὖν ταῦτα τῆς διανοίας ἀφέλωμεν, τότε κατ' αὐτὴν γινώσκειν τοὺς ἐν αὐτῇ δυνάμεθα λόγους, καὶ ἐπιστήμονες εἶναι κατ' ἐνέργειαν, καὶ γνῶσιν τὴν οὐσιώδη προβάλλειν. δεσμῶται δὲ ὄντες, καὶ τὸ ὄμμα τῆς ψυχῆς μύοντες, οὐ μήποτε τὴν προσήκουσαν ἡμῖν τελειότητα χοίμεν. αὕτη τοίνυν ἐστὶν ἡ μάθησις, ἡ τῶν ἀϊδίων ἐν ψυχῇ λόγων ἀνάμνησις, καὶ μαθηματικὴ διὰ ταύτην ἡ πρὸς τὰς ἀναμνήσεις ἡμῖν τὰς ἐκείνων συντελοῦσα γνώσεις, διαφερόντως

Ἡ μάθησις unde dicta.

ἐπονομάζεται. καὶ τὸ ἔργον ἄρα τῆς ἐπιστήμης ταύτης, ὁποῖον δή τί ἐστιν ἐκ τοῦ ὀνόματος δηλοῦται, κινητικὸν τῆς γνώσεως, καὶ ἐγερτικὸν τῆς νοήσεως, καὶ καθαρτικὸν τῆς διανοίας, καὶ ἐκφαντικὸν τῶν κατ' οὐσίαν ἡμῖν ὑπαρχόντων εἰδῶν, λήθης τε καὶ ἀγνοίας ἀφαιρετικόν, ἃς ἀπὸ τῆς γενέσεως ἔχομεν, καὶ ἀπολυτικὸν τῶν ἐκ τῆς ἀλογίας δεσμῶν, κατὰ τὸν θεὸν ὄντως τὸν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἔφορον, ὃς προάγει μὲν εἰς τὸ ἐμφανὲς τὰ νοερὰ δῶρα, πληροῖ δὲ πάντα τῶν θείων λόγων, κινεῖ δὲ τὰς ψυχὰς ἐπὶ νοῦν, καὶ ὥσπερ ἐκ κάρου βαθέος ἐγείρει, διὰ ζητήσεως δὲ ἐπιστρέφει πρὸς αὐτάς, καὶ διὰ μαιεύσεως τελειοῖ, καὶ διὰ εὑρέσεως τοῦ καθαροῦ νοῦ περιάγει πρὸς τὴν μακαρίαν ζωήν. ᾧ δὴ καὶ ἡμεῖς ἀνατεθέντες τουτὶ τὸ σύγγραμμα, τὴν περὶ τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης θεωρίαν περιγράψομεν.

ΠΡΟΚΛΟΥ ΔΙΑΔΟΧΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Τὰ μὲν τοίνυν κοινά, καὶ ἐπὶ πᾶσαν διατείνοντα τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην, ἐν τοῖς προειρημένοις λόγοις τιθέμεθα, τῷ τε Πλάτωνι συμπορευόμενοι καὶ παρὰ τῶν ἄλλων ἀνελέγμενοι τὰ πρὸς τὴν παροῦσαν πραγματείαν ἡμῖν συντείνοντα νοήματα. τούτοις δὲ ἕπεται, περί τε αὐτῆς τῆς γεωμετρίας εἰπεῖν, καὶ τῆς προκειμένης στοιχειώσεως, ἧς ἕνεκα τὸν σύμπαντα λόγον ἐνεστησάμεθα. ὅτι μὲν οὖν ἡ γεωμετρία, τῆς ὅλης ἐστὶ μαθηματικῆς μέρος, καὶ ὅτι δευτέραν ἔχει τάξιν μετὰ τὴν ἀριθμητικήν, ὡς ἐκ ταύτης τελειουμένη, καὶ ἀφοριζομένη, πᾶν γὰρ ὅσον ἐστὶ ῥητὸν ἐν αὐτῇ καὶ γνωστόν, ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν ἀφορίζεται λόγων, εἴρηται τοῖς παλαιοῖς, καὶ οὐ πολλοῦ δεῖται λόγου πρὸς τὸ παρόν. γένοιτο δ' ἂν ἡμῖν ἡ περὶ αὐτῆς ὑφήγησις κατὰ νοῦν, εἰ τὴν ὑποκειμένην αὐτῇ ὕλην ἐπισκεψαίμεθα, τίνα τάξιν ἔλαχεν ἐν τοῖς οὖσι, καὶ τὴν οὐσίαν. ἀπὸ γὰρ ταύτης καλῶς θεωρηθείσης, καὶ ἡ τῆς γιγνωσκούσης αὐτὴν ἐπιστήμης καταφανὴς ἔσται δύναμις καὶ ὠφέλεια ἡ ἀπ' αὐτῆς, καὶ τὸ ἀγαθὸν ὅπερ εἰς τοὺς μανθάνοντας περιγίγνεται. καὶ γὰρ δὴ καὶ ἀπορήσειεν ἄν τις ἐν τίνι γένει τῶν ὄντων τὴν γεωμετρικὴν ὕλην τιθέμενος, οὐ κακῶς ἅψαιτο τῆς περὶ αὐτὴν ἀληθείας. εἴτε γὰρ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἐστι τὰ σχήματα περὶ ὧν ὁ γεωμέτρης διαλέγεται, καὶ ἀχώριστα τῆς ὕλης, πῶς ἔτι τὴν γεωμετρίαν τῶν αἰσθητῶν ἡμᾶς ἀπολύειν φήσομεν, καὶ περιάγειν εἰς τὴν ἀσώματον ὑπόστασιν, καὶ συνεθισμὸν εἶναι εἰς θέαν τῶν νοητῶν, καὶ προευτρεπίζειν εἰς τὴν κατὰ νοῦν ἐνέργειαν. ποῦ δὲ καὶ τεθεάμεθα ἐν τοῖς αἰσθητοῖς τὸ ἀμερὲς σημεῖον, ἢ τὴν ἀπλατῆ γραμμήν, ἢ τὴν ἀβαθῆ ἐπιφάνειαν, ἢ τὴν ἰσότητα τῶν ἐκ τοῦ κέντρου γραμμῶν, ἢ ὅλως τὰ πολύγωνα καὶ πολύεδρα σχήματα πάντα, περὶ ὧν ἡ γεωμετρία διδάσκει. πῶς δὲ καὶ οἱ λόγοι τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀνέλεγκτοι μένουσι τῶν αἰσθητῶν σχημάτων καὶ εἰδῶν, τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἐπιδεχομένων, καὶ κινουμένων πάντων καὶ μεταβαλλομένων, ἅτε πάσης τε ἀοριστίας ὑλικῆς ἀναπεπλησμένων, καὶ τῆς μὲν ἰσότητος, μετὰ τῆς ἐναντίας ἀνισότητος ὑφεστηκυίας, τῶν δὲ ἀμερίστων ἐπὶ μερισμὸν καὶ διάστασιν προεληλυθότων. εἰ τὰ ἔξω τῆς ὕλης ἐστὶ τὰ ὑποκείμενα τῇ γεωμετρίᾳ, καὶ λόγοι καθαροί, καὶ χωριστοὶ τῶν αἰσθητῶν, ἀμέριστοι πάντως ἔσονται καὶ ἀσώματοι, καὶ ἀμεγέθεις. ἔκτασις γὰρ καὶ ὄγκος καὶ ὅλως διάστασις τοῖς λόγοις, διὰ τὴν ὑλικὴν ὑποδοχὴν περιγίγνεται, τὰ μὲν ἀμέριστα, μεριστῶς, τὰ δὲ ἀδιάστατα κινουμένως δεχομένην. πῶς οὖν ἔτι τὴν εὐθεῖαν τέμνομεν, καὶ τὸ τρίγωνον, καὶ τὸν κύκλον, πῶς δὲ γωνιῶν διαφορὰς λέγομεν, καὶ αὐξήσεις, αὐτῶν καὶ μειώσεις σχημάτων, οἷον τριγωνικῶν, ἢ τετραγωνικῶν. πῶς δὲ τὰς ἁφὰς τῶν κύκλων, ἢ τῶν εὐθειῶν,

πάντα

[Marginal notes:] Γεωμετρία μέρος τῆς μαθηματικῆς. — Ἡ ὕλη τῆς γεωμετρίας.

πάντῃ γὰρ τοῦ τε μεριστὴν εἶναι τὴν γεωμετρικὴν ὕλην ἐπιδεικνύουσι, καὶ οὐκ ἐν ἀμερέσι λόγοις ὑφεστηκέναι. τὰ μὲν οὖν ἄπορα τοιαῦτα πρὸς τό, καὶ εἰς νοῦν ἐγείρειν ἀπὸ αἰσθήσεως συγχωρεῖν, καὶ τοῖς γε ὅπερ ἔφην ἐν διανοίᾳ λόγων, ἀμερῶν ὄντων ἀδιαστάτων, κατὰ τὴν ἰδιότητα τὴν ψυχικὴν ὑφεστηκότων. εἰ δὲ δεῖ καὶ τοῖς πράγμασιν αὐτοῖς, καὶ τῇ τοῦ Πλάτωνος ὑφηγήσει συμφώνους ἀποδιδόναι λόγους, οὑτωσὶ διελόντες εἴπωμεν. πᾶν τὸ καθόλου καὶ τὸ ἓν τὸ τῶν πολλῶν περιληπτικόν, ἢ ἐν τοῖς καθ' ἕκαστα φαντάζεσθαι πέφυκεν, ἢ φαίνεται· καὶ τὴν ὕπαρξιν ἐν τούτοις ἔχον ἀχώριστον ἀπ' αὐτῶν ὑπάρχον, καὶ καταλεταγμένον ἐν αὐτοῖς, καὶ μετὰ τούτων ἢ συγκινούμενον, ἢ μονίμως ἑστὼς καὶ ἀκινήτως, ἢ πρὸ τῶν πολλῶν ὑφεστάναι καὶ γεννητικὸν εἶναι τοῦ πλήθους, ἐμφάσεις ἀφ' ἑαυτοῦ τοῖς πολλοῖς παρέχον, καὶ ἀμεθέκτως μὲν αὐτὸ προτεταγμένον τῶν μετεχόντων, ποικίλας δὲ μεθέξεις εἰς τὰ δεύτερα χορηγοῦν, ἢ κατ' ἐπίνοιαν ἀπὸ τῶν πολλῶν μορφοῦσθαι, καὶ τὴν ὕπαρξιν γεννηματικὴν ἔχειν, καὶ ὑστερογενῶς ἐπισυνίστασθαι τοῖς πολλοῖς. κατὰ γὰρ ταύτας οἶμαι τὰς τριπλᾶς ὑποστάσεις εὑρήσομεν, τὰ μὲν πρὸ τῶν πολλῶν, τὰ δέ, ἐν τοῖς πολλοῖς, * ὄντος καὶ τὰ μεριστὰ συμπληροῦντος, νοήσωμεν διαφορὰς κατὰ τὴν ὑποκειμένην ὕλην. καὶ τὰ μετέχοντα αὐτοῦ διττὰ θέμενοι, τὰ μὲν αἰσθητά, τὰ δέ, ἐν φαντασίᾳ τὴν ὑπόστασιν ἔχοντα. καὶ γὰρ ἡ ὕλη διττή. καὶ ἡ μέν, τῶν αἰσθήσει συζυγούντων, ἡ δέ, τῶν φαντασιῶν, ὥσπερ καὶ Ἀριστοτέλης φησί, διττὸν εἶναι τὸ καθόλου. τὸ κατατεταγμένον συγχωρήσομεν, τὸ μὲν αἰσθητόν, ὡς μετεχόμενον ὑπὸ τῶν αἰσθητῶν, τὸ δὲ φανταστὸν ὡς ἐν τοῖς φανταστικοῖς πλήθεσιν ὑφεστηκός. καὶ γὰρ ἡ φαντασία διά τε τὴν μορφωτικὴν κίνησιν, καὶ τὸ μετὰ σώματος, καὶ ἐν σώματι τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, μεριστῶν ἀεὶ καὶ διῃρημένων δεῖ καὶ ἐσχηματισμένων τύπων οἰστικόν. καὶ πᾶν ὃ γιγνώσκει, τοιαύτην ἔλαχεν ὕπαρξιν, ὅθεν δὴ καὶ νοῦν παθητικόν τις αὐτὴν προσειπεῖν οὐκ ὤκνησεν. καίτοι γε νοῦς πῶς οὐκ ἀπαθὴς καὶ ἄϋλος. εἰ δὲ μετὰ πάθους ἐνεργεῖ, πῶς ἂν ἔτι νοῦς κληθείη. δικαίως ἀπάθεια μὲν γὰρ τῷ νῷ προσήκει καὶ τῇ νοερᾷ φύσει. τὸ δὲ παθητικόν, πόρρω τῆς οὐσίας ἐκείνης. ἀλλ' οἶμαι τὸ μέσον αὐτῆς ἐμφῆναι βουλόμενος τῶν τε πρωτίστων γνώσεων, καὶ τῶν ἐσχάτων, ἅμα καὶ νοῦν αὐτὴν προσεῖπεν, ὡς ἐοικυῖαν ταῖς πρωτίσταις, καὶ παθητικόν, κατὰ τὴν πρὸς τὰ ἔσχατα συγγένειαν. αἱ μὲν γὰρ ἀσχημάτιστοι καὶ ἀμόρφωτοι γνώσεις εἰσὶν ἐν ἑαυταῖς ἔχουσαι τὰ νοητά, καὶ περὶ ἑαυτὰς ἐνεργοῦσαι, καὶ συνῃνωμέναι τοῖς γνωστοῖς, παντὸς τύπου καὶ πάθους ἀλλαχόθεν ἐφήκοντος καθαρεύουσαι. αἱ δὲ ἔσχαται, διὰ τῶν ὀργάνων ἐνεργοῦσι, καὶ παθήματα μᾶλλόν εἰσιν, ἔξωθεν εἰσδεχόμεναι τὰς γνώσεις, καὶ συγκινούμεναι τοῖς ὑποκειμένοις. τοιαῦται γὰρ αἱ αἰσθήσεις ἐκ βιαίων γινόμεναι φησὶν ὁ Πλάτων. ἡ δ' αὖ φαντασία, τὸ μέσον κέντρον κατέχουσα τῶν γνώσεων ἀνεγείρεται μὲν ἀφ' ἑαυτῆς καὶ προβάλλει τὸ γνωστόν, ἅτε δὲ οὐκ ἔξω σώματος οὖσα, ἐκ τῆς ἀμερείας τῆς ζωῆς, εἰς μερισμὸν καὶ διάστασιν, καὶ σχῆμα προάγει τὰ γνωστὰ αὐτῆς, καὶ διὰ τοῦτο πᾶν ὅπερ ἂν νοῇ τύπος ἐστί, καὶ μορφὴ νοήματος. καὶ τόν τε κύκλον διαστατῶς καὶ διὰ τοῦτο νοεῖ, τῆς μὲν ἐκτὸς ὕλης καθαρεύοντα, νοητὴν δὲ ὕλην ἔχοντα τὴν ἐν αὐτῇ. καὶ διὰ τοῦτο οὐχ εἷς ἐν αὐτῇ κύκλος, ὥσπερ οὐδὲ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς. ἅμα γὰρ διάστασις ἀναφαίνεται, καὶ τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ πλῆθος τῶν κύκλων καὶ τῶν τριγώνων. εἰ οὖν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς κύκλοις δεῖ τὸ καθόλου καταταττόμενον ὃ καὶ ἕκαστον αὐτῶν κύκλον ἀπετέλεσεν, καὶ πάντας ὁμοίως ἀλλήλοις, καθ' ἕνα λόγον ὑποστάντας, διαφέροντας δέ, ἢ μεγέθεσιν, ἢ τοῖς ὑποκειμένοις, κἂν τοῖς φανταστοῖς λόγοις, ἔστι τι κοινὸν καὶ μετεχόμενον, καὶ κατὰ τοῦτο πάντες τὴν αὐτὴν ἔχουσι μορφήν. ἡ δὲ διαφορὰ αὐτοῖς, καθ' ἓν ἐνταῦθα μόνον, τὸ ἐν τῇ φαντασίᾳ μέγεθος. ὅτε γὰρ πολλοὺς ὁμοκέντρους φανταζώμεθα, ἑνὶ μὲν πάντων ὑποκειμένῳ, καὶ ἀΰλῳ, καὶ ἐν ζωῇ τὴν ὕπαρξιν ἔχουσιν ἀχωρίστῳ, σώματος ἁπλοῦ, καὶ τῷ διαστήματι πλεονάζοντος τῆς ἀμεροῦς οὐσίας, διαφέρουσι δέ, τῷ μεγέθει καὶ τῇ μικρότητι, καὶ τῷ περιέχεσθαι καὶ περιέχειν. διττὸν οὖν νοεῖσθαι τὸ καθόλου τὸ ἐν τοῖς πολλοῖς. τὸ μέν, ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, τὸ δέ, ἐν τοῖς φανταστοῖς. καὶ ὁ κυκλικὸς λόγος διττός, καὶ ὁ τριγωνικός, καὶ αὐτὸς ὁ τοῦ σχήματος, ὁ μὲν ἐπὶ τῆς νοητῆς ὕλης, ὁ δὲ ἐπὶ τῆς αἰσθητῆς. πρὸ δὲ τούτων ἦν, ὅ, τε ἐν τῇ διανοίᾳ λόγος, καὶ ὁ ἐν τῇ φύσει. ὁ μέν, τῶν φανταστῶν κύκλων ὑποστάτης καὶ τοῦ ἐν αὐτοῖς ἑνὸς εἴδους, ὁ δὲ τῶν αἰσθητῶν. ἔστωσαν γὰρ οἱ ἐν οὐρανῷ κύκλοι, καὶ ὅλως οἱ τῆς φύσεως ἔκγονοι, καὶ ὥσπερ ἀμερὴς ὁ ἐν διανοίᾳ λόγος, οὕτω καὶ ὁ φυσικός. ἔστι γὰρ καὶ τὰ διαστατὰ ἀδιαστάτως, καὶ τὰ μεριστά, ἀμερίστως, καὶ τὰ μεγέθη ἀμεγέθως, ἐν

Hactenus obiectio.

Respondet ex Platone.

Η φαντασία τῶν γνώσεων τὸ μέσον ἔχει.

ταῖς ἀσωμάτοις αἰτίαις. ὥσπερ οὖν ἀνάπαλιν τὰ ἀμέριστα μεριστῶς, καὶ τὰ ἀμεγέθη μεμεγεθυσμένως ἐν ταῖς σωματικαῖς. διὰ τοῦτο ὁ μὲν διανοίᾳ κύκλος εἷς ἐστὶ καὶ ἁπλοῦς ἐστὶ καὶ ἀδιάστατος, καὶ αὐτὸ τὸ μέγεθος, ἀμέγεθες ἐκεῖ. λόγοι γὰρ ἄνευ ὕλης τὰ τοιαῦτα καὶ τὸ σχῆμα ἀσχημάτιστον. ὁ δὲ ἐν φαντασίᾳ, μεριστός, ἐσχηματισμένος, διαστατός, οὐχ εἷς μόνον, ἀλλ' εἷς καὶ πολλοί, καὶ οὐκ εἶδος μόνον, ἀλλὰ κατατεταγμένον εἶδος. ὁ δὲ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, καὶ τῆς ἀκριβείας ὕφεσιν ἔχων, καὶ ἀνάπλεως τῆς εὐθείας, καὶ τῆς καθαρότητος τῶν κύκλων ἀπολειπόμενος. τὴν τοίνυν γεωμετρίαν, ὅτε περὶ κύκλου τι λέγει, καὶ διαμέτρου, καὶ τῶν περὶ κύκλου παθημάτων, οἷον ἀφῶν, διαιρέσεων τῶν τοιούτων, μήτε περὶ τῶν αἰσθητῶν λέγομεν ἀναδιδάσκειν, χωρίζειν γὰρ ἀπὸ τούτων ἐπιχειρεῖ, μήτε τοῦ ἐν διανοίᾳ εἴδους. εἷς γὰρ ὁ κύκλος, ἡ δὲ περὶ πολλῶν ποιεῖται τοὺς λόγους, καθ' ἕνα ἕκαστον προβάλλουσα καὶ περὶ ἁπάντων τὰ αὐτὰ θεωροῦσα. καὶ ἀδιαίρετος μὲν ἐκεῖνος, διαιρετὸς δὲ ὁ ἐν γεωμετρίᾳ κύκλος. ἀλλὰ τὸ καθόλου μὲν αὐτῷ συγχωρῶμεν ἐπισκοπεῖν. τοῦτο δὲ ἄρα ἐκεῖνο τὸ κατατεταγμένον ἐν τοῖς φανταστοῖς κύκλοις. καὶ ἄλλον μὲν ὁρᾶν, καὶ κατ' ἄλλον θεωρεῖν τὸν ἐν διανοίᾳ κύκλον, περὶ ἄλλον δὲ ποιεῖσθαι τὰς ἀποδείξεις. ἔχουσα γοῦν ἡ διάνοια τοὺς λόγους, ἀδυνατοῦσα δὲ συνεπτυγμένως ἰδεῖν, ἀναπλῶσαι αὐτούς, καὶ ὑποτίθεται, καὶ εἰς τὴν φαντασίαν ἐν προθύροις κειμένην προάγει, καὶ ἐν ἐκείνῃ, ἢ καὶ μετ' ἐκείνης ἀνελίττει τὴν γνῶσιν αὐτῶν, ἀγαπήσασα μὲν τὸν ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν χωρισμόν, τὴν δὲ φανταστικὴν ὕλην, εὑροῦσα ἐπιτηδείαν πρὸς ὑποδοχὴν τῶν ἑαυτῆς εἰδῶν. ὅθεν καὶ ἡ νόησις αὐτῆς μετὰ φαντασίας, αἵ τε συνθέσεις τῶν σχημάτων, καὶ αἱ διαιρέσεις φανταστικαί, καὶ ἡ γνῶσις ὁδὸς μὲν εἰς τὴν διανοητικὴν ἐστὶν οὐσίαν. οὔπω δὲ εἰς ἐκείνην ἀναδεδράμηκε τῆς διανοίας εἰς τὰ ἔξω βλεπούσης, καὶ ταῦτα ἀπὸ τῶν ἔνδοθεν θεωρούσης, καὶ προβολαῖς μὲν χρωμένης λόγων, ἀλλ' ἀφ' ἑαυτῆς εἰς τὸ ἔξω κινουμένης. εἰ δέ ποτε συμπτύξασα τὰς διαστάσεις, καὶ τοὺς τύπους, καὶ τὸ πλῆθος, ἀτυπώτως, καὶ ἑνοειδῶς θεασαμένη πρὸς ἑαυτὴν ἐπιστρέψαι δυνηθείη, τότ' ἂν διαφερόντως τοὺς λόγους τοὺς γεωμετρικούς, ἴδοι τοὺς ἀμερίστους, τοὺς ἀδιαστάτους, τοὺς οὐσιώδεις, ὧν ἐστὶ πλήρωμα καὶ ἡ ἐνέργεια αὐτῆς, τέλος ἂν εἴη τὸ ἄριστον, τῆς περὶ γεωμετρίαν σπουδῆς, καὶ ὄντως τῆς ἑρμαϊκῆς δόσεως ἔργον, ἀπό τινος καλυψοῦς ἀναγούσης αὐτὴν εἰς τελειοτέραν καὶ νοερωτέραν γνῶσιν, καὶ ἀπολυούσης τῶν ἐν φαντασίᾳ μορφωτικῶν ἐπιβολῶν. καὶ ταύτην δεῖ τὴν μελέτην μελετᾶν τὸν ὡς ἀληθῶς γεωμετρικόν, καὶ πρὸς ἔγερσιν, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς φαντασίας μετάστασιν, εἰς μόνην τὴν διάνοιαν αὐτὴν καθ' αὑτὴν ποιεῖσθαι τέλος, ἐξαιροῦντα ἑαυτὸν ἀπὸ τῶν διαστάσεων, καὶ τοῦ παθητικοῦ νοῦ, πρὸς τὴν διανοητικὴν ἐνέργειαν, καθ' ἣν πάντα ἀδιαστάτως ὄψεται, καὶ ἐν ἀμερεῖ τὸν κύκλον, τὴν διάμετρον, τὰ ἐν τῷ κύκλῳ πολύγωνα, καὶ πάντα ἐν πᾶσι, καὶ ἕκαστον χωρίς. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ ἐν φαντασίᾳ δείκνυμεν, ἔν τε τοῖς πολυγώνοις τοὺς κύκλους ἐγγραφομένους, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις τὰ πολύγωνα, μιμούμενοι τὴν τῶν ἀμερῶν λόγων δι' ἀλλήλων δεῖξιν. διὰ ταῦτα γὰρ ἄρα, καὶ συστάσεις σχημάτων, καὶ γενέσεις καὶ διαιρέσεις, ἀναγράφομεν, καὶ θέσεις, καὶ παραβολάς, διότι τῇ φαντασίᾳ, καὶ ταῖς ἐκ ταύτης διαστάσεσιν, ἐπεὶ τό γε εἶδος αὐτό, ἀκίνητόν ἐστι, καὶ ἀγένητον, καὶ ἀδιαίρετον, καὶ παντὸς ὑποκειμένου καθαρεῦον, ἀλλὰ καὶ ὅσα κρυφίως ἐστὶν ἐν ἐκείνῳ διαστάτως καὶ μεριστῶς, εἰς φαντασίαν προάγεται. καὶ τὸ μὲν προβάλλον, ἡ διάνοια, τὸ δὲ ἀφ' οὗ προβάλλεται, τὸ διανοητὸν εἶδος, τὸ δὲ ἐν ᾧ τὸ προβαλλόμενον παθητικός, οὗτος καλούμενος νοῦς, ἐξειλιττόμενος ἑαυτὸν περὶ τὴν ἀμέρειαν τοῦ ἀληθοῦς νοῦ, καὶ διιστὰς ἑαυτοῦ τὸ ἀδιάστατον τῆς ἀκραιφνοῦς νοήσεως, καὶ μορφῶν ἑαυτὸν ἀπὸ πάντα τὰ ἀμόρφωτα εἴδη καὶ πάντα γιγνόμενος, ἅ ἐστιν ἡ διάνοια, καὶ ὁ ἀμερὴς ἐν ἡμῖν λόγος. περὶ μὲν οὖν τῆς γεωμετρικῆς ὕλης, τοσαῦτα ἔχομεν λέγειν, οὐκ ἀγνοοῦντες ὅσα καὶ ὁ φιλόσοφος Πορφύριος ἐν τοῖς συμμίκτοις γέγραφε, καὶ αἱ πλείους τῶν πλατωνικῶν διατάττονται. συμφωνότερον δὲ εἶναι ταῦτα, ταῖς γεωμετρικαῖς ἐφόδοις νομίζοντες καὶ τῷ Πλάτωνι διανοητὰ καλοῦντι τὰ ὑποκείμενα τῇ γεωμετρίᾳ. συνᾴδει γὰρ ὄντα ταῦτα ἀλλήλοις, διότι τῶν γεωμετρικῶν εἰδῶν, αἱ μὲν αἰτίαι, καθ' ἃς καὶ ἡ διάνοια προβάλλει τὰς ἀποδείξεις ἐν αὐτῇ προϋφεστήκασιν, αὐτὰ δὲ ἕκαστα τὰ διαιρούμενα, καὶ συντιθέμενα σχήματα περὶ τὴν φαντασίαν βέβληται. περὶ δὲ τῆς ἐπιστήμης αὐτῆς τῆς τούτων θεωρητικῆς, μετὰ ταῦτα λέγωμεν. γνωστικὴ μὲν οὖν ἐστὶ μεγεθῶν καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων, ἔτι δὲ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς ἡ γεωμετρία καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτά, καὶ τῶν παν-

Γεωμετρία τίς ἐπιστήμη.

ποιῶν θέσεων, καὶ κινήσεων. προϊοῦσα μὲν, ἀπὸ τοῦ ἀμεροῦς σημείου, καταβαίνουσα δὲ μέχρι τῶν στερεῶν, καὶ τὰς πολυειδεῖς αὐτῶν διαφορότητας ἀναδιδάσκουσα. καὶ αὖ πάλιν ἀπὸ τῶν συνθετωτέρων, ἐπὶ τὰ ἁπλούστερα, καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς τούτων ἀναστρέφουσα. καὶ γὰρ συνθέσεσι χρῆται, καὶ ἀναλύσεσι, ἀεὶ μὲν ἐξ ὑποθέσεως ὁρμῶσα, καὶ τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τῆς πρὸ αὐτῆς ἐπιστήμης λαμβάνουσα, χρωμένη δὲ ταῖς διαλεκτικαῖς ἁπάσαις μεθόδοις. περὶ μὲν τὰς ἀρχὰς διαιρέσεσι τῶν εἰδῶν, ἀπὸ τῶν γενῶν, καὶ τοῖς ὁριστικοῖς λόγοις. περὶ δὲ τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς ἀποδείξεσι, καὶ ἀναλύσεσιν. ἵνα καὶ ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων τὰ ποικιλώτερα δεικνύη προϊόντα, καὶ ἐπ᾽ αὐτὰ πάλιν ἀναστρέφοντα. καὶ χωρὶς μὲν περὶ τῶν ὑποκειμένων αὐτῇ ποιουμένη τοὺς λόγους, χωρὶς δὲ περὶ τῶν ἀξιωμάτων ἀφ᾽ ὧν ὁρμᾶται πρὸς τὰς ἀποδείξεις, καὶ χωρὶς δὲ περὶ τῶν καθ᾽ αὑτὰ συμβεβηκότων, ἃ καὶ δεικνύουσιν ὑπάρχοντα τοῖς ὑποκειμένοις. ἑκάστη γὰρ τῶν ἐπιστημῶν, ἄλλο μὲν ἔχει τὸ γένος περὶ ὃ πραγματεύεται, καὶ οὗ τὰ πάθη σκοπεῖν προτίθεται, ἄλλας δὲ τὰς ἀρχὰς, αἷς χρῆται πρὸς τὰς ἀποδείξεις, ἄλλα δὲ τὰ καθ᾽ αὑτὰ ὑπάρχοντα. καὶ τὰ μὲν ἀξιώματα κοινὰ πάσαις, εἰ καὶ ἑκάστη χρῆται πρὸς τὴν ὑποκειμένην ὕλην οἰκείως αὐτοῖς. τὸ δὲ γένος, καὶ τὸ καθ᾽ αὑτὸ συμβεβηκὸς διαφέρον. τὰ μὲν οὖν ὑποκείμενα γεωμετρίας ἐστὶ τρίγωνα, καὶ τετράγωνα, καὶ κύκλοι, καὶ ὅλως σχήματα, καὶ μεγέθη, καὶ τὰ τούτων πέρατα. τὰ δὲ καθ᾽ αὑτὰ ὑπάρχοντα, τούτοις αἱ διαιρέσεις, οἱ λόγοι, αἱ ἁφαὶ, αἱ ἰσότητες, αἱ παραβολαὶ, αἱ ὑπερβολαὶ, αἱ ἐλλείψεις, πάντα τὰ τοιαῦτα. τὰ δὲ αἰτήματα, καὶ τὰ ἀξιώματα δι᾽ ὧν ἀποδείκνυσιν ἕκαστα, τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἄγειν, τὸ ἐὰν ἀπὸ ἴσων, ἴσα ἀφαιρεθῇ, ἴσα εἶναι τὰ καταλειπόμενα. καὶ τὰ τούτοις ἑπόμενα. διὸ καὶ οὔτε πᾶν πρόβλημα, οὔτε πᾶν ἐρώτημα, γεωμετρικόν ἐστιν, ἀλλὰ ὅσα ἐκ τῶν γεωμετρίας ἐστὶν ἀρχῶν, καὶ ὃ ἐκ τούτων ἐλεγχόμενος, ἐλέγχοιτ᾽ ἂν ὡς γεωμέτρης. ὅσα δὲ μὴ ἐκ τούτων, οὐ γεωμετρικὰ, ἀλλ᾽ ἀγεωμέτρητα. διττὰ δὲ καὶ ταῦτά ἐστιν, ἢ γὰρ παντελῶς ἐξ ἑτέρων ἐστὶν ἀρχῶν. ὥσπερ τὸ μουσικὸν ἐρώτημα φαμὲν ἀγεωμέτρητον, ὅτι ἐξ ἄλλων, παντελῶς ὑποθέσεων ὥρμηται, καὶ οὐκ ἐκ τῶν γεωμετρίας ἀρχῶν, ἢ τὸ ταῖς γεωμετρικαῖς ἀρχαῖς χρώμενον, ἀλλὰ διεστραμμένως, οἷον εἴ τις λέγοι τὰς παραλλήλους συμπίπτειν, καὶ διὰ ταῦτα ἄρα, καὶ ἡ γεωμετρία κριτήρια παραδίδωσιν ἡμῖν, ἀφ᾽ ὧν δυνησόμεθα διαγινώσκειν, τά τε ἑπόμενα ταῖς ἀρχαῖς αὐτῆς, καὶ ὅσα τὴν ἐκείνων ἀλήθειαν ἐκβαίνει. οἱ γὰρ τρόποι, καθ᾽ οὓς τὰ ψευδῆ εἶναι διελέγχειν δυνατὸν, ὃ μὴ διημάρτηται, ταύτην ἔχουσι τὴν ἐπαγγελίαν. ἀλλὰ γὰρ ἕπεται ταῖς γεωμετρικαῖς ἀρχαῖς, καὶ ἄλλα ταῖς ἀριθμητικαῖς. τί γὰρ δεῖ λέγειν περὶ τῶν ἄλλων εἰ πάμπολυ λείπονται τούτων. ἀκριβεστέρα γάρ ἐστιν ἐπιστήμη ἄλλη ἄλλης, ὥς φησιν Ἀριστοτέλης, ἥτε ποικιλωτέραις ἀρχαῖς χρωμένη, τῆς ἐξ ἁπλουστέρων ὑποθέσεων ὡρμημένης, καὶ ἡ τὸ διότι λέγουσα, τῆς τὸ ὅτι γινωσκούσης, καὶ ἡ περὶ νοητῶν πραγματευομένη, τῆς τῶν αἰσθητῶν ἐφαπτομένης. καὶ κατὰ ταύτας τὰς ἀποδείξεις τῆς ἀκριβείας, ἀριθμητικὴ μὲν ἀκριβεστέρα γεωμετρίας. αἱ γὰρ ἐκείνης ἀρχαὶ τῇ ἁπλότητι διαφέρουσιν. ἡ μὲν γὰρ μονὰς, ἄθετός ἐστιν, ἡ δὲ στιγμὴ θέσιν ἔχουσα. καὶ ἀρχαὶ μὲν γεωμετρίας ἡ στιγμὴ προσλαβοῦσα τὴν θέσιν, ἀριθμητικῆς δὲ, ἡ μονάς. γεωμετρία δὲ σφαιρικῆς *ἀριθμητικὴ* καὶ μουσικῆς. αὗται γὰρ τὰς αἰτίας ἀποδιδόασι καθόλου τῶν ὑπ᾽ ἐκείνας θεωρημάτων. γεωμετρία δὲ μηχανικῆς, ὅτι περὶ αἰσθητῶν αὗται ποιοῦνται τοὺς λόγους. αἱ μὲν οὖν ἀριθμητικῆς ἀρχαὶ, καὶ γεωμετρίας, τῶν ἄλλων διαφέρουσιν. αἱ δὲ αὐτῶν τούτων ὑποθέσεις, διεστήκασι μὲν ἀπ᾽ ἀλλήλων, καθ᾽ ἣν εἴπομεν διάστασιν, ἔχουσι δ᾽ αὖ καὶ κοινωνίαν πρὸς ἀλλήλας. διὸ καὶ τῶν θεωρημάτων τῶν δεικνυμένων, τὰ μέν ἐστιν αὐταῖς κοινὰ, τὰ δὲ, ἴδια ἑκατέρας. τὸ μὲν γὰρ πάντα λόγον εἶναι ῥητὸν, ἀριθμητικῇ προσήκει μόνῃ, γεωμετρίᾳ δὲ, οὐδαμῶς. εἰσὶ γὰρ ἐν αὐτῇ καὶ ἄρρητοι λόγοι. καὶ τὸ, ὡρίσθαι κατὰ τὸ ἔλαττον τοὺς τῶν τετραγώνων γνώμονας, ἀριθμητικῆς ἴδιον, ἐν γεωμετρίᾳ γὰρ, τὸ ἐλάχιστον ὅλως οὐκ ἔστι. γεωμετρίας δὲ ἐστιν ἐξαίρετον, τὰ περὶ τὰς θέσεις. οἱ γὰρ ἀριθμοὶ θέσιν οὐκ ἔχουσι. τὰ περὶ τὰς ἁφὰς ἐν γὰρ συνεχέσι, τὸ ἅπτεσθαι. τὸ περὶ τὰς ἀλόγους, ὅπου γὰρ ἐπ᾽ ἄπειρον ἡ διαίρεσις, ἐκεῖ καὶ τὸ ἄλογον. κοινὰ δὲ ἐστιν ἀμφοτέρων τὰ κατὰ τὰς τομὰς, οἵας Εὐκλείδης ἐν τῷ δευτέρῳ παραδίδωσι, πλὴν τῆς τὴν εὐθεῖαν εἰς ἄκρον καὶ μέσον τεμνούσης. τῶν δὲ αὖ κοινῶν τούτων θεωρημάτων, τὰ μὲν, ἀπὸ γεωμετρίας εἰς ἀριθμητικὴν μετάγεται, τὰ δὲ, ἔμπαλιν, ἀπὸ ἀριθμητικῆς εἰς γεωμετρίαν, τὰ δὲ, ὁμοίως ἀμφοτέραις, ὁμοίως προσήκει, ἀπὸ τῆς ὅλης μαθηματικῆς ἐπιστήμης, εἰς

αὐτὰς καθήκοντα. τὸ μὲν γὰρ ἐναλλὰξ, καὶ αἱ ἀναστροφαὶ τῶν λόγων, καὶ αἱ συνθέσεις, καὶ αἱ διαιρέσεις περὶ τοῦτον τὸν τρόπον ἐστὶ κοινὸν ἀμφοτέραις. τὰ δὲ τῶν συμμέτρων, ἀριθμητικὴ μὲν θεωρεῖ πρώτως, γεωμετρία δὲ δευτέρως ἐκείνην μιμουμένη. διὸ καὶ τὰ συμμετρα τούτων ταῦτα ἀφορίζεται, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὡς τῆς συμμετρίας προηγουμένως ἐν ἀριθμοῖς ὑφισταμένης. ὅπου γὰρ ἀριθμὸς, ἐκεῖ καὶ τὸ σύμμετρον, καὶ ὅπου τὸ σύμμετρον ἐκεῖ καὶ ὁ ἀριθμός. τά γε μὴν τῶν τριγώνων καὶ τετραγώνων, γεωμετρία μὲν θεωρεῖ πρώτως, κατ' ἀναλογίαν δὲ λαβοῦσα παρ' αὐτῆς ἡ ἀριθμητική. καὶ γὰρ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς σχήματα κατ' αἰτίαν ἐστὶν, ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων δὲ ἑρμηνεύοντες ἐπὶ αἰτίας αὐτῶν, τὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς μέτιμεν. καὶ ὅπου μὲν ἀπαραλλάκτως τὰ αὐτὰ συμπτώματα θεωροῦμεν, ὥσπερ, ὅτι πᾶν πολύγωνον εἰς τρίγωνον διαλύεται, ὅπου δὲ τὸ σύνεγγυς ἀγαπῶμεν, οἷον εὑρόντων ἐν γεωμετρίᾳ τετράγωνον τετραγώνου διπλάσιον, ἐν ἀριθμοῖς δὲ οὐκ ἐχόντων, ἑνὸς δέοντος φαμὲν ἄλλο ἄλλου διπλάσιον ὑπάρχειν ὥσπερ τὸν ἀπὸ τῆς πεμπτάδος, τοῦ ἀπὸ τῆς ἑπτάδος διπλάσιος ἑνὸς δέοντος. ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ πλέον προανηγάγομεν τήν τε κοινωνίαν, τὴν περὶ τὰς ἀρχὰς τῶν δύο τούτων ἐπιστημῶν, καὶ τὴν διαφορὰν παριστάντες. γεωμετρικοῦ γὰρ τὸ συνορᾶν, τὰ μὲν κοινὰ θεωρήματα ποίαις ἀρχαῖς ἕπεται κοιναῖς, τὰ δὲ ἴδια, ποίαις. καὶ οὕτω τά τε ἀγεωμέτρητα, καὶ τὰ γεωμετρικὰ θεωρεῖσθαι. καὶ τὰ μὲν, εἰς ἄλλην, τὰ δὲ, εἰς ἄλλην ἐπιστήμην ἄγειν, συναφθεῖσαν δὲ πάλιν, ὅθεν τε ὥρμηται καὶ μέχρι τινὸς πρόεισιν. οὕτω γὰρ τὸν ἐν αὐτῇ διάκοσμον τῶν λόγων θεασόμεθα, νοήσομεν δὲ πᾶσι τοῖς οὖσιν αὐτὴν συμπαρεκτεινομένην καὶ πᾶσιν ἐπιβάλλουσαν τὰς ἑαυτῆς διανοήσεις, καὶ πάντων ἐν αὐτῇ περιέχουσαν τὰ εἴδη. καὶ περὶ μὲν τὸ ἀκρότατον αὐτῆς καὶ νοερώτατον, τὰ ὄντως ὄντα περιαθροῦσαν, καὶ δι' εἰκόνων ἀναδιδάσκουσαν, τάς τε τῶν θείων διακόσμων ἰδιότητας, καὶ τὰς τῶν νοερῶν εἰδῶν δυνάμεις. ἔχει γὰρ καὶ τούτων τοὺς λόγους ἐν τοῖς οἰκείοις θεάμασι. καὶ δείκνυσι τίνα μὲν ἐστι τὰ θεοῖς προσήκοντα σχήματα, τίνα δὲ ταῖς πρώταις οὐσίαις, τίνα δὲ ταῖς τῶν ψυχῶν ὑποστάσεσι. περὶ δὲ τὰς μέσας στοιχειώσεις ἀνελίττει τοὺς διανοητικοὺς λόγους, καὶ ἐξαπλοῖ καὶ θεωρεῖ τὴν ἐν αὐτοῖς ποικιλίαν. καὶ τὰς ὑπάρξεις αὐτῶν ἐκφαίνει, καὶ τὰ περὶ αὐτοὺς πάθη, τάς τε κοινωνίας αὐτῶν, καὶ τὰς διαφορότητας· ἀφ' ὧν δὴ καὶ τὰς φαντασίας διαμορφώσεις σχημάτων ἐμπερασμοῖς ὡρισμένοις περιλαμβάνει, καὶ ἀνάγει πρὸς τὴν οὐσιώδη τῶν λόγων ὑπόστασιν. περὶ δὲ τὰς τρίτας τῆς διανοήσεως διεξόδους, τήν τε φύσιν ἐπισκοπεῖ, καὶ τὰ εἴδη τῶν αἰσθητῶν στοιχείων, καὶ τὴν περὶ αὐτὰ δύναμιν, ὅπως κατ' αἰτίαν ἐν τοῖς λόγοις αὐτοῖς προείληπται παραδίδωσιν. ἔχει γὰρ εἰκόνας μὲν τῶν νοητῶν ὅλων γενῶν, παραδείγματα δὲ τῶν αἰσθητῶν οὐσιῶν. περὶ δὲ τὰ διανοητὰ, καὶ διὰ μέσων τούτων αὔξεταί τε, καὶ κάτεισιν ἐφ' ὅλα τὰ ὄντα καὶ τὰ γιγνόμενα. γεωμετρικῶς δὲ περὶ τῶν ὄντων ἀεὶ φιλοσοφοῦσα καὶ πρὸς τοῖς λόγοις ἅπασι τῶν ἀρετῶν τὰς εἰκόνας περιέχει τῶν νοερῶν, καὶ τῶν ψυχικῶν, καὶ τῶν φυσικῶν. καὶ πάσας ἐν τάξει παραδίδωσι, τὰς τῶν πολιτειῶν διακοσμήσεις. καὶ ἐν αὐτῇ δείκνυσι τὰς ποικίλας αὐτῶν μεταβολάς. καὶ ταῦτα μὲν ἀΰλως, καὶ γνωστικῶς ἐνεργοῦσα, τῆς δὲ ὕλης ἐφαπτομένη πολλὰς ἀφ' ἑαυτῆς ἐπιστήμας ἐκδίδωσιν. οἷον, τὴν γεωμετρίαν, τὴν μηχανικὴν, τὴν ὀπτικὴν. δι' ὧν καὶ τὸν θνητὸν βίον εὐεργετεῖ. καὶ γὰρ πολεμιστήρια ὄργανα, καὶ φυλακτήρια τῶν πόλεων διὰ τούτων κατασκευάζουσα, καὶ τὰς τῶν ὀρῶν περιόδους γνωρίμους ἐποίησε, καὶ τὰς τῶν τόπων θέσεις. μέτρα τε ὑφηγήσατο, τὰ μὲν τῶν περὶ γῆν ὁδῶν, τὰ δὲ, τῶν περὶ θάλασσαν. ζυγά τε καὶ τρυτάνας ἐδημιούργησεν, ἀφ' ὧν τὴν περὶ ἀριθμὸν ἰσότητα ταῖς πόλεσι διηκρίβωσε. τοῦ τε παντὸς κόσμου τὴν τάξιν δι' εἰκόνων ἐμφανῆ κατέστησε, καὶ πολλὰ τοῖς ἀνθρώποις ἀπὸ ἀπίστων ἀνέφηνε, καὶ πιστὰ πᾶσιν ἔδειξεν, οἷον δὴ καὶ Ἱέρων ὁ Συρακούσιος εἰπεῖν λέγεται περὶ Ἀρχιμήδους, ὅτε τὴν τριάρμενον κατεσκεύασεν ναῦν, ἣν παρεσκευάζετο πέμπειν Πτολεμαίῳ τῷ βασιλεῖ τῶν αἰγυπτίων. πάντων γὰρ ἅμα Συρακουσίων ἑλκύσαι τὴν ναῦν οὐ δυναμένων, Ἀρχιμήδης τὸν Ἱέρωνα μόνον αὐτὴν καταγαγεῖν ἐποίησεν. καταπλαγεὶς δὲ ἐκεῖνος, ἀπὸ ταύτης ἔφη τῆς ἡμέρας περὶ παντὸς Ἀρχιμήδει λέγοντι πιστευτέον. τὸ δὲ αὐτὸ καὶ Γελῶνά φασιν εἰπεῖν ἡνίκα τοῦ στεφάνου μὴ λυθέντος, ὃν κατεσκεύασεν, τὴν ὁλκὴν ἑκάστην ἀνεῦρε τῶν συγκραθεισῶν ὑλῶν. ταῦτα μὲν οὖν πολλοὶ τῶν πρεσβυτέρων ἀνέγραψαν, τὴν μαθηματικὴν ἐγκωμιάζειν προθέμενοι, καὶ διὰ ταῦτα ὀλίγα ἀπὸ πολλῶν ἡμεῖς ἐν τούτοις παρεθέμεθα, τήν τε γεωμετρίας παντελῶς γνῶσιν καὶ ὠφέλειαν ἐπιδεικνῦντες, τὴν δὲ γένεσιν αὐτῆς τὴν ἐν τῇ περιόδῳ, ταύτῃ μετὰ ταῦτα ῥητέον, ὁ μὲν γὰρ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης, εἶπε τὰ αὐτὰ δόξα-

Γένεσις τῆς γεωμετρίας.

σματα πολλάκις εἰς ἀνθρώπους ἀφικέσθαι, κατά τινας τεταγμένας περιόδους τοῦ παντὸς, καὶ καθ' ἡμᾶς πρῶτον ἢ τοὺς ὑφ' ἡμῶν γνωσθέντας τὰς ἐπιστήμας τὴν σύστασιν λαβεῖν. ἀλλὰ καὶ ἐν ἄλλαις περιφοραῖς, οὐδ' εἰπεῖν ὁπόσαις ταῖς γεγονυίαις, καὶ ταῖς αὖθις ἐσομέναις ἐμφανῆναί τε, καὶ ἀφανισθῆναι πάλιν αὐτάς. ἐπεὶ δὲ χρὴ καὶ τὰς ἀρχὰς τῶν τεχνῶν πρὸς τὴν παροῦσαν περίοδον σκοπεῖν, λέγομεν ὅτι παρ' αἰγυπτίοις μὲν εὑρῆσθαι πρῶτον ἡ γεωμετρία, παρὰ πολλῶν ἱστορεῖται, ἐκ τῆς τῶν χωρίων ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν. ἀναγκαία γὰρ ἦν ἐκείνοις αὕτη διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ νείλου, τοὺς προσήκοντας ἑκάστοις ἀφανίζοντος ὅρους. καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν, καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν. ἐπειδὴ πᾶν τὸ ἐν γενέσει φερόμενον, ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς πρὸς τὸ τέλειον πρόεισιν, ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν, καὶ ἀπὸ δὲ τ * ἡ μετάβασις γένοιτ' ἂν εἰκότως. ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς φοίνιξι διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ παρ' αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία, διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὕρηται. Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς αἴγυπτον ἐλθὼν, μετήγαγεν εἰς τὴν ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην. καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρε, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο. τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ, αἰσθητικώτερον. μετὰ δὲ τοῦτον Ἀμέριστος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφὸς, ὡς ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς, μνημονεύεται· καὶ Ἱππίας ὁ ἠλεῖος ἱστόρησεν, ὡς ἐπὶ γεωμετρίας δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. ἐπὶ δὲ τούτοις, Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος, καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν, καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρε. μετὰ δὲ τοῦτον Ἀναξαγόρας ὁ κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο τῶν κατὰ γεωμετρίαν. καὶ Οἰνοπίδης ὁ χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρὼν. καὶ Θεόδωρος ὁ κυρηναῖος, ὀλίγῳ νεώτεροι ὄντες τοῦ Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν, ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ χῖος, ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρὼν, καὶ θεόδωρος ὁ κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων, καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. Πλάτων δὲ ἐπὶ τούτοις γενόμενος, μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν, τά τε ἄλλα μαθήματα, καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν, διὰ τὴν περὶ αὐτὴν σπουδὴν, ὅπερ δῆλός ἐστι. καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας, καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαυμαστὸν φιλοσοφίας ἀντεχόμενον ἐπεγείρων. ἐν δὲ τούτῳ τῷ χρόνῳ, καὶ Λεοδάμας ὁ θάσιος ἦν, καὶ Ἀρχύτας ὁ ταραντῖνος, καὶ Θεαίτητος ὁ ἀθηναῖος, παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα, καὶ προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώτερος ὁ Νεοκλείδης, καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων, οἳ πολλὰ προσευπόρισαν τοῖς πρὸ αὐτῶν. ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι, τῷ τε πλήθει, καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον. καὶ διορισμοὺς εὑρεῖν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρόβλημα, καὶ πότε ἀδύνατον. Εὔδοξος δὲ ὁ κνίδιος Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηὔξησε, καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις, ἄλλας τρεῖς προσέθηκε. καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος, εἰς πλῆθος προήγαγεν. καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας δὲ ὁ ἡρακλεώτης εἷς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων, καὶ Μέναιχμος ἀκροατὴς ὢν Εὐδόξου, καὶ Πλάτωνι δὲ συγγεγονὼς, καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος, ἔτι τελεωτέραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θευδίος δὲ ὁ μάγνης, ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων, καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν. καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξε, καὶ πολλὰ τῶν ὁρικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν. καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζικηνὸς Ἀθηναῖος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονὼς χρόνους καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ γεωμετρίαν καταφανὴς ἐγένετο. διῆγον οὖν οὗτοι μετ' ἀλλήλων ἐν ἀκαδημείᾳ, κοινὰς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις. Ἑρμότιμος δὲ ὁ κολοφώνιος, τὰ ὑπὸ Εὐδόξου προηυπορημένα, καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον, καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε, καὶ τῶν τόπων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ μενταῖος Πλάτωνος ὢν μαθητὴς, καὶ ὑπ' ἐκείνου προτραπεὶς εἰς τὰ μαθήματα, καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις. καὶ ταῦτα προὔβαλλεν ἑαυτῷ, ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν. οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες, μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν. οὐ πολὺ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης·

Mathematici clari.

ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγών, καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος. ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου. καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου. καὶ μέντοι καὶ φασὶν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτὸν εἰ ἔστι περὶ γεωμετρίαν. νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥσπερ καί φησιν Ἐρατοσθένης. καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι, καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος. ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. πολλὰ μὲν οὖν καὶ ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα, θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μεστά. τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικά, καὶ τὰ κατοπτρικά. τοιαῦται δὲ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις. ἔτι δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. διαφερόντως δ' ἄν τις αὐτὸν ἀγασθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχείωσιν, τῆς τάξεως ἕνεκα, καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων. καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν, ἀλλ' ὅσα στοιχειοῦν ἠδύνατο παρέλαβεν. ἔτι δὲ τοὺς τῶν συλλογισμῶν παντοίους τρόπους, τοὺς μὲν ἀπὸ τῶν αἰτίων λαμβάνοντας τὴν πίστιν, τοὺς δὲ ἀπὸ τεκμηρίων ὡρμημένους, πάντας δὲ ἀνελέγκτους, καὶ ἀκριβεῖς, καὶ πρὸς ἐπιστήμην οἰκείους, πρὸς δὲ τούτοις, τὰς μεθόδους ἁπάσας τὰς διαλεκτικάς, τὴν μὲν διαιρετικὴν ἐν ταῖς εὑρέσεσι, τὴν δὲ ἀναλυτικὴν ἐν ταῖς ἀπὸ τῶν ζητουμένων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναστροφαῖς. καὶ μήν, καὶ τὰ ποικίλα τῶν ἀντιστροφῶν εἴδη, τῶν τε ἁπλουστέρων, καὶ τῶν συνθετωτέρων ἱκανῶς ἐστιν ἐν τῇ πραγματείᾳ ταύτῃ διηκριβωμένα θεωρεῖν, καὶ τίνα μὲν ὅλα ὅλοις ἀντιστρέφειν δύναται, τίνα δὲ ὅλα μέρεσιν. ἔτι δὲ λεγομένην τὴν συνέχειαν τῶν εὑρέσεων, τὴν οἰκονομίαν, καὶ τὴν τάξιν τῶν τε προηγουμένων, καὶ τῶν ἑπομένων, τὴν δύναμιν, μεθ' ἧς ἕκαστα παραδίδωσιν, ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθείς, ἢ ἀφελών, οὐκ ἐπιστήμης λανθάνει ἀποπεσών, καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψεῦδος καὶ ἄγνοιαν ὑπενεχθείς. ἐπειδὴ δὲ πολλὰ φαντάζεται μὲν ὡς τῆς ἀληθείας ἀντεχόμενα, καὶ ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρχαῖς ἀκολουθοῦντα, φέρεται δὲ εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν πλάνην, καὶ τοὺς ἐπιπολαιοτέρους ἐξαπατᾷ, μεθόδους παραδέδωκεν καὶ τῆς τούτων διορατικῆς φρονήσεως. ἃς ἔχοντες γυμνάζειν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύτης, πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι δὲ διαμένειν. καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα, δι' οὗ τὴν παρασκευὴν ἡμῖν ταύτην ἐντίθησι, ψευδαρίων ἐπέγραψε, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει διακριβωσάμενος, καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι. τῷ δὲ ψεύδει τὸ ἀληθὲς παραθείς, καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπάτης συναρμόσας αὐτοῖς. τοῦτο μὲν οὖν τὸ βιβλίον καθαρτικόν ἐστι, καὶ γυμναστικόν. ἡ δὲ στοιχείωσις αὐτῆς τῆς ἐπιστημονικῆς θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίᾳ πραγμάτων ἀνέλεγκτον ἔχει, καὶ τελείαν ὑφήγησιν. τίς οὖν ὁ σκοπὸς τῆς θεωρίας τῶν ἐν γεωμετρίᾳ πραγμάτων. ταύτης ἴσως ἐρήσεταί τις. ἐγὼ δὲ καὶ πρὸς τοῦτον εἴποιμ' ἂν ὅτι διαιρετέον ἐστὶ τὴν πρόθεσιν, κατά τε τὰ πράγματα περὶ ὧν αἱ ζητήσεις καὶ κατὰ τὸν μανθάνοντα. καὶ πρὸς μὲν αὐτὰ τὰ ὑποκείμενα βλέποντες, λέγομεν, ὡς ἄρα περὶ τῶν κοσμικῶν σχημάτων ἐστὶν ὁ σύμπας τῷ γεωμέτρῃ λόγος. ἀρχόμενος μὲν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν, τελευτῶν δὲ εἰς ποικιλίαν τῆς τούτων συστάσεως, καὶ χωρὶς μὲν ἕκαστα ὑφιστάς, ὁμοῦ δὲ τὰς εἰς τὴν σφαῖραν αὐτῶν ἐγγραφάς, καὶ τοὺς λόγους οὓς ἔχει πρὸς ἄλληλα παραδιδούς. διὸ καὶ τῶν καθ' ἕκαστα βιβλίων τοὺς σκοποὺς τινὲς ἐπὶ τὸν κόσμον ἀναφέρειν ἠξίωσαν, καὶ τὴν χρείαν αὐτῶν ἣν παρέχεται πρὸς τὴν τοῦ παντὸς θεωρίαν ἀνέγραψαν. πρὸς δὲ τὸν μανθάνοντα διοριζόμενοι τὸν σκοπόν, αὐτὸ τοῦτο ὃ λέγεται στοιχείωσιν, αὐτῷ προκεῖσθαι φήσομεν, καὶ τελείωσιν τῆς τῶν μανθανόντων διανοίας πρὸς τὴν σύμπασαν γεωμετρίαν. ἀπὸ γὰρ τούτων ὡρμημένοι, καὶ τὰ ἄλλα γνῶναι δυνησόμεθα τῆς ἐπιστήμης ταύτης μέρη, καὶ τὴν ποικιλίαν τὴν ἐν αὐτῇ περιβαλεῖν, καὶ ἄνευ τούτων ἀδύνατος ἡμῖν καὶ ἄληπτος ἡ τῶν ἄλλων μάθησις. τὰ γὰρ ἀρχοειδέστατα, καὶ ἁπλούστατα θεωρήματα, καὶ συγγενέστατα ταῖς πρώταις ὑποθέσεσιν, ἐνταῦθα συνήθροισται, τάξιν λαβόντα τὴν πρέπουσαν. καὶ αἱ τῶν ἄλλων ἀποδείξεις, τούτοις ὡς γνωριμωτάτοις χρῶνται, καὶ ἀπὸ τούτων ὁρμῶνται. καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, καὶ Ἀπολλώνιος, καὶ οἱ ἄλλοι πάντες τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι. σκοπὸς μὲν οὖν οὗτος στοιχειῶσαί τε πρὸς τὴν ὅλην ἐπιστήμην τοὺς μανθάνοντας, καὶ τῶν κοσμικῶν σχημάτων διωρισμένας παραδοῦναι συστάσεις.

Euclidis opera.

Σκοπὸς τῆς γεωμετρίας.

συνεστάσης. αὕτη δέ ἐστι τὸ τῆς στοιχειώσεως ὄνομα, καὶ τὸ τοῦ στοιχείου, περὶ ὃ καὶ ἡ στοιχείωσις τίνα αὐτοῖς λόγον, ἵνα δὴ καὶ περὶ τῆς γραφῆς τι ζητήσωμεν. τῶν τοίνυν θεωρημάτων, τὰ μὲν, εἰώθασι στοιχεῖα καλεῖν, τὰ δὲ, στοιχειώδη, τὰ δὲ, ἔξω τῆς τούτων ἀφορίζεσθαι δυνάμεως. στοιχεῖα μὲν οὖν ἐπονομάζεται, ὧν ἡ θεωρία διικνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην, καὶ ἀφ' ὧν περιγίνεται ἡμῖν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπόρων ἡ διάλυσις. ὡς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσὶν ἀρχαὶ πρῶται καὶ ἁπλούσταται, καὶ ἀδιαίρετοι, ἃς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων ἐπιφημίζομεν, καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ὑφέστηκε, καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὴ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστί τινα θεωρήματα προηγούμενα, καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα, πρὸς τὰ ἐφεξῆς διήκοντα διὰ πάντων, καὶ παρεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεις συμπτωμάτων, ἃ δὴ στοιχεῖα προσαγορεύουσι. στοιχειώδη δὲ ὅσα, ὅσα διατείνει μὲν ἐπὶ πλέον, καὶ τὸ ἁπλοῦν ἔχει καὶ χαρίεν, οὐκέτι μὴν καὶ τῶν στοιχείων, τῷ μὴ πρὸς πᾶσαν αὐτῶν τὴν ἐπιστήμην κοινὴν εἶναι τὴν θεωρίαν, οἷον τοῖς τριγώνοις τὰς ἀπὸ τῶν γωνιῶν καθέτους ἐπὶ τὰς πλαγίας καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτειν. ὅσα τε μήτε εἰς πλῆθος ἔχει διήκουσαν τὴν γνῶσιν, μήτε αὖ γλαφυρόν τι προφαίνει καὶ χαρίεν, ταῦτα καὶ τῆς στοιχειώδους ἔξω πίπτει δυνάμεως. πάλιν δὲ τὸ στοιχεῖον λέγεται διχῶς, ὥς φησιν ὁ Μέναιχμος. καὶ γὰρ τὸ κατασκευάζον ἐστὶ, τοῦ κατασκευαζομένου, ὡς τὸ πρῶτον παρ' Εὐκλείδῃ τοῦ δευτέρου, καὶ τοῦ πέμπτου τὸ τέταρτον. οὕτω δὴ καὶ ἀλλήλων εἶναι πολλὰ στοιχεῖα ῥηθήσεται. κατασκευάζεται γὰρ ἐξ ἀλλήλων. δείκνυται γὰρ καὶ ἐκ τοῦ τέτρασιν ὀρθαῖς εἶναι ἴσας τὰς ἔξω τῶν εὐθυγράμμων γωνίας τὸ πλῆθος τῶν ἐν τοῖς ὀρθαῖς δυσὶν ἴσων, καὶ ἀνάπαλιν ἐκ τούτου ἐκεῖνο. καὶ ἔοικε λήμματι τὸ τοιοῦτον στοιχεῖον. εἰς ὃ ἁπλούστερον ὑπάρχον, διαιρεῖται τὸ σύνθετον. οὕτως δὲ, οὐ πᾶν ἔτι ῥηθήσεται τὸ στοιχεῖον, ἀλλὰ τὰ ἀρχοειδέστερα τῶν ἐν ἀποτελέσματος λόγῳ τεταγμένων, ὥσπερ τὰ αἰτήματα στοιχεῖα τῶν θεωρημάτων. κατὰ δὴ τοῦτο τοῦ στοιχείου τὸ σημαινόμενον, καὶ τὰ παρ' Εὐκλείδῃ στοιχεῖα συνετάχθη, τὰ μὲν τῆς περὶ τὰ ἐπίπεδα γεωμετρίας. οὕτω δὴ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, καὶ ἐν τοῖς ἀστρονομικοῖς στοιχειώσεις πολλοὶ συνέγραψαν. ἔστι δὲ ἐστὶ χαλεπὸν, καὶ τὸ ἐκλέξασθαι καὶ τάξαι περὶ τρόπον τὰ στοιχεῖα, καθ' ἑκάστην ἐπιστήμην, ἀφ' ὧν τὰ ἄλλα προάγεται πάντα, καὶ εἰς τὰ ἄλλα ἀναλύεται, καὶ τῶν ἐπιχειρησάντων, οἱ μὲν πλείω, οἱ δὲ ἐλάττω συναγαγεῖν ἠδυνήθησαν. καὶ οἱ μὲν, βραχυτέραις ἀποδείξεσιν ἐχρήσαντο, οἱ δὲ, εἰς μῆκος ἀπέτειναν, ἐξέτειναν τὰς θεωρίας. καὶ οἱ μὲν, τὸν ἀδύνατον τρόπον ἐξέκλιναν, οἱ δὲ, τὴν ἀναλογίαν, οἱ δὲ, προκατασκευὰς ἐμηχανήσαντο, πρὸς τοὺς ἀναιροῦντας τὰς ἀρχάς. καὶ ὅλως πολλοὶ τινὲς εὑρηνται τρόποι τῆς στοιχειώσεως ἑκάστοις. δεῖ δὲ τὴν τοιαύτην πραγματείαν, πᾶν μὲν ἀποσκευάσασθαι τὸ περιττόν. ἐμπόδιον γάρ ἐστι πρὸς τὴν ἐπιστήμην, ἐκλέγειν δὲ τὰ συνέχοντα πάντα καὶ συνάγοντα τὸ προκείμενον. ἀνυσιμώτατον γάρ ἐστι πρὸς τὴν ἐπιστήμην. σαφηνείας δὲ ἅμα καὶ συντομίας πολλὴν πεποιῆσθαι πρόνοιαν. τὰ γὰρ ἐναντία τούτων, ἐπιθολοῖ τὴν διάνοιαν ἡμῶν. τοῦ τε τῶν θεωρημάτων ἐν ὅροις καθολικῆς περιλήψεως ἀντέχεσθαι. τὰ γὰρ εἰς τὰ μερικώτερα τεμαχίζοντα τὴν διδασκαλίαν δυσπερίληπτον ἀπεργάζεται τὴν γνῶσιν. κατὰ πάντας δὲ τούτους τοὺς τρόπους εὕροι τις ἂν τὴν Εὐκλείδου στοιχείωσιν τῶν ἄλλων διαφέρουσαν. τὸ μὲν γὰρ χρήσιμον αὐτῆς εἰς τὴν περὶ τῶν ἀρχικῶν σχημάτων συντελεῖ θεωρίαν. τὸ δὲ σαφὲς καὶ διηρθρωμένον ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων, ἐπὶ τὰ ποικιλώτερα μετάβασις ἀπεργάζεται, καὶ ἡ ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν καταβολὴ τῆς θεωρίας. τὸ δὲ καθολικὸν τῆς ἀποδείξεως, ἡ διὰ τῶν πρώτων θεωρημάτων, καὶ ἀρχοειδῶν ἐπὶ τὰ ζητούμενα μετάβασις. καὶ γὰρ ὅσα παραλιμπάνειν δοκεῖ, ἢ ταῖς αὐταῖς ἐφόδοις γίγνεται γνώριμα, ὥσπερ ἡ σύστασις τοῦ σκαληνοῦ, καὶ ἰσοσκελοῦς, ἢ ὡς εἰς ἀμήχανον εἰσάγοντα καὶ ἀπέραντον ποικιλίαν, ἀλλότρια τῆς τῶν στοιχείων ἐστὶν ἐκλογῆς, ὥσπερ τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων λόγων, ἃ ὁ Ἀπολλώνιος ἐπὶ πλέον ἐξειργάσατο, ἢ ὡς αἰτίων τῶν παραδιδομένων ἔχει τὴν σύστασιν, ὥσπερ τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν, τὰ πολλά, καὶ τῶν γραμμῶν. ταῦτα γὰρ παραλέλειπται μὲν καὶ παρ' ἄλλοις ἔτυχε λόγου πλείονος, ἔχει δὲ τὴν γνῶσιν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν. τοσαῦτα περὶ τῆς ὅλης στοιχειώσεως εἴχομεν ἀναγράφειν. Τὴν δὲ σύμπασαν οἰκονομίαν τῶν ἐν αὐτῇ λόγων, ὧδε πως ἀναδιδάξομεν. ἐπειδὴ τὴν ἐπιστήμην ταύτην τὴν γεωμετρίαν ἐξ ὑποθέσεως εἶναί φαμεν, καὶ ἀπὸ ἀρχῶν ὡρισμένων τὰ ἐφεξῆς ἀποδεικνύναι, μία γὰρ ἡ ἀνυπόθετος, αἱ δὲ ἄλλαι παρ' ἐκείνης ἀποδέχονται τὰς ἀρχάς, ἀνάγκη δήπου τὸν τὴν ἐν γεωμετρίᾳ στοιχείωσιν συντάττοντα, χωρὶς μὲν παραδοῦναι τὰς ἀρχὰς τῆς ἐπιστήμης, χωρὶς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν

Θεωρημάτων διαφοραί.

Οἰκονομία λόγων γεωμετρικῶν.

χῶν συμπεράσματα, καὶ τῶν μὲν ἀρχῶν, μὴ διδόναι λόγον, τῶν δὲ ἑπομένων ταῖς ἀρχαῖς. οὐδεμία γὰρ ἐπιστήμη τὰς ἑαυτῆς ἀρχὰς ἀποδείκνυσιν, οὐδὲ ποιεῖται λόγον περὶ αὐτῶν, ἀλλ' αὐτόπιστος ἔχει περὶ αὐτάς, καὶ μᾶλλόν εἰσιν αὐτῇ καταφανεῖς τῶν ἐφεξῆς. καὶ τὰς μὲν οἶδε δι' αὐτάς, τὰ δὲ μετὰ ταῦτα δι' ἐκείνας. οὕτω γὰρ καὶ φυσιολόγος ἀπ' ἀρχῆς ὡρισμένης προάγει τοὺς λόγους ὑποθέμενος εἶναι κίνησιν. καὶ ὁ ἰατρός, καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν, καὶ τεχνῶν ὁ ἑκάστης ἔμπειρος. εἰ δέ τις εἰς ταὐτὸν συμφύρει τάς τε ἀρχάς, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, οὗτος ἐπιταράττει τὴν σύμπασαν γνῶσιν, καὶ συγκυκᾷ τὰ μηδὲν προσήκοντα ἀλλήλοις. ἀρχὴ γὰρ καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς φύσει διώρισται ἀλλήλων. πρῶτον μὲν οὖν ἅπερ ἔφην ἔδει διαστείλασθαι, τάς τε ἀρχάς, καὶ τὰ ἑπόμενα ταῖς ἀρχαῖς, ὃ δὴ καὶ ποιεῖ ὁ Εὐκλείδης καθ' ἕκαστον ὡς εἰπεῖν βιβλίον, καὶ πρὸ πάσης τῆς πραγματείας, τὰς κοινὰς τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἀρχὰς ἐκτιθέμενος.

Ὑποθέσεις, Αἰτήματα, Ἀξιώματα quid differant.

ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἴς τε τὰς ὑποθέσεις, καὶ τὰ αἰτήματα, καὶ τὰ ἀξιώματα. διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων, καὶ οὐκ ἔστι ταὐτὸν ἀξίωμα καὶ αἴτημα, καὶ ὑπόθεσις, ὥσπου φησὶν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης. ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ καὶ καθ' αὑτὸ πιστὸν παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον, τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστον, τίθεται δὲ ὅμως, καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσίς ἐστι. τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοιόνδε, κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως, ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀποδείξεως χωρίς. ὅτε δ' αὖ καὶ ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον, καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος, ὅμως λαμβάνηται, τηνικαῦτα φησίν, αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν. οἷον, τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. δηλοῦσι δὲ οἱ περί τινος τῶν αἰτημάτων καταπραγματεύσασθαι σπουδάσαντες, ὡς ὑπὸ μηδενὸς αὐτόθεν συγχωρεῖσθαι δυνάμενον. καὶ κατὰ μὲν τὴν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν, τοῦτον διώρισται τὸν τρόπον, ἀξίωμα, καὶ αἴτημα, καὶ ὑπόθεσις.

Nomina haec saepe confunduntur.

πολλάκις δὲ καὶ ταῦτα πάντα καλοῦσιν ὑποθέσεις ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς στοᾶς, ἀξίωμα πᾶσαν ἀπόφασιν ἁπλῆν, ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ ὑποθέσεις ἀξιώματα. κατὰ δὲ τοὺς ἑτέρους, καὶ τὰ ἀξιώματα ὑποθέσεις. πάλιν δὲ αὖ τὰ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰς προβλήματα διαιρεῖται, καὶ θεωρήματα, τὰ μέν, τὰς γενέσεις περιέχοντα τῶν σχημάτων, καὶ τὰς τομάς, καὶ τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις, καὶ ὅλως τὰ παθήματα τὰ γιγνόμενα περὶ αὐτά, τὰ δὲ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα, ἑκάστοις δεικνύοντα. καθάπερ γὰρ αἱ ποιητικαὶ τῶν ἐπιστημῶν θεωρίας μετέχουσι, κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ αἱ θεωρητικαὶ τὰ προβλήματα ταῖς ποιήσεσιν ἀνάλογον περιειλήφασιν. ἤδη δὲ τῶν παλαιῶν οἱ μέν, πάντα θεωρήματα καλεῖν ἠξίωσαν, ὡς οἱ περὶ Σπεύσιππον, καὶ Ἀμφίνομον, ἡγούμενοι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις οἰκειοτέραν εἶναι, τὴν τῶν θεωρημάτων προσηγορίαν, ἢ τὴν τῶν προβλημάτων. ἄλλως τε καὶ περὶ ἀϊδίων ποιουμένοις τοὺς λόγους. οὐ γάρ ἐστι γένεσις ἐν τοῖς ἀϊδίοις, ὥστε οὐδὲ τὸ πρόβλημα χώραν ἐπὶ τούτων ἂν ἔχοι, γένεσιν ἐπαγγελλόμενον, καὶ ποίησιν τοῦ μήπω πρότερον ὄντος, οἷον ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν, ἢ τετραγώνου, δοθείσης εὐθείας, πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ ἀναγραφήν, ἢ θέσιν. ἄμεινον οὖν φασὶ λέγειν ὅτι πάντα ταῦτά ἐστι, τὰς δὲ γενέσεις αὐτῶν οὐ ποιητικῶς, ἀλλὰ γνωστικῶς ὁρῶμεν, ὡσανεὶ γιγνόμενα λαμβανόντων τὰ ἀεὶ ὄντα. ὥστε καὶ πάντα θεωρητικῶς ἐροῦμεν, ἀλλ' οὐ προβληματικῶς λαμβάνεσθαι. οἱ δέ, ἀνάπαλιν πάντα προβλήματα λέγειν ἐδικαίουν, ὡς οἱ περὶ Μέναιχμον μαθηματικοί. τὴν δὲ προβολὴν εἶναι διττήν. ὅτε μὲν πορίσασθαι τὸ ζητούμενον, ὅτε δὲ περιωρισμένον λαβόντας ἰδεῖν ἅτις ἐστὶν, ἢ ποῖόν τί ἐστι, ἢ τί πάθος, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο σχέσεις. καὶ λέγουσι μὲν ὀρθῶς ἀμφότεροι. καὶ γὰρ οἱ περὶ Σπεύσιππον καλῶς. οὐ γὰρ τοιαῦτά ἐστι τὰ προβλήματα γεωμετρίας, οἷα τὰ μηχανικῆς· αἰσθητὰ γὰρ ταῦτα καὶ γένεσιν ἔχοντα, καὶ παντοίαν μεταβολήν. καὶ οἱ περὶ τὸν Μέναιχμον. οὐ γὰρ ἄνευ τῆς εἰς ὕλην προόδου καὶ αἱ τῶν θεωρημάτων εἰσὶν εὑρέσεις. λέγω δὲ ὕλην τὴν νοητήν. εἰς ἐκείνην οὖν οἱ λόγοι προϊόντων καὶ μορφούντων αὐτήν, εἰκότως δήπου ταῖς γενέσεσιν ἐοικέναι λέγονται. τὴν γὰρ τῆς διανοίας ἡμῶν κίνησιν, καὶ τὴν προβολήν, τῶν ἐν αὐτῇ λόγων γένεσιν τῶν ἐν φαντασίᾳ σχημάτων εἶναί φαμεν, καὶ τῶν περὶ αὐτὰ παθημάτων. ἐκεῖ γὰρ καὶ αἱ συστάσεις, καὶ αἱ τομαί, καὶ αἱ θέσεις, καὶ αἱ προβολαί, καὶ αἱ προσθέσεις, καὶ αἱ ἀφαιρέσεις. τὰ δὲ ἐν τῇ διανοίᾳ πάντα ἕστηκεν ἄνευ γενέσεως καὶ πάσης μεταβολῆς. ἔστι μὲν οὖν καὶ προβλήματα γεωμετρικὰ

καὶ θεω-

καὶ θεωρήματα. διότι δὲ θεωρία τὸ πλεονάζον ἐστὶν ὥσπερ ἐπὶ τῶν μηχανικῶν ποίησις. καὶ τὰ προβλήματα πάντα μετέχει θεωρίας, οὐ μὴν ἀνάπαλιν. ὅλως γὰρ αἱ ἀποδείξεις θεωρίας εἰσὶν ἔργον. πάντα δὲ, τὰ ἐν γεωμετρίᾳ, τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς διὰ ἀποδείξεως λαμβάνεται, ὥστε κοινότερον τὸ θεώρημα. οὐ πάντα δὲ τὰ θεωρήματα δεῖται τῶν προβλημάτων, ἀλλ' ἔστιν ἃ καὶ αὐτόθεν ἔχει τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου. οἱ δὲ διορίζοντες τὸ θεώρημα τοῦ προβλήματος φασὶν, πᾶν μὲν πρόβλημα ἐπιδέχεσθαι τῶν κατηγορουμένων τι ἐν αὐτῷ ὕλης, αὐτό τε ἕκαστον, καὶ τὸ ἀντικείμενον. πᾶν δὲ θεώρημα δέχεσθαι τὸ κατηγορούμενον, οὐ μέντοι καὶ τὸ ἀντικείμενον. λέγω δὲ ὕλην μὲν αὐτῶν τὸ γένος, περὶ οὗ ἡ ζήτησις, οἷον τρίγωνον, ἢ τετράγωνον, ἢ κύκλον, σύμπτωμα δὲ κατηγορούμενον τὸ καθ' αὑτὸ συμβεβηκὸς, οἷον ἴσον ἢ τομὴν, ἢ θέσιν, ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον. ὅταν οὖν προτείνῃ τις οὕτως, εἰς κύκλον ἐντεῖναι τρίγωνον ἰσόπλευρον, πρόβλημα λέγει· δυνατὸν γὰρ εἰς αὐτὸν ἐντεῖναι καὶ μὴ ἰσόπλευρον. καὶ πάλιν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης ἐνστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον πρόβλημα τοιοῦτον δέ. δυνατὸν γὰρ στήσασθαι, καὶ μὴ ἰσόπλευρον. ὅταν δὲ τῶν ἰσοσκελῶν, ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει τῶν ἰσοσκελῶν. ὥστε εἴ τις προβληματικῶς σχηματίσας εἴποι εἰς ἡμικύκλιον ὀρθὴν ἐντεῖναι γωνίαν ἀγεωμέτρητος δόξαν ἀναλάβοι. πᾶσα γὰρ ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθή ἐστιν. ἐφ' ὧν τοίνυν τὸ σύμπτωμα καθολικόν ἐστι καὶ πάσῃ τῇ ὕλῃ συμμαρτυροῦν ταῦτα θεωρήματα λεκτέον. ἐφ' ὧν δὲ μὴ καθόλου μηδὲ τῷ ὑποκειμένῳ πάντως ἑπόμενον, πρόβλημα τὸ τοιοῦτον θετέον. τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα εἰς ἴσα τεμεῖν. καὶ γὰρ εἰς ἄνισα, δυνατόν. πᾶσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα εἰς ἴσα τέμνειν, ἔστι γὰρ καὶ ἡ εἰς ἄνισα διαίρεσις. ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ἀναγράψαι τετράγωνον, δυνατὸν γοῦν καὶ μὴ τετράγωνον. καὶ πάντα ὅσα τοιαῦτα τῆς τῶν προβλημάτων ἐστὶ τάξεως. οἱ δὲ περὶ Ζηνόδοτον τὸν προσήκοντα μὲν τῇ Οἰνοπίδου διαδοχῇ, τῶν μαθητῶν δὲ Ἀνδρωνος διορίζονται τὸ θεώρημα τοῦ προβλήματος, ᾗ τὸ μὲν θεώρημα, ζητεῖ τί ἐστι τὸ σύμπτωμα τὸ κατηγορούμενον τῆς ἐν αὐτῷ ὕλης, τὸ δὲ πρόβλημα τίνος ὄντος, τὸ ἐστιν. ὅθεν οἱ περὶ τὸν Ποσειδώνιον, τὸ μὲν ἀφορίζονται πρότασιν καθ' ἣν ζητεῖται τὸ εἰ ἐστὶν ἢ μή. τὸ δὲ πρόβλημα, πρότασιν ἐν ᾗ ζητεῖται τί ἐστιν, ἢ ποῖόν τι. καὶ τὴν μὲν θεωρητικὴν πρότασιν ἔλεγον δεῖν ἀποφαντικῶς σχηματίζειν, οἷον, πᾶν τρίγωνον μείζους ἔχει τὰς δύο τῆς λοιπῆς, καὶ πάσαι τοῦ ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι. τὴν δὲ προβληματικὴν ὥσπερ ζητοῦντας, εἰ ἐστὶν ἐπὶ τῆσδε τῆς εὐθείας συστήσασθαι τρίγωνον. διαφέρειν γὰρ ἢ ἁπλῶς τε καὶ ἀορίστως ζητεῖν ἢ ἔστι πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ δε τοῦ σημείου, τῇ δε εὐθείᾳ ἥτις ἐστὶν, ἢ πρὸς ὀρθὰς θεωρεῖν. ἀλλ' ὅτι μὲν ἐστί τις διαφορὰ τοῦ τε προβλήματος, καὶ τοῦ θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων. ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα, τὰ δὲ θεωρήματα φανερὸν ἔσται διὰ τῶν καθ' ἕκαστον, καὶ αὐτοῦ προστιθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, ὅπου δὲ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, ὡς ὅπερ ἔδει ποιῆσαι τῶν προβλημάτων, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, τῶν θεωρημάτων χαρακτηριστικὸν. καίτοι καθάπερ εἴπομεν, οὔσης καὶ ἐν τοῖς προβλήμασιν ἀποδείξεως, ἀλλ' ὅμως ὅπου μὲν καὶ ἡ ἀπόδειξις τῆς γενέσεως χάριν. ἵνα γοῦν δείξωμεν ὅτι πεποίηται τὸ προσταχθὲν τὴν ἀπόδειξιν παραλαμβάνομεν. ὅπου δὲ αὐτὴ δι' ἑαυτὴν ἐπὶ ἀποδείξεως ἀξία τὴν φύσιν τοῦ ζητουμένου παραστῆσαι δυναμένη. εὕροις δ' ἂν τὸν Εὐκλείδην, τοτὲ μὲν συμπλέκοντα τὰ θεωρήματα τοῖς προβλήμασι, καὶ παραμεμιγμένοις αὐτοῖς χρώμενον ὡς ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ, τοτὲ δὲ πλεονάζοντα παρὰ τὰ ἕτερα. τὸ μὲν γὰρ τέταρτον ὅλον προβλημάτων ἐστί. τὸ δὲ πέμπτον θεωρημάτων. τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων ἡμῖν εἰρήσθω. μετὰ δὲ ταῦτα τὸν σκοπὸν ἀφορισάμενοι τοῦ πρώτου βιβλίου, καὶ τὴν διαίρεσιν παραστήσαντες ἀρξώμεθα τῆς περὶ τοὺς ὅρους πραγματείας. ἡ μὲν οὖν πρόθεσίς ἐστιν ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ, τὰς ἀρχὰς παραδοῦναι τῆς τῶν εὐθυγράμμων θεωρίας. εἰ γὰρ καὶ φύσει κρείττων ὁ κύκλος, καὶ ἡ περὶ αὐτοῦ πραγματεία τῆς τῶν εὐθυγράμμων οὐσίας τε καὶ γνώσεως, ἀλλ' ἡμῖν προσήκουσα μᾶλλον ἡ περὶ τούτων διδασκαλία, τοῖς ἀτελεστέραν, καὶ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν ἐπὶ τὰ νοητὰ μετάγειν τὴν διάνοιαν ἀδυνατοῦσι. καὶ γὰρ τοῖς μὲν αἰσθητοῖς οἰκεῖα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα, τοῖς δὲ νοητοῖς ὁ κύκλος. διότι δὴ τὸ μὲν ἁπλοῦν καὶ μονοειδὲς καὶ ὡρισμένον προσήκει τῇ φύσει τῶν ὄντων, τὸ δὲ ποικίλον καὶ ἀορίστως αὐξανόμενον τῷ πλήθει τῶν περιεχουσῶν πλευρῶν διαφέρει τοῖς αἰσθητοῖς. ἐν τούτῳ δὴ οὖν τῷ βιβλίῳ, τὰ πρῶτα καὶ ἀρχοειδέστατα σχήματα τῶν εὐθυγράμμων

Σκοπὸς τοῦ πρώτου βιβλίου.

παραδί-

Τὰ πρῶτα τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων.

παραδίδοται, τό, τε τρίγωνον λέγω, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον. ἐν γὰρ τούτοις, ὡς ἐν γένει περιέχεται, καὶ τὰ αἴτια τῶν στοιχείων, τό, τε ἰσοσκελὲς, καὶ τὸ σκαληνὸν, καὶ τὰ συνιστάμενα ἐκ τούτων, τό, τε ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τετράγωνον, ἀφ' ὧν τὰ σχήματα τῶν τεττάρων στοιχείων ἔχει τὴν σύστασιν. εὑρήσομεν οὖν καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τετραγώνου γένεσιν, τοῦ μὲν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας, τοῦ δὲ, ἀπὸ τῆς δοθείσης. τὸ οὖν ἰσόπλευρον μὴ εἰς ἄπειρον ἐκταθὲν μέγεθος, ἢ κατὰ τὴν νόησιν, ἢ κατὰ τὴν αἴσθησιν διὰ τὴν φαντασίαν πανταχόθεν ἐπερατώθη, καὶ ἵνα μὴ τὸ ἐπίπεδον εἰς ἀοριστίαν λάθῃ προελθόν, ἡ γραμμὴ προέλαβεν αὐτὸ καὶ ὥρισεν ἐν αὐτῷ γενομένη. καὶ τὸ σημεῖον ὡσαύτως τὴν γραμμὴν, τῶν συνθέτων ἕνεκα τῶν ἁπλῶν ὑφισταμένων. καὶ γὰρ τοῦτο δῆλον, ὅτι ἐν μὲν τοῖς χωριστοῖς εἴδεσιν, οἱ λόγοι τῶν περάτων ἐν ἑαυτοῖς εἰσιν ὑποστατικοὶ, καὶ οὐ γίγνονται τῶν δευτέρων. ἐν δὲ τοῖς ἀχωρίστοις ὑποδεδύκασιν ἑαυτοὺς τοῖς περατουμένοις καὶ ἐν ἐκείνοις ἱδρύνθησαν, καὶ οἷον μέρη γεγόνασιν ἐκείνων, καὶ ἀνεπλήσθησαν τῶν χειρόνων. ὅθεν δὴ καὶ τὸ ἀμερὲς ἐν τοῖσδε τῆς μεριστῆς οὐσίας, καὶ τὸ ἀπλατὲς πλάτους μετέχει, κατὰ τὴν ἑαυτῶν ἁπλότητα, καὶ τὸ εἰλικρινὲς οὐκέτι τὰ περατοῦντα φυλάξαι δεδύνηνται. κινδυνεύοντα γὰρ ἐν ἄλλῳ συνηλλοιῶσθαι τῷ ὑποκειμένῳ. ἡ γὰρ ὕλη, τὴν τούτων ἀπεβάλωσεν ἀκρίβειαν. καὶ ὁ μὲν τοῦ ἐπιπέδου λόγος, βαθύνει τὸ ἐπίπεδον, ὁ δὲ τῆς γραμμῆς ἀμυδρώσας τὴν ἐφ' ἓν διάστασιν, πάντῃ γίγνεται μεριστὸς, ὁ δὲ τοῦ σημείου σωματοειδὴς ἀποτελεῖται καὶ συνδιίσταται τοῖς ὑφ' ἑαυτοῦ περατουμένοις. πάντων γοῦν εἰς ὕλην ῥευσάντων, οἱ μὲν, ἀπὸ τῆς διανοίας, εἰς τὴν νοητὴν, οἱ δὲ, ἀπὸ τῆς φύσεως εἰς τὴν αἰσθητὴν ἀνεπλήσθησαν εἰς τῆς τῶν ὑποκειμένων καὶ τῆς αὐτῶν ἁπλότητος, ἐξέστησαν εἰς ἀλλοτρίας συνθέσεις τε καὶ διαστάσεις. ἀλλὰ πῶς ἐν τῷ νῷ, καὶ ἐν τῇ ψυχῇ, πάντων ἀμερῶς ὄντων καὶ ἀδιαστάτως, ἐν τῇ ὕλῃ τὰ μὲν, προηγουμένως ἐμερίσθη τὰ δὲ, διὰ τὴν ἐκείνων φύσιν; ἢ καὶ τοῖς ἀύλοις εἴδεσι τάξις ἐστὶ, πρώτων τε καὶ μέσων καὶ τελευταίων. καὶ τὰ μὲν, ἑνοειδέστερα τῶν εἰδῶν ἐστὶ, τὰ δὲ, πληθύνεται μᾶλλον, καὶ τὰ μὲν, συνεσπειραμένας ἔχει τὰς ἑαυτῶν δυνάμεις, τὰ δὲ, εἰς διάστασιν προελθούσας, καὶ τὰ μὲν πρὸς τοῦ πέρατός ἐστι, τὰ δὲ, πρὸς τῆς ἀπειρίας. εἰ γὰρ καὶ πάντα μετέχει τῶν δύο τούτων ἀρχῶν, ἀλλὰ τὰ μὲν τῆς ἑτέρας ἐστὶν ἔκγονα, καὶ πλέον ταύτης μετείληχε, τὰ δὲ, τῆς λοιπῆς. τὸ μὲν οὖν σημεῖον, ἀμερὲς ἐκεῖ πάντῃ, ὡς καὶ κατὰ τὸ πέρας ὑφέστηκεν ἔχει δὲ τὴν ἄπειρον δύναμιν κρυφίως, καθ' ἣν καὶ γεννᾷ πάντα τὰ διαστήματα, καὶ ἡ πρόοδος τῶν διαστημάτων πάντων οὐκ ἐξελίττει τὴν ἄπειρον ἐκείνου δύναμιν. τὸ δὲ σῶμα, καὶ ὁ τοῦ σώματος λόγος τῆς ἀπειρίας μειζόνως μετέχει φύσεως. διὸ καὶ τῶν ἀλλαχόθεν περατουμένων ἐστὶ, καὶ τῶν ἐπ' ἄπειρον διαιρετῶν, κατὰ πάσας τὰς διαστάσεις. τὸ δὲ αὖ μεταξὺ τούτων, κατὰ τὴν τῶν ἄκρων ὑπόστασιν, ἢ τῶν κατὰ τὸ πέρας ἐστὶ πλεοναζόντων, ἢ τῶν τῆς ἀπειρίας ἀπολελαυκότων. διὸ καὶ περατοῖ, καὶ περατοῦται, καθ' ὅσον μὲν ἐκ τοῦ πέρατος ὑφέστηκεν ἀλλὰ δυνάμενα περατοῦν, καθ' ὅσον δ' αὖ μετέχει τῆς ἀπειρίας, ὁρίζεσθαι παρ' ἄλλων δεόμενα. πέρας οὖν καὶ τὸ σημεῖον ὑπάρχον ἐν τῇ μεθέξει τὴν οἰκείαν διαφυλάττει δύναμιν, ἔχον δὲ τὴν ἀπειρίαν κρυφίως καὶ πανταχοῦ παρεῖναι τοῖς ὑφ' ἑαυτοῦ περατουμένοις ἐπειγόμενον, ἀπειραχῶς ἐστὶν ἐν αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ δύναμις ἦν ἐκεῖ τὸ ἄπειρον γεννητικὴ τῶν διαστατῶν, δυνάμει γέγονεν ἐν τοῖς μετέχουσι. καὶ γὰρ ἡ ἀπειρία, παρ' ἐκείνοις μὲν τοῖς νοητοῖς λέγω, πρωτουργὸς ἦν αἰτία καὶ γόνιμος τῶν ὅλων δύναμις. ἐν δὲ τοῖς ἐνύλοις, ἀτελὴς καὶ δυνάμει μόνον οὖσα τὰ πάντα. καὶ ὡς συνελόντι φάναι, τὰ διὰ ἁπλότητα καὶ ἀμέρειαν ἐν ταῖς ἀρχαῖς ὑπερειδόμενα τῶν εἰδῶν, ἐν ταῖς μετέξεσι, φυλάττει μὲν ὡς πέφυκεν τὴν ἑαυτῶν ἰδιότητα, καταδεέστερα δὲ τῶν συνθετωτέρων γενόμενα λόγων. καὶ γὰρ ἡ ὕλη τούτων τρανέστερον μετέχειν δύναται, καὶ πρὸς ταῦτα μᾶλλον, ἢ πρὸς ἁπλουστάτας τῶν ὄντων αἰτίας παρασκευάζεται. διὸ, τῶν μὲν ἐξῃρημένων ἀρχῶν ἴχνη κάτεισιν εἰς αὐτὴν, τῶν δὲ δευτέρων καὶ τρίτων αἱ μεταδόσεις ἐναργέστεραι προφαίνονται. μᾶλλον οὖν μετέχει τῆς τοῦ σχήματος αἰτίας, ἢ τῆς τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ταύτης μᾶλλον, ἢ τῆς εὐθείας τῆς γραμμῆς, καὶ τούτου μειζόνως, ἢ τοῦ πάντα περατοῦντος ταῦτα σημείου καὶ συνέχοντος. ὁ γὰρ τοῦ σημείου λόγος, πάσης ταύτης ἐξῃρεῖται τῆς σφαίρας. καὶ πάντα ἑνοῖ τὰ μεριστὰ, καὶ συνέχει, καὶ ὁρίζει τὰς προόδους αὐτῶν, καὶ παράγει πάντα, καὶ περιλαμβάνει πανταχόθεν. διὸ καὶ ἐν ταῖς εἰκόσιν, ἀλλὰ μὴ ἄλλων πέρατα, πάντων δὲ τὸ σημεῖον. ὅτι δὲ οὐδὲ νομίζειν κατ' ἐπίνοιαν ψιλὴν ὑφεστάναι τὰ τοιαῦτα πέρατα, λέγω

Termini quales ἐν τοῖς νοητοῖς, καὶ μεριστοῖς.

τῶν συν-

τῶν σωμάτων, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς στοᾶς ὑπέλαβον. ἀλλ' εἰσὶ τινὲς φύσεις ἐν τοῖς οὖσι τοιάσδε, καὶ
λόγους αὐτῶν προεστάναι δημιουργικοὺς ἀναμνησθείημεν ἂν εἰς τὸν ὅλον κόσμον ἀποβλέψαν-
τες, καὶ τὰς ἐν αὐτῷ περιφοράς, καὶ τὰ κέντρα τῶν περιφορῶν, καὶ τοὺς δι' ὅλων αὐτῶν διή-
κοντας ἄξονας. τά τε γὰρ κέντρα κατ' ἐνέργειαν ὑφέστηκεν συνεκτικὰ τῶν σφαιρῶν ὑπάρχοντα,
καὶ ἐνίζοντα τὰς διαστάσεις αὐτῶν, καὶ σφίγγοντα τὰς δυνάμεις ἐν αὐταῖς, καὶ συνερείδοντα
πρὸς ἑαυτά. καὶ οἱ ἄξονες συνελίττουσιν αὐτάς, καὶ περιάγουσιν αὐτοὶ μονίμως ἱδρυμένοι, καὶ
περὶ ἑαυτοὺς ἀνακυκλοῦσι. καὶ μὴν καὶ οἱ πόλοι τῶν σφαιρῶν, καὶ αὐτοὺς τοὺς ἄξονας ἀφορίζοντες,
καὶ τὰς ἄλλας περιφορὰς ἀφ' ἑαυτῶν συνέχοντες, πῶς οὐχὶ δηλοῦσιν ἐναργῶς, ὅτι τὰ σημεῖα
δημιουργικὰς ἔχει καὶ συνεκτικὰς δυνάμεις, καὶ τελεσιουργοὺς τῶν διαστατῶν πάντων, ἑνώ-
σεώς τε χορηγούς, καὶ τῆς ἀπαύστου κινήσεως. ὅθεν δὴ καὶ ὁ Πλάτων, ἀδαμαντίνην αὐτῶν τὴν
ὑπόστασιν εἶναί φησι, τὸ ἄτρεπτον καὶ διαιωνίζον καὶ μόνιμον, καὶ ὡσαύτως ἔχον τῆς οὐσίας
αὐτῶν ἐνδεικνύμενος. τόν τε ἄτρακτον ὅλον περὶ αὐτὰ κινεῖσθαί φησι καὶ περιχορεύειν αὐτῶν
τὴν ἕνωσιν. ἄλλοι δὲ ἀπορρητότεροι λόγοι, καὶ τὸν δημιουργὸν ἐφεστάναι τῷ κόσμῳ λέγουσι τοῖς
πόλοις ἐποχούμενον, καὶ δι' ἔρωτος θείου τὸ πᾶν ἐπιστρέφοντα πρὸς ἑαυτόν. οἱ δὲ πυθαγόρειοι,
τὸν μὲν πόλον σφραγῖδα τῆς ῥέας ἀποκαλεῖν ἠξίουν, ὡς τῆς ζωογόνου θεότητος ἄρρητον καὶ
δραστήριον δύναμιν, εἰς τὸ πᾶν διὰ τούτων προϊεμένης. τὸ δὲ κέντρον ζηνὸς φυλακήν, διότι
τὴν δημιουργικὴν φρουρὰν ὁ ζεὺς τοῖς κόλποις ἐντιθεὶς τοῦ κόσμου, περὶ τὸ μέσον αὐτήν, σταθερῶς
ἵδρασεν. τοῦ γὰρ κέντρου μένοντος, καὶ τὸ πᾶν ἀσάλευτον ἔχει τὴν διακόσμησιν, καὶ ἄπαυ-
στον τὴν περιφορὰν καὶ μίαν, πάντα φυλάττοντα τὴν ἑαυτῶν τάξιν ἀμετάστατον, οἵ τε πο-
λοκράτορες θεοὶ συναγωγοὶ τῶν διῃρημένων καὶ ἑνοποιοὶ τῶν πεπληθυσμένων κεκλήρωνται
δύναμιν. καὶ οἱ τοὺς ἄξονας λαχόντες, συνελαύνουσι τὰς περιφοράς, καὶ διαιωνίως ἀνακυκλοῦ-
σι. καὶ εἰ μὲν δεῖ τοὐμὸν εἰπεῖν, τὰ μὲν κέντρα πασῶν τῶν σφαιρῶν καὶ οἱ πόλοι, σύμβολα τῶν ἰυγγι-
κῶν εἰσὶ θεῶν, τὸ ἄγνωστον ἐκείνων καὶ ἑνωτικὸν ἀπεικονισμένοι συνθήματα. οἱ δὲ ἄξονες, τὰς συ-
νοχὰς τῶν ὅλων διακόσμων ἀποτυποῦνται. καὶ αὗται συνεκτικοὶ τῶν ἐγκοσμίων εἰσὶν ὁλοτή-
των, καὶ τῶν περιόδων, ὥσπερ ἐκεῖναι τῶν νοερῶν, αὗται δὲ αἱ σφαῖραι τῶν τελεσιουργῶν θεῶν
εἰκόνες εἰσὶν ἀρχὴν τέλει συνάψασαι, καὶ πάντων σχημάτων ἁπλοτάτην καὶ τελεωτάτην δια-
φέρουσαι. ταῦτα μὲν οὖν ἤδη πλέον προσηγάγομεν εἰς ἔνδειξιν τῆς τῶν ἀμερῶν, καὶ ὅλως τῶν ἐν
τῷ κόσμῳ πρώτων δυνάμεων. καὶ ὅτι ταῦτα καθόλου εἰκόνα φέρει τῶν πρώτων καὶ ἀρχι-
κωτάτων αἰτίων, τὴν μεγίστην ἐν τῷ παντὶ κεκλήρωται τάξιν. οὐ γὰρ τοιαῦτα ἀόρατά ἐστι
τὰ κέντρα καὶ οἱ πόλοι, οἷα τὰ τῶν πεπερατωμένων, ἀλλὰ κατ' ἐνέργειαν ἵδρυται, καὶ ὕπαρξιν
ἔχει καὶ δύναμιν αὐτοτελῆ, καὶ διήκουσαν διὰ πάντων τῶν μεριστῶν. οἱ δὲ πολλοὶ τὰ ἐν τοῖς
πεπερατωμένοις αὐτοῖς ἀτελῶς ὑφεστηκότα θεωροῦντες, ἀμυδρὰν αὐτῶν οἴονται τὴν ὑπόστασιν
εἶναι. καὶ οἱ μέν, κατ' ἐπίνοιαν μόνην χωρίζεσθαι αὐτά φασι τῶν αἰσθητῶν, οἱ δέ, μηδὲ ἀλλαχοῦ
που τὴν οὐσίαν ἔχειν, ἢ ἐν ταῖς ἡμετέραις ἐπινοίαις. ἐπεὶ δὲ ἔστι μὲν καὶ ἐν τῇ νοερᾷ φύσει τὰ
εἴδη τούτων, ἔστι δὲ καὶ ἐν τοῖς ψυχικοῖς διακόσμοις, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ φύσει, καὶ ἐν τοῖς σώμα-
σιν ἐσχάτοις, νοήσωμεν ὅπως κατὰ τὴν ἐν αὐτοῖς τάξιν καὶ τὴν ὑπόστασιν ἔλαχεν, ἐν τοῖς γένε-
σι τῶν ὄντων. καὶ πάντα μὲν ἐν νῷ προϋφέστηκεν ἀλλ' ἀμερίστως καὶ ἑνοειδῶς. ὥστε πάντα
καθ' ἓν εἶδος ὑφεστάναι, καὶ τὸν σημείου λόγον κρύφιον ὄντα καὶ ἀμερῶς, πάντα δὲ ἐν ταῖς
ψυχαῖς, ἀλλὰ κατὰ τὸ εἶδος τῆς γραμμῆς, ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος, ἐκ τῶν εὐθειῶν, καὶ τῶν περι-
φερῶν γραμμῶν, ὑπεστήσατο τὴν ψυχήν, καὶ γὰρ τῶν κύκλων, ἕκαστος γραμμή ἐστι μόνον. πάν-
τα δὲ ἐν ταῖς φύσεσι, ἀλλὰ κατὰ τὸν τοῦ ἐπιπέδου λόγον, διὸ καὶ ὁ Πλάτων τοὺς φυσικοὺς λόγους,
τοὺς ὑποστατικοὺς τῶν σωμάτων, διὰ τῶν ἐπιπέδων ἠξίου δηλοῦν, καὶ ἡ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ἐπί-
πεδα ἀνάλυσις, ἤδη τὴν αἰτίαν ἡμᾶς περιάγει τὴν προσεχῆ τῶν φαινομένων. πάντα μὲν
καὶ ἐν τοῖς σώμασι, ἀλλὰ σωματοειδῶς, κατὰ τὴν μεριστὴν φύσιν τῶν σωμάτων πάντων ἐν αὐτοῖς
ὑφεστώτων τῶν εἰδῶν. πάντα ἄρα πανταχοῦ, καὶ ἕκαστον κατὰ τὴν οἰκείαν τάξιν ἐκφαίνεται, καὶ ἡ
ἐξαλλαγὴ παρὰ τὴν ἐπικρατοῦσαν δύναμιν. καὶ πανταχοῦ μὲν τὸ σημεῖον ἀμερές, καὶ τὸ με-
ρὲς μὴ διαφέρον ἁπλότητι κατὰ τὴν δὲ τὴν ὕφεσιν τῶν ὄντων. καὶ τοῦτο παρὰ τὴν ἐξηγημένην ἔλα-
χεν τῶν μεριστῶν ὑπόστασιν. καὶ ὅπου μὲν παντελῶς αὐτῶν ὑπορίζονται κατὰ τὴν τῆς αἰτίας
ὑπεροχήν, ὅπου δὲ συντέτακται αὐτοῖς, ὅπου δὲ ἐπεισοδιώδη τὴν ὕπαρξιν ἐν αὐτοῖς ἐκλη-

 ρώσατο,

ἐρρώσατο. καὶ οἷον καταπινόμενον ὑπὸ τοῦ μερισμοῦ τῶν ἐσχάτων ἐκλύει τὴν οἰκείαν ἀμέρειαν. καθάπερ οὖν ἡ μονάς, ἄλλη μὲν ἡ γεννητικὴ τῶν ἀριθμῶν, ἄλλη δὲ ἡ ὡς ὕλη τοῖς ἀριθμοῖς ὑπεστρωμένη, καὶ ἀρχὴ μὲν ἑκατέρα, καὶ οὐχ ὅπερ ἀριθμός, ἄλλον δὲ τρόπον καὶ ἄλλον, κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ σημεῖον, οὗ μὲν ὑποστατικόν ἐστι τῶν μεγεθῶν, οὗ δὲ ἄλλως ἀρχή, καὶ οὐ κατὰ τὴν γεννητικὴν αἰτίαν. ἆρ' οὖν τὸ σημεῖον μόνον ἀμερές, ἢ καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου ἐν χρόνῳ, καὶ ἡ μονὰς ἐν τοῖς ἀριθμοῖς. ἢ τῷ μὲν φιλοσόφῳ περὶ πάντων ποιουμένῳ τῶν ὄντων λόγους, πάντα μὲν τὰ ὁπωσοῦν μεριστὰ προσήκει θεωρεῖν, πάσας δὲ τὰς τῶν μερῶν ὑποστάσεις τὰς τούτων ἀρχικάς, τῷ δὲ τῶν καθ' ἕκαστα ἐπιστήμονι ἀπό τινων ὡρισμένων ἀρχῶν προάγοντι τὴν θεωρίαν, καὶ μέχρις ἐκείνων ἀναβαίνοντι, τὰς δὲ πρὸ αὐτῶν τῶν ὄντων, οὐ περιεργαζομένῳ, ταύτην μόνην ἐπιβάλλειν καὶ σκοπεῖν παραδιδόναι τὴν ἀμερῆ φύσιν. ἢ ταῖς αὐτοῦ διαφερούσαις πρωτίσταις ἀρχαῖς, καὶ ταύτην ὁρᾶν τὴν ἁπλότητα τῶν ὑποκειμένων αὐτῷ γνωστῶν ἡγουμένην. μόνον οὖν τὸ σημεῖον ἀμερὲς κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ὕλην, καὶ ἡ μονὰς κατὰ τὴν ἀριθμητικήν, καὶ ὁ τοῦ σημείου λόγος, εἰ καὶ πρὸς ἄλλα ἀτελής, ἀλλὰ πρός γε τὴν προκειμένην ἐπιστήμην τέλεος. ἐπεὶ καὶ ὁ ἰατρὸς στοιχεῖα τῶν σωμάτων πῦρ καὶ ὕδωρ λέγει, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, καὶ ἀνάλυσις αὐτῶν μέχρι τούτων. ἀλλ' ὅ γε φυσικὸς ἐπ' ἄλλα μέτεισι τὰ τούτων ἁπλούστερα. καὶ ὁ μὲν, ὁρίζεται στοιχεῖον τὸ πρὸς αἴσθησιν ἁπλοῦν, ὁ δὲ, τὸ πρὸς τὸν λόγον ἁπλοῦν. καὶ ἑκάτερος ὀρθῶς, πρός γε τὴν οἰκείαν ἐπιστήμην. μὴ τοίνυν μηδὲ τὸν ὅρον τοῦ σημείου διαμαρτάνεσθαι νομίζωμεν, μηδὲ ἀτελῆ θώμεθα αὐτὸν εἶναι. πρὸς γὰρ γεωμετρικὴν ὕλην, καὶ τὰς ἀρχὰς τῆς ταύτης, ἱκανῶς ἀποδέδεικται. μόνον γὰρ οὐχὶ λέγει σαφῶς, ὅτι τὸ ἀμερὲς κατ' ἐμὲ σημεῖόν ἐστι. καὶ ἡ ἐμὴ ἀρχή, καὶ τὸ ἁπλούστατον, οὐδὲν ἄλλο ἐστίν, ἢ τοῦτο. καὶ οὕτω προσήκει τοῦ γεωμέτρου λέγοντος, ἀκούειν. ὁ μὲν οὖν Εὐκλείδης διὰ τῆς ἀποφάσεως τῶν μερῶν ἐσήμαινε τὴν ἀρχήν, πάσης τῆς ὑποκειμένης αὐτῷ φύσεως εἰς θεωρίαν.

Περὶ σημείου πῶς γεωμέτρης.

καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λόγοι, προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς, ὡς ὅπερ Παρμενίδης ἡμᾶς ἀναδιδάσκει, τήν τε πρωτίστην αἰτίαν καὶ τὴν ἐσχάτην διὰ μόνων τῶν ἀποφάσεων παραδοὺς. πᾶσα γὰρ ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς καθ' ἑτέραν οὐσίαν ὑφεστηκυῖα καὶ τούτων ἀποφάσεις τὴν ἐκείνων ἡμῖν δηλοῦσιν ἰδιότητα. τὸ γὰρ αἴτιον μὲν τούτων, οὐδὲν δὲ τούτων ὑπάρχον, ὧν αἴτιόν ἐστι, γνώριμόν πως γίγνεται, διὰ τοῦ τρόπου τούτου τῆς διδασκαλίας. ἴσως δ' ἄν τις ἀπορήσειεν, πῶς πάντα μορφωτικῶς καὶ μεριστῶς τῆς φαντασίας δεχομένης, ἀμερὲς τὸ σημεῖον ὁ γεωμέτρης ἐν αὐτῇ θεωρεῖ. μὴ γὰρ ὅτι τοὺς ἐν διανοίᾳ λόγους, ἀλλὰ καὶ τῶν νοερῶν, καὶ θείων εἰδῶν ἐμφάσεις ἡ φαντασία κατὰ τὴν οἰκείαν δέχεται φύσιν, τῶν μὲν ἀμόρφων, μορφάς, τῶν δὲ ἀσχηματίστων, σχήματα προτείνουσα. πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπορίαν λέγωμεν, ὅτι τῆς φανταστικῆς κινήσεως τὸ εἶδος, οὔτε μεριστόν ἐστι μόνον οὔτε ἀμέριστον, ἀλλ' ἐκ τοῦ ἀμερίστου πρόεισιν εἰς τὸ μεριστόν, καὶ ἐκ τοῦ ἀμόρφου εἰς τὸ μορφούμενον. εἴτε γὰρ μεριστὴ μόνον ἦν, οὐκ ἂν τοὺς πολλοὺς τύπους τῶν εἰδῶν, ἐν ἑαυτῇ σώζειν ἠδύνατο τῶν ἐπεισιόντων ἀμυδρούντων τοὺς πρὸ αὐτῶν. καθ' ὅτι τῶν σωμάτων οὐδὲν ἅμα καὶ κατὰ τὸ αὐτό, πολλοῖς κατέχεται σχήμασιν, ἀλλὰ διὰ τῶν δευτέρων ἀφανίζεται τὰ πρότερα. εἴτε ἀμέριστος τῆς διανοίας, οὐκ ἂν ἦν καταδεεστέρα, καὶ τῆς ἐν ἀμερεῖ πάντα θεωρούσης ψυχῆς, οὐδ' ἂν μορφωτικὰς ἐποιεῖτο τὰς ἐνεργείας. ἀνάγκη δὴ οὖν αὐτὴν ἄρχεσθαι μὲν ἐκ τοῦ ἀμεροῦς κατὰ τὴν κίνησιν, καὶ προβάλλειν ἐκεῖθεν τὸ συνεσπειραμένον εἶδος ἑκάστου τῶν εἰς αὐτὴν ἡκόντων γνωστῶν, ἀπολύειν δὲ εἰς μορφὴν καὶ σχῆμα καὶ διάστασιν. εἰ τοίνυν τοιαύτην ἔλαχεν φύσιν, ἔστι πως ἐν αὐτῇ καὶ τὸ ἀμέριστον, καὶ κατ' ἐκεῖνο τὴν οὐσίαν ἔχειν μάλιστα τὸ σημεῖον λεκτέον. καὶ γὰρ τὸ τῆς γραμμῆς εἶδος, κατ' ἐκεῖνο συνεσπειραμένον ἐστὶν ἐν αὐτῇ. διττὴν οὖν συνέχουσα δύναμιν ἀμέριστον καὶ μεριστήν, ἔχει καὶ τὸ σημεῖον ἀμερῶς, καὶ τὰ διαστήματα μεριστῶς. ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ πυθαγόρειοι τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, σκεπτέον, τί ποτε νοοῦντες λέγουσιν. ὅτι μὲν οὖν ἀριθμοὶ τῶν μεγεθῶν ἀϋλότεροι καὶ καθαρώτεροι, καὶ ὅτι τῶν ἀριθμῶν ἡ ἀρχή, τῆς τῶν μεγεθῶν ἐστὶν ἁπλουστέρα, παντὶ καταφανές. ἀλλ' ὅτε λέγουσι, τὴν μὲν μονάδα θέσιν ἔχουσαν σημεῖον εἶναι, ἐνδείκνυσθαί μοι δοκοῦσιν, ὡς ἄρα ἡ μὲν μονὰς καὶ ὁ ἀριθμός, ἐν δόξῃ τὴν ὑπόστασιν κέκτηται. λέγω δὲ τὸν μοναδικὸν ἀριθμόν, διὸ καὶ τῶν ἀριθμῶν ἕκαστος εἷς ἐστιν, οἷον ὁ πέντε, καὶ ὁ ἑπτὰ καὶ οἱ πολλοί, καθ' ἑκάστην ψυχήν, καὶ σχήματος, καὶ μορφῆς ἐπεισοδιώδους καθαρεύουσι, τὸ δὲ σημεῖον ἐν

φαντασίας

φαντασίᾳ προτείνεται, καὶ οἷον ἐν τόπῳ γέγονε, καὶ ἔνυλόν ἐστι κατὰ τὴν νοητὴν ὕλην. ἄθετος οὖν ἡ μονὰς, ὡς ἄϋλος καὶ παντὸς ἔξω διαστήματος καὶ τόπου. θέσιν δὲ ἔχει τὸ σημεῖον, ὡς ἐν τοῖς φαντασίας κόλποις ἰνδαλλόμενον, καὶ ἔνυλον. διὰ δὲ τὴν κοινωνίαν τῶν ἀρχῶν, καὶ ἡ μονὰς, στιγμῆς ἁπλουστέρα. κατὰ γὰρ τὴν θέσιν, ἐπλεόνασεν ἡ στιγμὴ τῆς μονάδος, αἱ δὲ προσθέσεις ἐν τοῖς ἀσωμάτοις ὑφέσεις ἀποτελοῦσι, τῶν τὰς προσθέσεις δεχομένων.

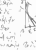
Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.) Δευτέραν ἔχει τάξιν ἡ γραμμὴ, καθόσον τὸ πρῶτόν ἐστι διάστημα καὶ ἁπλούστατον, ὅπερ ὁ γεωμέτρης μῆκος ἐκάλεσε προσθεὶς τὸ ἀπλατές. ἐπειδὴ καὶ ἡ γραμμὴ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν, ἀρχῆς ἔχει λόγον. τὸ μὲν γὰρ σημεῖον, ὡς πάντων ἀρχὴν τῶν μεγεθῶν, διὰ μόνης τῆς ἀποφάσεως ἐδίδαξε. τὴν δὲ γραμμὴν, τῇ μὲν, καταφατικῶς, τῇ δὲ ἀποφατικῶς. ἔστιν μὲν γὰρ μῆκος, καὶ τούτῳ τῆς τοῦ σημείου πλεονάζει ἀμερείας. ἀπλατὴς δὲ, ὡς τῶν ἄλλων καθαρεύουσα διαστάσεων. πᾶν γὰρ δὴ τὸ ἀπλατὲς, καὶ ἀβαθές ἐστιν, οὐ μὴν ἀνάπαλιν. ἀφελὼν οὖν τὸ πλάτος, ἔχει καὶ τὸ βάθος συναναιρημένον. διόπερ οὐδὲ προσέθηκεν ὅτι καὶ ἀβαθὲς, ὡς ἑπόμενον τῇ τοῦ ἀπλατοῦς ἐννοίᾳ. ἀφορίζονται δὲ αὐτὴν καὶ κατ' ἄλλας μεθόδους. οἱ μὲν, ῥύσιν σημείου λέγοντες, οἱ δὲ, μέγεθος ἐφ' ἓν διαστατόν. ἀλλ' οὗτος μὲν ὁ ὅρος τέλειός ἐστι, τὴν οὐσίαν σημαίνων τῆς γραμμῆς. ὁ δὲ σημείου ῥύσιν εἰπὼν, ἔοικεν ἀπὸ τῆς αἰτίας αὐτὴν τῆς γεννητικῆς δηλοῦν, καὶ οὐ πᾶσαν γραμμὴν, ἀλλὰ τὴν ἄϋλον παρίστησι. ταύτην γὰρ ὑφίστησι τὸ σημεῖον ἀμερὲς ὑπάρχον. ὑπάρξεως δὲ τοῖς μεριστοῖς αἴτιον ὄν. ἡ δὲ ῥύσις, τὴν πρόοδον ἐνδείκνυται, καὶ τὴν γόνιμον δύναμιν, τὴν ἐπὶ πᾶσαν διάστασιν φθάνουσαν, καὶ οὐκ ἐλαττουμένην, καὶ αὐτὴν μὲν ἑστῶσαν, πᾶσι δὲ τοῖς μεριστοῖς τὴν οὐσίαν παρεχομένην. ἀλλὰ ταῦτα μὲν γνώριμα πᾶσιν. ἀναμνήσωμεν δὲ ἡμᾶς αὐτοὺς, τῶν πυθαγορικωτέρων λόγων, οἳ τὸ μὲν σημεῖον ἀνάλογον τιθέντες μονάδι, τὴν δὲ γραμμὴν δυάδι, τὴν ἐπιφάνειαν τριάδι, τὸ δὲ στερεὸν, τετράδι. ὅθεν καὶ ὁ Ἀριστοτέλης, τὸ σῶμα τῇ τριάδι φησὶ τετελειῶσθαι. καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν, τὸ μὲν σημεῖον, διὰ τὴν ἀμέρειαν πρώτως οἰκειοῦσθαι τῇ μονάδι, τὰ δὲ μετὰ τὸ σημεῖον, ὑφεστάναι μὲν κατὰ τοὺς ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὺς, καὶ τοῦτον σώζειν τὸν λόγον πρὸς τὸ σημεῖον, οἷον ἐκεῖνοι πρὸς τὴν μονάδα. μετέχον δὲ ἕκαστον τοῦ προσεχοῦς ὑπὲρ αὐτοῦ καὶ ταύτην ἔχειν τὴν ἀξίαν πρὸς τὸ ἐγγὺς καὶ τὸ ἐφεξῆς, ἣν ἐκεῖνο πρὸς ἑαυτό. λέγω δὲ οἷον τὴν γραμμὴν δυάδος πρὸς τὸ στερεόν. καὶ διὰ τοῦτο τὸ σῶμα, πρὸς μὲν τὸ σημεῖον ἐστὶ τετραδικὸν, πρὸς δὲ τὴν γραμμὴν, τριαδικόν. ἔχει μὲν οὖν ἡ διάταξις ἑκατέρα λόγον, ἀρχοειδεστέρα δὲ, ἡ τῶν πυθαγορείων, ἄνωθεν ὁρμωμένη, καὶ τῇ φύσει τῶν ὄντων ἑπομένη. τὸ μὲν γὰρ σημεῖον, δηλόν. ἢ γὰρ καθ' αὑτό ἐστιν, ἢ ἐν γραμμῇ. καὶ ὡς πέρας ὂν μόνον καὶ ἕν, οὔτε ὅλον, οὔτε μέρη ἔχον μιμεῖται τὴν ἀκρότητα τῶν ὄντων φύσιν, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἀνάλογον τέτακται τῇ μονάδι. καὶ γὰρ ἡ μονὰς, ἐκεῖ πρῶτον, ὅπου πατρικὴ μονάς ἐστι φησὶ τὸ λόγιον. ἡ δὲ γραμμὴ, πρώτη μὲν ἔχουσα μέρη καὶ ὅλον, οὐδὲ καὶ μοναδικὴ, διὰ τὸ ἐφ' ἓν διαστατὸν, καὶ δυαδικὴ διὰ τὴν πρόοδον. εἴτε γὰρ ἄπειρος, μετέχει τῆς ἀορίστου δυάδος. εἴτε πεπερασμένη, δυοῖν αὐτῇ δεῖ περάτων, καὶ τὸ πόθεν καὶ τὸ ποῖ πρὸς τὸν ἀπ' αὐτῆς. διὰ ταῦτα τοίνυν, τὴν ὁλότητα μιμεῖται, καὶ τὴν τάξιν ἐκείνην * ἡ μονάς ἐστι, καὶ δύο γεννᾷ. καὶ γὰρ αὕτη τήν τε εἰς μῆκος ἔκτασιν * προβέβληται, καὶ τὸ ταύτῃ μὲν διαστατοῦ, καὶ τὸ ὑφ' ἕν, καὶ τὴν τῆς δυάδος μετουσίαν. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τριὰς οὖσα καὶ δυὰς, καὶ τῶν πρώτων σχημάτων ὑποδοχὴ, καὶ μορφὴν, καὶ εἶδος λαβοῦσα πρώτη, τῇ τριάδι ὡς τὰ ὄντα πρώτως καὶ τριαδικῇ φύσει, διαιρέσει δι' αὐτῆς, δυαδικῶς προσέοικεν. τὸ δ' αὖ στερεὸν τριχῇ διαστὰν, καὶ κατὰ τὴν τετράδα, τὴν τῶν λόγων πάντων περιληπτικὴν ἀφορισθὲν, εἰς ἐκείνην ἀναφέρεται τὴν διακόσμησιν ὑφ' ἧς, καὶ ἡ τῶν σωματικῶν κόσμων, ἐκφαίνεται διάκρισις. καὶ ἡ εἰς τὰ τρία τῶν ὅλων διαίρεσις, μετὰ τῆς τετραδικῆς ἰδιότητος, ὥσπερ δ' ἐστὶ μετὰ γεννητικῆς καὶ θηλυπρεποῦς. ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ πλέον ἐξεργάζεσθαι δυνατόν. τὴν δ' αὖ γραμμὴν δευτέραν οὖσαν, καὶ κατὰ τὴν πρώτην ἀπὸ τοῦ ἀμεροῦς κίνησιν ὑποστάσεως, εἰκότως καὶ ὁ τῶν πυθαγορείων λόγος ἐκάλει δυαδικήν. ὅτι δὲ καὶ τὸ σημεῖον μετὰ τὴν μονάδα, καὶ ἡ γραμμὴ κατὰ τὴν δυάδα, καὶ ἡ ἐπιφάνεια μετὰ τὴν τριάδα, δηλοῖ καὶ ὁ Παρμενίδης, τοῦ ἑνὸς ἀποφάσκων τὰ πολλὰ πρῶτος, εἶτα τὸ ὅλον. εἰ δὲ τὰ πολλὰ πρὸ τοῦ ὅλου, καὶ ὁ ἀριθμὸς πρὸ τοῦ συνεχοῦς, καὶ ἡ δυὰς πρὸ τῆς γραμμῆς, καὶ ἡ μονὰς

* πρὸ τοῦ σημείου. καὶ γὰρ τὸ μὲν οὐ πολλὰ τῇ μονάδι προσήκει, τῇ γνώσει τὸ πλῆθος ὑφαιροῦντι. καὶ γὰρ τοῦ μέρους ἔχειν λέγεται. τοσαῦτα περὶ τῆς γραμμῆς εἰρήσθω, ἐπὶ τὰς θεωρητικωτέρας ἐπιβολάς. ἀποδεξώμεθα δὲ καὶ τοὺς περὶ Ἀπολλώνιον λέγοντας, ὅτι γραμμῆς μὲν ἔννοιαν ἔχομεν, ὅτε τὰ μήκη μόνον, ἢ τῶν ὁδῶν, ἢ τῶν τοίχων ἀναμετρεῖν κελεύομεν. οὐ γὰρ προσποιούμεθα τότε τὸ πλάτος καὶ βάθος, ἀλλὰ τὴν ἐφ' ἓν διάστασιν ἀναλογιζόμεθα. καθάπερ δὴ καὶ ὅτε χωρία μετροῦμεν, τὴν ἐπιφάνειαν ὁρῶμεν, ὅτε δὲ φρέατα, τὸ στερεόν. πάσας γὰρ τὰς διαστάσεις ὁμοῦ συλλαβόντες, ἀποφαινόμεθα τοσόνδε εἶναι τὸ διάστημα τοῦ φρέατος, κατά τε μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος. αἴσθησιν δὲ αὐτῆς λάβοιμεν ἂν ἀπιδόντες εἰς τοὺς διορισμοὺς τῶν πεφωτισμένων τόπων, ἀπὸ τῶν ἐσκιασμένων, καὶ ἐπὶ τῆς σελήνης, καὶ ἐπὶ τῆς γῆς. τοῦτο γὰρ τὸ μέσον, κατὰ μὲν πλάτος, ἀδιάστατόν ἐστι, μῆκος δὲ ἔχει τὸ συμπαρατεινόμενον τῷ φωτὶ καὶ τῇ σκιᾷ.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.) Πᾶν τὸ σύνθετον ἀπὸ τοῦ ἁπλοῦ, καὶ πᾶν τὸ μεριστὸν ἀπὸ τοῦ ἀμερίστου καταδέχεται τὸν ὅρον. καὶ τούτων εἰκόνες ἐν ταῖς ἀρχαῖς προτείνονται τῶν μαθημάτων. ὅταν γὰρ καὶ τὴν γραμμὴν ὑπὸ τῶν σημείων περατοῦσθαι λέγῃ, δῆλός ἐστιν αὐτὴν καθ' αὑτὴν ἄπειρον ποιῶν, ὡς ἂν διὰ τὴν οἰκείαν πρόοδον οὐκ ἔχουσαν πέρας. ὥσπερ οὖν ἡ δυὰς ἀπὸ τῆς μονάδος ὁρίζεται, καὶ τὴν ἀρχὴν ἑαυτῆς τελείαν πέρατι, κρατουμένη ὑπ' ἐκείνης, οὕτω καὶ ἡ γραμμὴ παρ' ἐκείνης τοῖς σημείοις ὁρίζεται. δυοειδὴς γὰρ οὖσα καὶ τοῦ σημείου μονάδος ἔχοντος λόγον, μετέχει δυαδικῶς. ἀλλ' ἐν μὲν ταῖς φαντασίαις, καὶ ταῖς αἰσθηταῖς αὐτὰ τὰ σημεῖα τὰ ἐν τῇ γραμμῇ, περατοῖ τὴν γραμμήν, ἐν δὲ τοῖς ἀΰλοις εἴδεσι, προϋφέστηκεν ὁ ἀμέριστος τοῦ σημείου λόγος, πρόεισι δὲ ἐκεῖθεν αὐτὸς ὁ πρώτιστος, ἑαυτὸν διαστήσας καὶ κινούμενος. καὶ ῥέων ἐπ' ἄπειρον, καὶ τὴν ἀόριστον δυάδα μιμούμενος, κρατεῖται μὲν ὑπὸ τῆς ἰδίας ἀρχῆς, ἑνίζεται δὲ ὑπ' αὐτῆς, καὶ περιλαμβάνεται πανταχόθεν. ἄπειρος οὖν ἅμα καὶ πεπερασμένος ἐστί. κατὰ μὲν τὴν ἑαυτοῦ πρόοδον ἄπειρος, κατὰ δὲ τὴν τῆς αἰτίας τῆς περατοειδοῦς μέθεξιν πεπερασμένος. ἑαυτῷ γὰρ προελθὼν τῇ ἐκείνης περιοχῇ κεκράτηται, καὶ ὁρίζεται, κατὰ τὴν ἐκείνης ἕνωσιν. ὅθεν δὴ καὶ ἐν τοῖς εἴδεσι τὰ σημεῖα, τὸ πέρας, καὶ τὴν ἀρχὴν καταλαμβάνοντα τῆς γραμμῆς ὁρίζειν αὐτὴν λέγεται. ἐκεῖ μὲν οὖν ἐστι τὸ πέρας ἐξῃρημένον τοῦ περατουμένου, ἐνταῦθα δὲ δῆλον ἐν αὐτῷ γὰρ ὑφέστηκεν τοῦ περατουμένου καὶ τοῦτο φέροι ἂν ἔνδειξιν θαυμαστήν. τοῦ τὰ εἴδη μένοντα μὲν ἐφ' ἑαυτῶν, κατ' αἰτίαν προηγεῖσθαι τῶν μετεχόντων, ἐπιδόντα δὲ ἐκείνοις ἑαυτὰ κατὰ τὴν ἐκείνων ἰδιότητα τὴν ὑπόστασιν λαμβάνειν, συμπληθυνόμενα αὐτοῖς, καὶ συμμεριζόμενα, καὶ ἀπολαύοντα τῆς τῶν ὑποκειμένων διαιρέσεως. καὶ μὴν καὶ τοῦτο δεῖ προειληφέναι περὶ τῆς γραμμῆς, ὅτι τριχῶς αὐτῇ χρῆται ὁ γεωμέτρης. καὶ γὰρ ὡς ἐφ' ἑκάτερα πεπερασμένῃ, ὡς τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον, ἰσόπλευρον συστήσασθαι, καὶ ὡς τῇ μὲν ἀπείρῳ, τῇ δὲ πεπερασμένῃ. ὡς ἐπ' ἐκείνου τοῦ προβλήματος ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθεί-
* αις τρίγωνον συστήσασθαι. καὶ ὡς τῇ μὲν ἀπείρῳ, ἐν γὰρ τῇ κατασκευῇ φησιν. ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἐπὶ θάτερα μὲν πεπερασμένη, ἐπὶ θάτερα δὲ ἄπειρος. τριχῶς οὖν ἡ γραμμὴ λαμβάνεται παρ' αὐτῷ. πρὸς δὴ τούτοις, κἀκεῖνο ἐπιστάσεως ἄξιον ὂν μὴ παραδεδώκεν, πῶς γὰρ εἴρηται γραμμῆς πέρατα σημεῖα, καὶ ποίας γραμμῆς. οὔτε γὰρ τῆς ἀπείρου, οὔτε πάσης τῆς πεπερασμένης. ἔστι γάρ τις γραμμή, καὶ πεπερασμένη, καὶ οὐκ ἔχουσα πέρατος σημεῖα. τοιαύτη γὰρ ἡ κυκλική, αὐτὴ εἰς ἑαυτὴν συννεύουσα, καὶ οὐ σημείοις χρωμένη πέρασιν, ὡς ἡ εὐθεῖα. τοιαύτη ἡ τοῦ θυρεοῦ. μήποτε οὖν τὴν γραμμὴν ὅρον δεῖν, καθόσον ἐστὶ γραμμή, λάβοιμεν ἂν περιφέρειαν τινὰ περατουμένην ὑπὸ σημείων, καὶ μέρος τὸ τοῦ θυρεοῦ γραμμῆς ὡσαύτως ἔχον πέρατα σημεῖα. πᾶσα δὲ ἡ τοῦ κύκλου, καὶ ἡ τοῦ θυρεοῦ, καὶ ἄλλον ἰδιότητα προσείληφεν, καθ' ἣν οὐ μόνον γραμμή ἐστιν, ἀλλὰ καὶ σχήματος ἀποτελεστική. αἱ μὲν οὖν γραμμαὶ ἄμφω πέρατα ἔχουσι σημεῖα αἱ δὲ σχημάτων ποιητικαί, τούτων δὴ συννεύουσι πρὸς αὑτάς. εἰ δὲ καὶ γραφομένας αὐτὰς νοήσαις, εὕροις ἂν ὅπῃ περατοῦνται ὑπὸ σημείων, γεγραμμένας δὲ λαβών, καὶ τέλος ἀρχῇ συνάψας, οὐκέτι θεωρῆσαι δύνασαι τὰ πέρατα αὐτῶν.

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.)

Ὁ δὲ Πλάτων τῆς γραμμῆς δύο τὰ ἁπλούστατα, καὶ ἀρχοειδέστατα θέμενος εἴδη, τήν τε εὐθεῖαν, καὶ τὴν περιφερῆ, τὰ ἄλλα πάντα κατὰ μίξιν ἐκ τούτων ὑφίστησιν, ὅσα τε ἑλικοειδῆ λέγεται, τῶν μὲν ἐπιπέδων, τῶν δὲ περὶ τὰ στερεὰ τὴν ὑπόστασιν λαχόντων, καὶ ὅσα κατὰ τὰς τομὰς τῶν στερεῶν ὑφίσταται εἴδη καμπύλων γραμμῶν. καὶ ἔοικε τὸ μὲν σημεῖον εἰκόνα φέρειν εἰ θεμὶς εἰπεῖν, τοῦ ἑνὸς κατὰ τὸν Πλάτωνα, καὶ γὰρ τοῦτο ἀμερὲς ὂν δύναμιν ἔχει, ὥσπερ κἀκεῖνος δύναμιν ἐν πέρασιν. ἐπεὶ δὲ μετὰ τὸ ἓν τρεῖς εἰσιν ὑποστάσεις, τὸ πέρας, τὸ ἄπειρον, τὸ μικτόν, διὰ τούτων ὑφίσταται, τά τε τῶν γραμμῶν εἴδη, καὶ τὰ τῶν γωνιῶν, καὶ τὰ τῶν σχημάτων. καὶ τῷ μὲν πέρατι, ἀνάλογον ἡ περιφερής, καὶ ἡ περιφερόγραμμος γωνία, καὶ ὁ κύκλος ἐν ἐπιπέδοις, καὶ ἡ σφαῖρα ἐν στερεοῖς, τῇ δὲ ἀπειρίᾳ ἡ εὐθεῖα κατὰ πάντα ταῦτα. διήκει γὰρ διὰ πάντων οἰκείως, ἑκασταχοῦ φανταζόμενον, τὸ δὲ μικτὸν τὸ ἐν πᾶσι τούτοις τῷ ἐκεῖ μικτῷ. καὶ γὰρ γραμμαὶ μικταί εἰσι ὡς αἱ ἑλικαί, καὶ γωνίαι, ὡς ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, καὶ ἡ κερατοειδής, καὶ σχήματα ἐπίπεδα μὲν τὰ τμήματα, καὶ αἱ ἀψῖδες, στερεὰ δὲ κῶνοι, καὶ κύλινδροι, καὶ τὰ τοιαῦτα. τὸ ἄρα πέρας, καὶ ἄπειρον, καὶ μικτόν ἐστιν ἐν τούτοις ἅπασι. καὶ μέντοι καὶ ὁ Ἀριστοτέλης, τὴν αὐτὴν ἔχει τῷ Πλάτωνι διάνοιαν. πᾶν γὰρ εἶδος γραμμῆς εὐθύ φησιν εἶναι, ἢ περιφερές, ἢ μικτὸν ἐκ τούτων. διὸ καὶ κινήσεις τρεῖς, ἡ μὲν, ἐπ' εὐθείας, ἡ δὲ, κύκλῳ, ἡ δὲ μικτή. διαμφισβητοῦσι δέ τινες πρὸς τὴν διαίρεσιν ταύτην, καί φασι μὴ δύο μόνας εἶναι τὰς ἁπλᾶς γραμμάς, ἀλλὰ καὶ τρίτην ἄλλην, τὴν περὶ τὸν κύλινδρον ἕλικα γραφομένην, ὅταν εὐθείας κινουμένης περὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, σημεῖον ὁμοταχῶς ἐπ' αὐτῆς κινῆται. γίγνεται γὰρ ἕλιξ, ἧς ὁμοιομερῶς πάντα τὰ μέρη πᾶσιν ἐφαρμόζει, καθάπερ Ἀπολλώνιος ἐν τῷ περὶ τοῦ κοχλίου γράμματι δείκνυσι. καὶ τοῦτο τὸ πάθος μόνη πέπονθεν ἑλίκων αὕτη. καὶ γὰρ τῆς ἐπιπέδου τὰ μόρια, ἀνόμοια ἀλλήλοις, καὶ τῆς περὶ τὸν κῶνον γραφομένης, καὶ τῆς περὶ τὴν σφαῖραν, μόνη δὲ ὁμοιομερής, ἡ κυλινδρική, καθάπερ δὴ καὶ ἡ εὐθεῖα, καὶ ἡ περιφερὴς γραμμή. μή ποτε οὖν τρεῖς εἰσιν αἱ ἁπλαῖ γραμμαί, καὶ οὐ δύο μόνον. πρὸς δὲ ταύτην τὴν ἀπορίαν ἀπαντησόμεθα λέγοντες, ὁμοιομερῆ μὲν εἶναι τὴν ἕλικα ταύτην, ὡς καὶ Ἀπολλώνιος δέδειχεν, ἁπλῆν δὲ οὐδαμῶς. οὐ γὰρ ταὐτόν εἶναι τὸ ὁμοιομερές, καὶ τὸ ἁπλοῦν. ἐπεὶ καὶ τῶν φυσικῶν συνθέτων, ὁμοιομερῆ μὲν, ὁ χρυσὸς καὶ ὁ ἄργυρος, ἁπλᾶ δὲ οὐκέτι ταῦτα. δηλοῖ δὲ τῆς κυλινδρικῆς ἕλικος τὴν μίξιν, τὴν ἐκ τῶν ἁπλῶν, καὶ αὐτὴ ἡ γένεσις. γεννᾶται γὰρ τῆς μὲν εὐθείας κύκλῳ κινουμένης περὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, τοῦ δὲ σημείου φερομένου ἐπὶ τῆς εὐθείας. δύο τοίνυν κινήσεις αἱ ἁπλαῖ, τὴν ὑπόστασιν αὐτῇ παρέχουσιν. ὥστε τῶν μικτῶν ἐστι γραμμῶν, καὶ οὐ τῶν ἁπλῶν. τὸ γὰρ ἐξ ἀνομοίων ὑποστάν, οὐχ ἁπλοῦν ἐστιν, ἀλλὰ μικτόν. καὶ ὀρθῶς ὁ Γεμῖνος, ἐκ πλειόνων μὲν κινήσεων, καὶ τῶν ἁπλῶν τινὰ γραμμὴν ὑφίστασθαι δίδωσιν, οὐ μέντοι πᾶσαν εἶναι τὴν τοιαύτην μικτήν, ἀλλὰ τὴν ἐξ ἀνομοίων. καὶ γὰρ εἰ τετράγωνον νοήσειας, καὶ δύο κινήσεις, τὴν μὲν, κατὰ τὸ μῆκος, τὴν δὲ, κατὰ τὸ πλάτος γιγνομένην ἰσοταχῶς, ἀποστήσεται, ἡ διαγώνιος εὐθεῖα οὖσα, καὶ οὐ διὰ τοῦτο ἡ εὐθεῖα μικτή. οὐ γὰρ προηγεῖταί τις αὐτῆς ἑτέρα γραμμή, κατὰ ἁπλῆν ὑφισταμένην κίνησιν ὡς τῆς κυλινδρικῆς ἐλέγομεν ἕλικος. ἀλλ' οὐδὲ εἴ τις ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ νοήσειεν ὑποβιβαζομένην εὐθεῖαν, καὶ τῇ διχοτομίᾳ κύκλον γράφουσαν, διὰ τοῦτο ἡ κυκλικὴ γραμμὴ κατὰ μίξιν ὑφέστηκεν. τῆς γὰρ οὕτω κινουμένης τὰ μὲν πέρατα ὁμαλῶς κινούμενα, εὐθὺ γράφει, ἡ δὲ διχοτομία φερομένη κύκλον γράφει, τὰ δὲ ἄλλα σημεῖα, γράφει τὴν ἔλλειψιν, ὥστε τῇ ἀνωμαλίᾳ τῆς κατὰ τὴν διχοτομίαν φορᾶς ἐπηκολούθησεν ἡ γένεσις τῆς κυκλικῆς γραμμῆς, παρὰ τὸ δεδόσθαι ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ, τὴν καταβιβαζομένην εὐθεῖαν, ἀλλὰ μὴ κατὰ φύσιν κινεῖσθαι. ταῦτα μὲν οὖν περὶ τούτων. δόξειε δ' ἂν ἀμφοτέρων οὐσῶν ἁπλῶν τῶν γραμμῶν, τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφεροῦς, ἁπλουστέρα μᾶλλον ἡ εὐθεῖα εἶναι. ἐν ταύτῃ μὲν γὰρ, οὐδὲ κατ' ἐπίνοιάν ἐστιν ἀνομοιότης, ἐπὶ δὲ τῆς περιφεροῦς, καὶ τὸ κοῖλον, καὶ τὸ κυρτόν, ἑτεροίωσιν ἐμφαίνει. καὶ ἡ μὲν εὐθεῖα τὴν περιφέρειαν οὐ συνάγει κατὰ τὴν ἐπίνοιαν, ἡ δὲ περιφέρεια τὴν εὐθεῖαν εἰ καὶ μὴ κατὰ τὴν γένεσιν, ἀλλὰ κατὰ τὴν πρὸς τὸ κέντρον χύσιν. τί οὖν εἰ λέγοι τις καὶ τὴν περιφέρειαν δεῖσθαι τῆς εὐθείας εἰς τὴν ὑπόστασιν. εἰ γὰρ εὐθείας πεπερασμένης, θατέρου μὲν τῶν περάτων μένοι, θατέρου δὲ κινοῖτο, γράψει κύκλον, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ μένον τῆς



εὐθείας πέρας ἢ τὸ γράφον τὸν κύκλον, σημεῖόν ἐστι περὶ τὸ μένον φερόμενον, οὐχ ἡ εὐθεῖα. τὴν γὰρ ἀπόστασιν αὕτη μόνον ἀφορίζει, τὴν δὲ κυκλικὴν γραμμὴν τὸ σημεῖον ὑφίστησι κινούμενον κυκλικῶς. τούτων μὲν οὖν ἅλις. ἔοικεν δὲ, ἡ μὲν περιφερὴς, πρὸς τὸ πέρας εἶναι, καὶ τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον πρὸς τὰς ἄλλας γραμμὰς, ὃν πρὸς πάντα τὰ ὄντα τὸ πέρας. καὶ γὰρ ὥρισται, καὶ σχῆμα ἀποτελεῖ μόνη τῶν ἁπλῶν. ἡ δὲ εὐθεῖα, πρὸς τὴν ἀπειρίαν. ἐπ᾽ ἄπειρον οὖν ἐκβαλλομένη οὐ δὲ παύεται, καὶ ὡς ἐκ πέρατος καὶ ἀπείρου τὰ ἄλλα πάντα, οὕτως ἐκ τοῦ περιφεροῦς, καὶ τοῦ εὐθέος, πᾶν τὸ μικτὸν τῶν γραμμῶν γένος, τῶν τε ἐπιπέδων, καὶ τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς. καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν καὶ ἡ ψυχὴ, τό, τε εὐθὺ καὶ τὸ περιφερὲς κατ᾽ οὐσίαν ἐν αὐτῇ προείληφεν, ἵνα πᾶσαν τὴν ἐν τῷ κόσμῳ τοῦ ἀπείρου συστοιχίαν, καὶ πᾶσαν τὴν πέρατος κατευθύνῃ φύσιν. τῷ μὲν εὐθεῖ, τὴν πρόοδον αὐτῶν ὑφιστᾶσα, τῷ δὲ περιφερεῖ, τὴν ἐπιστροφὴν. καὶ τῷ μὲν εἰς πλῆθος αὐτὰ προάγουσα, τῷ δὲ εἰς ἕν, πάντα συνάγουσα. καὶ οὐχ ἡ ψυχὴ μόνον ἀλλὰ καὶ ὁ τὴν ψυχὴν ὑποστήσας, καὶ ταύτας αὐτῇ τὰς δυνάμεις παραδοὺς, ἀμφοτέρας ἔχει τὰς πρωτουργοὺς αἰτίας ἐν ἑαυτῷ, τῶν γὰρ ὄντων ἁπάντων, ἀρχὴν καὶ μέσα καὶ τέλη προειληφὼς, εὐθείας περαίνει κατὰ φύσιν περιπορευόμενος φησὶν ὁ Πλάτων. καὶ γὰρ ἐπὶ πάντα πρόεισι, ταῖς ἐνεργείαις, καὶ πρὸς ἑαυτὸν ἐπέστραπται μὲν ἐν τῷ ἑαυτοῦ κατὰ τρόπον ἤθει φησὶν ὁ Τίμαιος. σύμβολον δὲ, ἡ μὲν εὐθεῖα, τῆς ἀπαρεγκλίτου προνοίας, καὶ ἀδιαστρόφου, καὶ ἀχράντου, καὶ ἀνεκλείπτου, καὶ παντοδυνάμου, καὶ πᾶσι παρούσης, ἡ δὲ περιφέρεια, καὶ τὸ περιπορεύεσθαι, τῆς εἰς ἑαυτὴν συνελισσομένης, καὶ καθ᾽ ἓν νοερὸν πέρας τῶν ὅλων ἐπικρατούσης. δύο δὴ ταύτας ὁ δημιουργικὸς ἐν ἑαυτῷ προστησάμενος ἀρχὰς, τὸ εὐθὺ, καὶ τὸ περιφερὲς, δύο μονάδας παρήγαγεν ἀφ᾽ ἑαυτοῦ τὴν μὲν, κατὰ τὸ περιφερὲς ἐνεργοῦσαν, καὶ τῶν νοερῶν οὐσιῶν τελεσιουργόν, τὴν δὲ κατὰ τὸ εὐθὺ καὶ τοῖς αἰσθητοῖς τὴν γένεσιν παρεχομένην. ἐπειδὴ δὲ ἡ ψυχὴ μέση τῶν νοερῶν ἐστι, καὶ τῶν αἰσθητῶν καθ᾽ ὅσον μὲν συνάπτει τῇ νοερᾷ φύσει, κατὰ κύκλον ἐνεργεῖ, καθόσον δὲ τοῖς αἰσθητοῖς ἐπιστατεῖ κατὰ τὸ εὐθὺ ποιεῖται τὴν πρόνοιαν. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς πρὸς τὰ ὄντα τῶν ὄντων εἰδῶν ὁμοιότητος. τὸν δὲ τῆς εὐθείας ὁρισμὸν, ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν, ὃν καὶ παρεθέμεθα, καὶ δηλοῖ διὰ τούτου, μόνην τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν ἐπ᾽ αὐτῆς σημείων. ὅσον γὰρ ἀπέχει θάτερον τῶν σημείων θατέρου, τοσοῦτόν ἐστι τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν περατουμένης. καὶ τοῦτό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις. εἰ δὲ περὶ τῆς περιφερείας, ἢ καὶ ἄλλης τινὸς γραμμῆς δύο σημεῖα λάβοις, τὸ μεταξὺ τούτων ἀπολαμβανόμενον διάστημα τῆς γραμμῆς, μεῖζόν ἐστι τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. καὶ πᾶσα γραμμὴ τοῦτο πεπονθυῖα φαίνεται, πλὴν τῆς εὐθείας. καὶ οἱ διδόντες τὴν ἀναγκαῖον μόνην πορεύεσθαι κατὰ τὴν εὐθεῖαν φασὶ καὶ οἱ πολλοί, τὸ δὲ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας, πλεῖον τῆς ἀναγκαίας. ὁ δὲ Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ. καὶ γὰρ τοῦτο, τὰ μὲν, ἐπ᾽ εὐθείας ἀλλήλοις κείμενα πάσχειν ἀναγκαῖον, τὰ δὲ, ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἢ ἄλλης διαστάσεως, οὐκ ἀναγκαῖον. ὅθεν δὴ καὶ οἱ ἀστρολογικοί φασι τότε τὸν ἥλιον ἐκλείπειν, ὅταν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γένηται αὐτός τε καὶ ἡ σελήνη, καὶ τὸ ὄμμα τὸ ἡμέτερον. τότε γὰρ ὑπὸ τῆς σελήνης ἐπιπροσθεῖσθαι, μέσης αὐτοῦ τε καὶ ἡμῶν γενομένης. καὶ ἴσως ἐνδεῖξιν ἂν φέροι τὸ πάθος τῆς εὐθείας, τοῦ καὶ ἐν τοῖς οὖσι κατὰ τὰς προόδους τὰς ἀπὸ τῶν αἰτίων, τὰ μέσα διαιρετικὰ γίγνεσθαι, τῆς τῶν ἄκρων ἀποστάσεως, καὶ τῆς πρὸς ἄλληλα αὐτῶν κοινωνίας. ὥσπερ δὴ καὶ τὰς ἐπιστροφὰς συνελίσσει, καὶ τὰ ἀφ᾽ ἑαυτῶν, πρὸς τὰς ἀρχικὰς διιστῶσι αἰτίας. ὁ δ᾽ αὖ Ἀρχιμήδης, τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. διότι γὰρ ὡς ὁ Εὐκλείδειος λόγος φησὶν, ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις, διὰ τοῦτο ἐλαχίστη ἐστὶ, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. εἰ γὰρ εἴη τις ἐλάττων, οὐκ ἐξ ἴσου κείσεται τοῖς πέρασιν ἑαυτῆς. καὶ μὴν καὶ ἄλλοι πάντες ὁρισμοὶ τῆς εὐθείας, εἰς τὰς ἐννοίας ἐμπίπτουσιν. οἷον ὅτι ἐπ᾽ ἄκρων ἐστὶ τεταμένη. καὶ ὅτι μέρος μὲν οὐκ ἔστι αὐτῆς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεωροτέρῳ. καὶ ὅτι πάντα αὐτῆς τὰ μέρη πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει. καὶ ὅτι ἡ τῶν περάτων μενόντων καὶ αὐτὴ μένουσα. καὶ ὅτι ἡ μετὰ τῆς ὁμοειδοῦς μία

μία σχῆμα μὴ ἀποτελοῦσα. πάντα γὰρ ταῦτα τὴν ἰδιότητα σημαίνει τῆς εὐθείας, ἣν ἔχει ὅτι ἁπλῆ ἐστὶν, καὶ μίαν ἔχειν πρόοδον ἐλαχίστην τὴν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ θάτερον πέρας. τοσαῦτα καὶ περὶ τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας γραμμῆς. διαιρεῖ δ' αὐτὴν γραμμὴν ὁ Γεμῖνος, πρῶτον μὲν εἰς τὴν ἀσύνθετον καὶ τὴν σύνθετον. καλεῖ δὲ σύνθετον τὴν κεκλασμένην, καὶ γωνίαν ποιοῦσαν, καὶ τὴν ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένην, σχῆμα λέγων ποιεῖν, κυκλικὴν τὴν τοῦ θυρεοῦ τὴν κιττοειδῆ, μὴ ποιεῖν δὲ τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τομὴν, τὴν τοῦ ἀμβλυγωνίου, τὴν κογχοειδῆ, τὴν εὐθεῖαν, πάσας τὰς τοιαύτας. καὶ πάλιν κατὰ ἄλλον τρόπον, τῆς ἀσυνθέτου γραμμῆς, τὴν μὲν, ἁπλῆν εἶναι, τὴν δὲ, μικτήν. καὶ τῆς ἁπλῆς τὴν μὲν σχῆμα ποιεῖν, ὡς τὴν κυκλικὴν, τὴν δὲ, ἀόριστον εἶναι, τὴν δὲ, μικτήν. ὡς τὴν εὐθεῖαν. τῆς δὲ μικτῆς, τὴν μὲν, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις εἶναι, τὴν δὲ, ἐν τοῖς στερεοῖς καὶ τῆς ἐν ἐπιπέδοις, τὴν μὲν ἐν αὐτῇ συμπίπτειν, ὡς τὴν κισσοειδῆ, τὴν δὲ, ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. τῆς δ' ἐν στερεοῖς, τὴν μὲν κατὰ τὰς τομὰς ἐπινοεῖσθαι τῶν στερεῶν, τὴν δὲ, περὶ τὰ στερεὰ ὑφιστάναι. τὰς δὲ κωνικὰς τομὰς, ἢ τὰς σπειρικὰς, ἀπὸ τῆς τοιᾶσδε τομῆς γίνεσθαι τῶν στερεῶν. ἐπινοεῖσθαι δὲ ταύτας τὰς τομὰς, τὰς μὲν, ὑπὸ Μεναίχμου τὰς κωνικὰς, ὁ καὶ Ἐρατοσθένης ἱστορῶν λέγει, μὴ δὲ Μεναιχμίας κωνοτομεῖν τριάδας. τὰς δ' ὑπὸ Περσέως, ὃς καὶ τὸ ἐπίγραμμα ἐποίησεν ἐπὶ τῇ εὑρέσει.

Τρεῖς γραμμὰς ἐπὶ πέντε τομαῖς εὑρὼν τὰς * σπειρικὰς,
Περσεὺς, τῶν δ' ἕνεκα δαίμονας ἱλάσατο.

Αἱ μὲν δὴ τρεῖς τομαὶ τῶν κώνων εἰσὶ παραβολὴ καὶ ὑπερβολὴ, καὶ ἔλλειψις. τῶν δὲ σπειρικῶν τομῶν, ἡ μὲν ἐστὶν ἐμπεπλεγμένη ἐοικυῖα τῇ τοῦ ἵππου πέδῃ, ἡ δὲ, περὶ τὰ μέσα πλατύνεται, ἐξ ἑκατέρου δὲ ἀπολήγει μέρους, ἡ δὲ παραμήκης οὖσα, τῷ μὲν μέσῳ διαστήματι ἐλάσσονι χρῆται, εὐρύνεται δὲ ἐφ' ἑκάτερα. τὸ δὲ ἄλλων μίξεων τὸ πλῆθος ἀπέραντόν ἐστι. καὶ γὰρ στερεῶν σχημάτων πλῆθός ἐστιν ἄπειρον, καὶ τὰ μὲν αὐτῶν συνίστανται πολυειδῆ. οὐ γὰρ εὐθεῖα μὲν κατὰ κύκλον κινουμένη ποιεῖ ἐπιφάνειαν, οὐχὶ δὲ καὶ κωνικαὶ γραμμαὶ, καὶ κογχοειδεῖς, καὶ αὐταὶ αἱ περιφέρειαι. παντοίως οὖν τὰ στερεὰ τεμνόμενα ποικίλα δείκνυσιν εἴδη γραμμῶν. τῶν δὲ περὶ τὰ στερεὰ συνισταμένων γραμμῶν, αἱ μὲν εἰσὶν ὁμοιομερεῖς, ὡς αἱ περὶ τὸν κύλινδρον ἕλικες, αἱ δὲ, ἀνομοιομερεῖς, ὥσπερ αἱ ἄλλαι πᾶσαι. συνάγεται οὖν ἐκ τούτων τῶν διαιρέσεων ὡς αἱ τρεῖς μόναι γραμμαὶ, ὁμοιομερεῖς εἰσιν, ἡ εὐθεῖα. ἡ κυκλικὴ, καὶ ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ. δύο μὲν ἐν ἐπιπέδῳ ἁπλαῖ, μία δὲ μικτὴ, περὶ τὸ στερεόν. καὶ τοῦτο ἀποδείκνυσιν ἐναργῶς ὁ Γεμῖνος προαποδείξας, ὅτι ἂν πρὸς ὁμοιομερῆ γραμμὴν ἀπὸ τοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι προσεκβληθῶσιν, ἴσας πρὸς αὐτὴν ποιοῦσαι γωνίας, ἴσαι εἰσὶ καὶ ληπτέον ἐκ τῶν ἐκείνου τοῖς φιλομαθέσι τὰς ἀποδείξεις. ἐπεὶ καὶ τὰς γενέσεις τῶν σπειρικῶν γραμμῶν, καὶ τῶν κογχοειδῶν, καὶ τῶν κισσοειδῶν παραδίδωσι. ἡμεῖς δὲ τὰς μὲν ἐπωνυμίας αὐτῶν καὶ τὰς διαιρέσεις ἱστορήσαμεν εἰς τὴν περὶ αὐτῶν ζήτησιν ἐγείροντες τοὺς εὐφυεῖς. τὸ δὲ περὶ τὴν ἑκάστου ζήτησιν τοὺς λόγους ἀκριβοῦν ἐν τοῖς παροῦσιν ἡγούμεθα περίεργον εἶναι. τοῦ γεωμέτρου τὰς ἁπλᾶς καὶ ἀρχοειδεῖς ἡμῖν ἐνταῦθα μόνας γραμμὰς ἐκφήναντος, τὴν μὲν εὐθεῖαν διὰ τοῦ προκειμένου ὁρισμοῦ, τὴν δὲ περιφερῆ, κατὰ τὴν ἀπόδοσιν τοῦ κύκλου. τότε γὰρ ἐρεῖ τὴν γραμμὴν τὴν περατοῦσαν τὸν κύκλον εἶναι περιφέρειαν, μικτῆς δὲ οὐδέπω μέμνηται. καίτοι γωνίας οἶδε μικτὰς ὥσπερ τὴν τῶν ἡμικυκλίων, καὶ τὴν κερατοειδῆ. καὶ σχήματα ἐπίπεδα μικτὰ καὶ τὰς τομὰς, καὶ στερεῶν τοὺς κώνους καὶ κυλίνδρους. τῶν μὲν οὖν ἄλλων ἑκάστου, τὰ τρία παραδίδωσιν εἴδη, τῶν δὲ γραμμῶν τὰ δύο μόνα, τὸ εὐθὺ καὶ τὸ περιφερές. δεῖ γὰρ ἐν τοῖς περὶ τῶν ἁπλῶν λόγοις, τὰ ἁπλᾶ παραλαμβάνειν εἴδη. πάντα γὰρ τὰ ἄλλα συνθετώτερα τῶν γραμμῶν. ἑπόμενοι δὴ οὖν καὶ ἡμεῖς τῷ γεωμέτρῃ, στήσωμεν ἐπὶ τῶν ἁπλῶν γραμμῶν τὴν διόρθωσιν αὐτῶν.

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.)

Μετὰ τὸ σημεῖον καὶ τὴν γραμμὴν, ἡ ἐπιφάνεια τέτακται διχῇ, κατά τε μῆκος, καὶ πλάτος. ἀμαθὴς δὲ μένουσα καὶ αὕτη τοῦ τριχῇ, διαπαντὸς ἁπλουστέραν ἔχουσα φύσιν, διὸ καὶ ὁ γεωμέτρης τὸ μόνον προσέθηκεν τοῖς δύο διαστήμασιν, ὡς οὐ τῆς τρίτης διαστάσεως οὐκ οὔσης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ ἔστι καὶ τοῦτο τὴν ἀποφάσει τοῦ βάθους ἴσον

διωκόμενον, ἵνα καὶ ταῦτα, τὴν μὲν ὑπεροχὴν τῆς ἐπιφανείας τὴν κατὰ ἁπλότητα πρὸς τὸ στερεὸν σημαίνῃ διὰ τῆς ἀποφάσεως, ἢ τῆς ἰσοδυναμούσης τῇ ἀποφάσει προσθήκης. τὴν δὲ ὕφεσιν τὴν πρὸς τὰ πρὸ αὐτῆς διὰ τῶν κατασκευῶν. ἄλλοι δὲ πέρας αὐτὴν ὡρίσαντο σώματος, ταυτὸν πως λέγοντες. τὸ γὰρ πέρας τοῦ περατουμένου μιᾷ λείπεται διαστάσει. οἱ δὲ μέγεθος διχῆ διαστατόν. οἱ δὲ ἄλλοι ὁπωσοῦν σχηματίζονται τὴν ἀπόδοσιν σημαίνοντες ταυτόν. τῆς δὲ ἐπιφανείας, ἔννοιαν μὲν ἔχειν ἡμᾶς φασὶν ὅταν τὰ χωρία μετρῶμεν, καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἀφορίζωμεν κατὰ τὸ μῆκος καὶ πλάτος. αἴσθησιν δέ τινα λαμβάνειν εἰς τὰς σκιὰς ἀποβλέποντες. αὗται γὰρ ἀβαθεῖς οὖσαι, διὰ τὸ μὴ δύνασθαι χωρεῖν, εἰς τὸ κάτω τῆς γῆς πλάτος ἔχουσι μόνον καὶ μῆκος. οἱ δὲ Πυθαγόρειοι, τῇ τριάδι προσήκειν ἔλεγον αὐτήν. διότι δὴ τὰ ἐπ᾽ αὐτῆς σχήματα πάντα, πρωτίστην ἔχει τὴν τριάδα. ὁ μὲν γὰρ κύκλος ἐστὶν, ἀρχὴ τῶν περιφερομένων, καὶ ἐγκρυφίως ἔχει, τὸ τριαδικὸν τῷ κέντρῳ, τῇ διαστάσει, τῇ περιφερείᾳ. τὸ δὲ τρίγωνον, ἁπάντων ἡγεμονοῦν τῶν εὐθυγράμμων, παντί που δῆλον, ὅτι τριάδι κατέχεται, καὶ κατ᾽ ἐκείνην μεμόρφωται. ἐπιφανείας δὲ πέρατα αἱ γραμμαί. καὶ ἀπὸ τούτων ὡς εἰκόνων ληπτέον, ὅτι πῶς τὸ προσεχῶς ἑκάστου τῶν ὄντων, ἁπλούστερον τὸν ὅρον ἐπάγει καὶ τὸ πέρας ἑκάστῳ. καὶ γὰρ ἡ ψυχὴ, τὴν τῆς φύσεως ἐνέργειαν ἀφορίζει καὶ τελειοῖ, καὶ φύσις τὴν τῶν σωμάτων κίνησιν, καὶ πρὸ τούτων νοῦς μετρεῖ τὰς περιόδους τῆς ψυχῆς, καὶ αὐτοῦ τοῦ νοῦ τὴν ζωὴν, τὸ ἕν. πάντων γὰρ ἐκεῖνο μέτρον. ὥσπερ δὴ καὶ ἐν τούτοις ὁρίζεται μὲν τὸ στερεὸν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὁρίζεται δὴ καὶ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῆς γραμμῆς, καὶ αὕτη ὑπὸ τοῦ σημείου. πάντων γὰρ ἐκεῖνο πέρας. ἐν μὲν οὖν τοῖς ἀΰλοις εἴδεσι καὶ ἀμερέσι λόγοις ἡ γραμμὴ μονοειδὴς ὑπάρχουσα κατὰ τὴν πρόοδον τὴν τῆς ἐπιφανείας ποικίλην κίνησιν περατοῖ, καὶ συνέχει, καὶ τὴν ἀπειρίαν αὐτῆς ἑνίζει προσεχῶς, ἐν δὲ τοῖς εἰκόσιν αὐτοῦ τοῦ περατουμένου τὸ περατοῦν γεγονὸς, οὕτως αὐτῷ δίδωσι τὸν ὅρον. εἰ δέ τις ἐπιζητήσειεν καὶ ταῦτα, πῶς πάσης ἐπιφανείας πέρατα αἱ γραμμαί; μὴ δὲ τῆς πεπερασμένης πάσης οὔσαι. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια, τῆς σφαίρας, πεπέρασται μὲν οὐχ ὑπὸ γραμμῶν δὲ, ἀλλ᾽ αὐτὴ ὑφ᾽ ἑαυτῆς, ἢ ἐροῦμεν, ὅτι τὴν ἐπιφάνειαν, καθόσον ἐστὶ διχῆ διαστατὴ λαβόντες, εὑρήσομεν ὑπὸ γραμμῶν ὁριζομένην, κατὰ τό, τε μῆκος καὶ τὸ πλάτος. εἰ δὲ τὴν σφαιρικὴν θεωρήσομεν, ἐσχηματισμένην αὐτὴν καὶ προσλαβοῦσαν ἄλλην ποιότητα, λαμβάνομεν καὶ πέρας ἀρχὴν συνάψασαν, καὶ ἐκ τῶν δύο περάτων ἓν ποιήσασαν. καὶ οὕτω δυνάμει μόνον ἐν ὑπάρχον, καὶ οὐ κατ᾽ ἐνέργειαν.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.)

Τοῖς μὲν παλαιοτέροις τῶν φιλοσόφων οὐκ ἐδόκει τῆς ἐπιφανείας εἶδός τι θέσθαι τὸ ἐπίπεδον, ἀλλ᾽ ὡς ταυτὸ ἑκάτερον παραλαμβάνειν εἰς παράστασιν τοῦ διχῆ διαστατοῦ μεγέθους. οὕτω γὰρ καὶ ὁ θεῖος Πλάτων τὴν γεωμετρίαν τῶν ἐπιπέδων, ἔφατο θεωρητικὴν εἶναι, πρὸς τὴν στερεομετρίαν αὐτὴν ἀντιδιαιρῶν, ὡς ἂν τῆς αὐτῆς οὔσης τοῦ ἐπιπέδου τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης ὡσαύτως. Εὐκλείδης δὲ, καὶ οἱ μετ᾽ αὐτὸν, γένος μὲν ποιοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν, εἶδος δὲ τὸ ἐπίπεδον, ὡς τῆς γραμμῆς τὴν εὐθεῖαν. διὸ καὶ τὸ ἐπίπεδον χωρὶς ἀφορίζεται τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ ἀνάλογον τῇ εὐθείᾳ. καὶ γὰρ ἐκείνην εἶναι ἴσην τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν σημείων ἔλεγον, καὶ ταύτην ὁμοίως, δυοῖν εὐθειῶν. αὕτη γάρ ἐστιν ἐξ ἴσου κειμένη ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις. ἣν καὶ ἕτεροι τὸ αὐτὸ δηλοῦντες ἐπ᾽ ἄκρων τεταμένην εἰρήκασιν. οἱ δὲ, ἧς πᾶσι τοῖς μέρεσιν εὐθεῖα ἐφαρμόζει. φαῖεν δ᾽ ἄν τινες αὐτὴν καὶ ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν ἐπιφανειῶν, καὶ ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ, καὶ πάντας τοὺς τῆς εὐθείας ὅρους, καὶ εἰς τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν τὸ γένος μόνον ἐξαλλάττοντες, δυνήσονται μεταφέρειν. τὸ γὰρ εὐθὺ οὕτω καὶ περιφερὲς, καὶ τὸ μικτὸν ἀπὸ τῶν γραμμῶν ἀρξάμενα, διατείνει μέχρι τῶν στερεῶν ὡς εἴπομεν. ἔστι γὰρ καὶ ἐν ἐπιφανείαις καὶ ἐν στερεοῖς κατὰ τὸ ἀνάλογον. διὸ καὶ ὁ Παρμενίδης πᾶν σχῆμά φησιν, ἢ εὐθὺ εἶναι, ἢ περιφερὲς, ἢ μικτόν. εἰ τοίνυν ἐθέλεις τὸ εὐθὺ θεωρεῖν ἐν ἐπιφανείαις, λάβε τὸ ἐπίπεδον, ᾧ ἐφαρμόζει παντοίως ἡ εὐθεῖα. εἰ δὲ τὸ περιφερὲς, τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. εἰ δὲ τὸ μικτὸν, τὴν κυλινδρικὴν, ἢ κωνικὴν, ἤ τινα τοιαύτην. δεῖ δέ φησιν ὁ Γεμῖνος μικτῆς λεγομένης γραμμῆς, μικτῆς δὲ καὶ ἐπιφανείας, εἰδέναι τὸν τρόπον τῆς μίξεως, ὄντα διάφορον. οὔτε γὰρ κατὰ σύνθεσιν μόνον ἡ μίξις ἐστὶ τῶν γραμμῶν, οὔτε κατὰ κρᾶσιν. ἡ γὰρ ἕλιξ, μικτή ἐστι καὶ οὐκ ἔστι μέρος

αὐτῆς

μὲν αὐτῆς εὐθὺ, μέρος δὲ περιφερές. ὥσπερ τῶν κατὰ σύνθεσιν μικτῶν, αἱ δὲ τεμνόμεναι πῶς ἕλιξ ἔμφασιν παρέχεται τῶν ἁπλῶν, ὅπερ ὑπομένει τὰ μεμιγμένα, κατὰ κρᾶσιν, ἀλλ' ἐστὶν ἐν αὐτῇ συνεφθαρμένα τὰ ἄκρα, καὶ συγκεχυμένα, ὥστε τοῦτό γε θεόδωρος ὁ μαθηματικὸς, κρᾶσιν ἐπὶ τῶν γραμμῶν παραλαμβάνει. ἐν δὲ ταῖς ἐπιφανείαις ἡ μίξις οὔτε κατὰ σύνθεσιν, οὔτε κατὰ σύγχυσιν, ἀλλὰ μᾶλλον κατά τινα κρᾶσιν. νοήσαντες γὰρ κύκλον ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, καὶ σημεῖον μετέωρον, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου προσεκβάλλοντες εὐθεῖαν ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ περιελίξαντες αὐτὴν, ποιήσομεν κωνικὴν ἐπιφάνειαν μικτὴν οὖσαν. καὶ πάλιν τέμνοντες αὐτὴν, ἀναλύσομεν εἰς τὰ ἁπλᾶ. διὰ μὲν γὰρ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἄγοντες, εἰς τὴν τομὴν ποιήσομεν τὸ τέμνον ἐπίπεδον κυκλικόν. τῶν δὲ γραμμῶν ἡ ἰδέα τὸν τρόπον τῆς μίξεως οὐ δείκνυσιν ὄντα κατὰ κρᾶσιν. οὐδὲ γὰρ ἀναπέμπει ἡμᾶς εἰς τὴν τῶν στοιχείων ἁπλῶν φύσιν. αἱ δὲ ἐπιφάνειαι τεμνόμεναι, εὐθὺς ἐμφαίνουσι, καὶ δι' ὁποίων εἰσὶν γεγονυῖαι γραμμῶν. ὁ μὲν τρόπος τῆς μίξεως, διάφορος ἐπί τε γραμμῶν ὡς εἴρηται, καὶ ἐπιφανειῶν. ὥσπερ δὲ ἐν ταῖς γραμμαῖς ἦσαν ἁπλαῖ τινὲς, ἥ τε εὐθεῖα καὶ ἡ περιφερής. τούτων γὰρ καὶ οἱ πολλοὶ περιλήψεις ἔχουσιν ἀδιδάκτους, τῶν δὲ μικτῶν τὰ εἴδη, τεχνικωτέρας ἐδεῖτο κατανοήσεως, οὕτω δὴ καὶ τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις στοιχειωδεστάτων τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαιρικῆς, αὐτόθι τὰς ἐννοίας ἔχομεν, τῶν δὲ κατὰ μίξιν ὑφισταμένων, ἡ ἐπιστήμη, καὶ ὁ ταύτης λόγος ἀνευρίσκει τὴν ποικιλίαν. ὃ δέ ἐστι θαυμαστὸν ἐν ταύταις, ὅτι καὶ ἀπὸ τῆς κυκλικῆς μίξις γίγνεται πολλάκις τῆς ἐπιφανείας, κατὰ τὴν γένεσιν. ὃ δὴ συμβαίνειν φαμὲν κατὰ τὴν σφαιρικὴν ἐπιφάνειαν. κατὰ γὰρ κύκλου νοοῦντα στροφὴν ὀρθοῦ, διαμένοντος καὶ στρεφομένου περὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου. διὸ καὶ τριχῶς ἡ σπεῖρα γίγνεται. ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον ἢ ἐντὸς, ἢ ἐκτός. καὶ εἰ μὲν ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐστὶ τὸ κέντρον, γίγνεται σπεῖρα συνεχὴς, εἰ δὲ ἐντὸς, ἐμπεπλεγμένη, εἰ δὲ ἐκτὸς, διεχὴς, κατὰ τρεῖς ταύτας διαφοράς. πᾶσα δὲ ὅμως σπεῖρα, καί τοι μιᾶς οὔσης καὶ κυκλικῆς τῆς κινήσεως, μικτή ἐστι. γίγνονται δὲ ἐπιφάνειαι μικταὶ, καὶ ἀπὸ τῶν ἁπλῶν ὡς εἴπομεν γραμμῶν τοιῶσδε κινουμένων, καὶ ἀπὸ τῶν κινουμένων. αἱ γοῦν κινητικαὶ γραμμαὶ τρεῖς οὖσαι, τέσσαρας ποιοῦσιν ἐπιφανείας μικτὰς, ἃς καλοῦσι κωνοειδεῖς. ἀπὸ μὲν γὰρ τῆς παραβολῆς στρεφομένης περὶ τὸν ἄξονα, γίγνεται ὀρθογώνιον κωνοειδές. ἀπὸ δὲ τῆς ἐλλείψεως, τὰ καλούμενα σφαιροειδῆ. εἰ μὲν περὶ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων ἡ στροφὴ γένοιτο, τὸ ἐπιμηκές. εἰ δὲ περὶ τὸν ἐλάσσονα, τὸ ἐπίπλατυ. ἀπὸ δὲ τῆς ὑπερβολῆς, ἀμβλυκωνοειδές. δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι ποτὲ μὲν ἀπὸ τῶν γραμμῶν εἰς ἔννοιαν ἐρχόμεθα τῶν ἐπιφανειῶν, ποτὲ δὲ ἀνάπαλιν. ἀπὸ γὰρ τῶν κωνικῶν καὶ σπειρικῶν ἐπιφανειῶν προσεπινοοῦμεν, τάς τε κωνικὰς, καὶ τὰς σπειρικὰς γραμμάς. καὶ μὴν καὶ τοῦτο δεῖ προειλῆφθαι περί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν διαφορᾶς, ὅτι γραμμαὶ μὲν εἰσὶ τρεῖς ὁμοιομερεῖς, ὥσπερ ἤδη προείπομεν, ἐπιφάνειαι δὲ δύο μόνον, ἐπίπεδος καὶ σφαιρική. οὐκέτι δὲ καὶ ἡ κυλινδρική. οὐ γὰρ πανταπάσιν ἐφαρμόττειν δύναται τὰ μέρη τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἡμῖν εἰρήσθω διαφορῶν, ὧν μίαν ὁ γεωμέτρης ἐκλεξάμενος, τὴν ἐπίπεδον ταύτην ὡρίσατο, καὶ ὡς ἐπὶ ταύτης ὑποκειμένης θεωρήσει τὰ σχήματα, καὶ τὰ τούτων πάθη. καὶ γὰρ εὐπορώτερος ὁ λόγος αὐτῷ γίγνεται μᾶλλον, ἢ ἐπ' ἄλλας ἐπιφανείας. καὶ γὰρ εὐθείας καὶ κύκλους, καὶ ἕλικας ἐπὶ ταύτης νοεῖν δυνατὸν καὶ τομὰς κύκλων καὶ ἐπιφανειῶν, καὶ ἁφὰς, καὶ παραβολὰς, καὶ γωνιῶν παντοίων συστάσεις. ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων ἐπιφανειῶν, οὐ πάντα ταῦτα δύναται θεωρηθῆναι. ἐπὶ γὰρ τῆς σφαιρικῆς, πῶς ἂν εὐθεῖαν λάβοις, ἢ εὐθυγράμμου γωνίαν; ἐπὶ τῆς κωνικῆς, ἢ κυλινδρικῆς, πῶς ἂν ἢ κύκλων, ἢ εὐθειῶν θεωρήσειας; εἰκότως οὖν καὶ ὡρίσατο, ταύτην τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐπ' αὐτῆς πάντα ἐκτιθέμενος πραγματεύεται. καὶ γὰρ τὴν πραγματείαν ἐν τοῖς ἐπιπέδοις προσείρηκεν. καὶ οὕτω δεῖ νοεῖν, τὸ μὲν ἐπίπεδον οἷον προβεβλημένον καὶ πρὸ ὀμμάτων κείμενον, πάντα δὲ ὡς ἐπὶ τούτῳ τὴν διάνοιαν γράφουσαν, τῆς μὲν φαντασίας οἷον ἐπιπέδῳ κατόπτρῳ προσεικασμένης, τῶν δὲ ἐν διανοίᾳ λόγων τὰς ἑαυτῶν ἐννοίας, εἰς ἐκεῖνο καταπεμπόντων.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ

λων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

τὴν γωνίαν. οἱ μὲν τῶν γραμμῶν, ἐν τῇ τῶν πρός τι κατηγορίᾳ τάττοντες, κλίσιν εἰρήκασιν, ἢ γραμμῶν εἶναι πρὸς ἀλλήλας κεκλιμένων, ἢ ἐπιπέδων, οἱ δέ, ἐν τῇ ποιότητι καὶ ταύτην περιλαμβάνοντες ὡς τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπύλον πάθος, ποιόν τι λέγουσιν ἐπιφανείας, ἢ στερεοῦ, οἱ δὲ εἰς ποσότητα ἀναφέροντες, ἐπιφάνειαν, ἢ στερεὸν αὐτὴν εἶναι συγχωροῦσιν. διαιρεῖται γὰρ ἡ μέν, ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ὑπὸ γραμμῆς, ἡ δέ, ἐν τοῖς στερεοῖς ὑπὸ ἐπιφανείας. τὸ δὲ ὑπὸ τούτων φασὶ διαιρούμενον, οὐκ ἄλλο τί ἐστιν, ἢ μέγεθος, καὶ τοῦτο οὐ γραμμικόν, ἡ γὰρ γραμμὴ ὑπὸ σημείου διαιρεῖται, λείπεται οὖν αὐτήν, ἢ ἐπιφάνειαν, ἢ στερεὸν εἶναι. ἀλλ᾽ εἰ μὲν μέγεθος, πάντα δὲ τὰ ὁμογενῆ μεγέθη πεπερασμένα ὄντα, λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, καὶ αἱ γωνίαι πᾶσαι αἱ ὁμογενεῖς. εἰ γοῦν αἱ ἐν ἐπιφανείαις λόγον πρὸς ἀλλήλας ἕξουσι, καὶ ἡ κερατοειδὴς πρὸς τὴν εὐθύγραμμον. τὰ δὲ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα, δύναται ἀλλήλων ὑπερέχειν πολλαπλασιαζόμενα, ὑπερέξει ἄρα ποτὲ καὶ ἡ κερατοειδὴς τῆς εὐθυγράμμου, ὅπερ ἀδύνατον. μὴ δύναται γάρ, ὅτι πάσης ἐστὶν ἐλάττων εὐθυγράμμου. καὶ μὴν καὶ εἰ ποιότης μόνον ἐστίν, ὡς ἡ θερμότης καὶ ἡ ψυχρότης, πῶς εἰς ἴσα διαιρετή ἐστιν. οὐ γὰρ ἧττον ταῖς γωνίαις ὑπάρχει τὸ ἴσον καὶ ἄνισον τοῖς μεγέθεσι, καὶ ὅλως τὸ διαιρετὸν μόνον ὁμοίως ἑκατέροις καθ᾽ αὐτὸ συμβέβηκεν. εἰ δὲ οἷς ταῦτα καθ᾽ αὐτὸ ὑπάρχει, ποσὰ ἀλλ᾽ ἐστὶ καὶ οὐ ποιότητος, καὶ αἱ γωνίαι ποιότητος δῆλον ὅτι οὐκ ἂν εἶεν. τῆς γὰρ ποιότητος, τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον οἰκεῖα πάθη, καὶ οὐ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. ἔδει τοίνυν μὴ λέγειν, ἀνίσους γωνίας καὶ τὴν μὲν μείζονα, τὴν δὲ ἐλάττονα, ἀλλ᾽ ἀνομοίους, καὶ τὴν μὲν μᾶλλον γωνίαν, τὴν δέ, ἧττον. ταῦτα δὲ ὅτι τῆς τῶν μαθημάτων ὑπάρξεως ἐστὶν ἀλλότρια, παντί που καταφανές. πᾶσα γὰρ γωνία, τὸν αὐτὸν ἐπιδέχεται λόγον, καὶ οὐχὶ ἡ μὲν ἐστὶ γωνία μᾶλλον, ἡ δέ, ἧττον. τὸ δὲ τρίτον, εἰ κλίσις ἐστὶν ἡ γωνία, καὶ ὅλως τῶν πρός τι, συμβήσεται μιᾶς οὔσης κλίσεως μίαν εἶναι, καὶ γωνίαν, ἀλλ᾽ οὐ πλείους. εἰ γὰρ μηδέν ἐστιν ἄλλο παρὰ τὴν σχέσιν τῶν γραμμῶν, ἢ τῶν ἐπιπέδων, τίς μηχανή, μίαν μὲν εἶναι τὴν σχέσιν τῶν γραμμῶν ἢ τῶν ἐπιπέδων, πλείους δὲ τὰς γωνίας. εἰ τοίνυν νοήσειας κῶνον τῷ διὰ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τριγώνῳ τετμημένον, ἐν τῷ ἡμικωνίῳ κατὰ τὴν κορυφήν, μίαν μὲν θεωρήσεις κλίσιν τῶν γραμμῶν, τῶν τοῦ τριγώνου, δύο δὲ ἀφοριζούσας γωνίας, τὴν μὲν ἐπίπεδον τὴν αὐτοῦ τοῦ τριγώνου, τὴν δὲ ἐπὶ τῆς μικτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, περιεχομένην δὲ ἑκατέραν ὑπὸ τῶν προειρημένων δυεῖν γραμμῶν. οὐκ ἄρα ἡ τούτων σχέσις ἐποίει τὴν γωνίαν. ἀλλὰ μὴν ἀναγκαῖον αὐτήν, ἢ ποιότητα λέγειν ἢ ποσόν, ἢ τῶν πρός τι. τὰ μὲν γὰρ σχήματα ποιότητος, οἱ δὲ λόγοι τούτων πρὸς ἄλληλα, τῶν πρός τι. δεῖ τοίνυν, καὶ τὴν γωνίαν ὑφ᾽ ἕν τι τούτων ἀνάγεσθαι τῶν τριῶν γενῶν. τοιούτων δὴ τῶν ἀπόρων ὄντων, καὶ τοῦ μὲν Εὐκλείδου κλίσιν λέγοντος τὴν γωνίαν, τοῦ δὲ Ἀπολλωνίου συναγωγὴν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ πρὸς ἑνὶ σημείῳ ὑπὸ κεκλασμένῃ γραμμῇ, ἢ ἐπιφανείᾳ. δοκεῖ γὰρ οὗτος καθόλου πᾶσαν ἀφορίζεσθαι τὴν γωνίαν, λεκτέον ἡμῖν ἑπομένοις τῷ ἡμετέρῳ καθηγεμόνι τὴν γωνίαν, μηδὲν μὲν εἶναι τῶν εἰρημένων αὐτὸ καθ᾽ αὐτό. διὰ δὲ τῆς πάντων τούτων συνδρομῆς ἔχειν τὴν ὑπόστασιν. καὶ διὰ τοῦτο τὴν ἀπορίαν ποιῆσαι εἰς ἕν τι ῥέψασιν. ἔστι δὲ οὐχὶ γωνία μόνη τοιοῦτον, ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον. μέτεστι μὲν γὰρ αὐτῷ ποσότητος, καὶ ἴσον λέγεται καὶ ἄνισον οἷον ὕλης τάξιν ἔχον πρὸς αὐτά. πάρεστι γὰρ αὐτῷ, καὶ ἡ κατὰ τὸ σχῆμα ποιότης, ἐπεὶ καὶ ὅμοια τρίγωνα λέγεται καὶ ἴσα, τὸ μέν, ἐπ᾽ ἄλλης ἔχον κατηγορίας, τὸ δέ, ἀπ᾽ ἄλλης. οὕτω τοίνυν καὶ ἡ γωνία πάντως μὲν δεῖται δὴ καὶ ποιότητα καθ᾽ ἣν οἷον μορφὴν οἰκείαν ἔχει καὶ χαρακτῆρα τῆς ὑπάρξεως, δεῖται δὲ καὶ τῆς σχέσεως τῶν ἀφοριζουσῶν αὐτὴν γραμμῶν, ἢ τῶν περιεχόντων ἐπιπέδων. καὶ τὸ ἐκ πάντων ἐστὶν ἡ γωνία, καὶ οὐχ ἕν τι τούτων. καὶ διαιρετὴ μέν ἐστι, καὶ ἰσότητος δεκτικὴ καὶ ἀνισότητος, κατὰ τὸ ἐν αὐτῇ ποσόν. οὐκ ἀναγκάζεται δὲ τὸν λόγον ἐπιδέχεσθαι τῶν ὁμογενῶν μεγεθῶν, διὰ τὸ καὶ ποιότητα ἰδιάζουσαν ἔχειν, καθ᾽ ἣν ἀσύμβλητοι πολλάκις εἰσὶ γωνίαι ἄλλαι ἄλλαις, οὐδεμίαν ἀποτελεῖν τὴν γωνίαν ἡ μία ἔκκλισις. ἐπειδὴ καὶ τὸ μεταξὺ τῶν κεκλιμένων ποσὸν συμπληροῖ τὴν οὐσίαν αὐτῆς. εἰ δὴ πρὸς ταύτας ἀποβλέποιμεν τοὺς ὁρισμούς, καὶ τὰ ἄπορα διαλύσομεν, καὶ τὴν ἰδιότητα τῆς γωνίας εὑρήσομεν, συναγωγὴν μὲν οὐκ οὖσαν, ὥσπερ καὶ

περ καὶ Ἀπολλώνιός φησιν ἐπιφανείας ἢ στερεοῦ συμπληρούντων καὶ τούτων τὴν οὐσίαν αὐτῆς, αὐτὴν δὲ τὴν συνηγμένην ἐπιφάνειαν πρὸς τῷ σημείῳ, καὶ περιεχομένην ὑπὸ τῶν κεκλιμένων γραμμῶν, ἢ τῆς μιᾶς γραμμῆς πρὸς αὐτὴν κεκλιμένης, καὶ αὐτὸ τὸ συνηγμένον στερεὸν ὑπὸ ἐπιπέδοις πρὸς ἄλληλα κεκλιμένοις, ἵνα τὸ πεποιημένον ποσὸν καὶ ὑπὸ τοιᾶ-δε σχέσει συνιστάμενον αὐτὴν ἀφορίζῃ. καὶ οὔτε ἡ ποσότης μόνον, οὔτε ἡ σχέσις. τοσαῦτα περὶ τῆς τῶν γωνιῶν ὑποφάσεως εἰρήσθω, κοινὴν προσλαμβάνοντα θεωρίαν πάσης γωνίας, πρὸ τῆς τῶν εἰδῶν αὐτῆς διαιρέσεως. τριῶν δὲ δοξῶν οὐσῶν περὶ τὴν γωνίαν, Εὔδημος μὲν ὁ περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γράψας, ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχώρησεν· γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν, οὐκ ἄλλην εἶναι φησιν, ἢ τὴν κλίσιν τῶν γραμμῶν. εἰ δὲ ἡ εὐθύτης ποιότης, καὶ ἡ κλάσις ποιότης, ἐν ποιότητι ἔχουσαν αὐτὴν τὴν γένεσιν, πάντως εἶναι ποιότητα. Εὐκλείδης δὲ, καὶ ὅσοι κλίσιν εἰρήκασιν, ἐν τοῖς πρός τι κατατάττουσι. ποσότητα δὲ λέγουσιν αὐτὴν, ὅσοι φασὶ τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν, ὧν καὶ ὁ Πλούταρχος ἐστὶν εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. δεῖ γὰρ εἶναί τι φησὶ διάστημα πρῶτον ὑπὸ τὴν κλάσιν τῶν περιεχουσῶν γραμμῶν, ἢ ἐπιφανειῶν· καί τοι γε συνεχοῦς ὄντος τοῦ ὑπὸ τὸ σημεῖον διαστήματος, ἀδύνατον τὸ πρῶτον λαβεῖν. ἐπ' ἄπειρον γὰρ πᾶν διάστημα διαιρετὸν, πρὸς τῷ καὶ ἐὰν ὁπωσοῦν ἀφορίσωμεν τὸ πρῶτον καὶ δι' ἐκείνου γωνίαν ἀγάγωμεν γίγνεσθαι τρίγωνον, ἀλλ' οὐ μίαν γωνίαν. Κάρπος δὲ ὁ Ἀντιοχεὺς, ποσὸν μὲν εἶναί φησι τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν, ἢ ἐπιφανειῶν, καὶ ἐφ' ἓν διεστὼς τοῦτο, μὴ μέντοι διὰ τοῦτο γραμμὴν εἶναι τὴν γωνίαν, οὐ γὰρ πᾶν τὸ ἐφ' ἓν διαστατὸν ὑπάρχειν γραμμήν. τοῦτο δὲ πάντων παραδοξότατον εἰ ἔστι τι μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατὸν ἔξω γραμμῆς. ἀλλὰ τούτων μὲν ἅλις. τῶν δὲ γωνιῶν τὰς μὲν, ἐν ἐπιφανείαις συνίστασθαι λεκτέον, τὰς δὲ, ἐν στερεοῖς. καὶ τῶν ἐν ἐπιφανείαις, τὰς μὲν, ταῖς ἁπλαῖς, τὰς δὲ ἐν ταῖς μικταῖς, καὶ γὰρ ἐν τῇ κυλινδρικῇ ἐπιφανείᾳ γένοιτ' ἂν γωνία καὶ ἐν τῇ κωνικῇ, καὶ ἐν τῇ σφαιρικῇ, καὶ ἐν τῇ ἐπιπέδῳ. τῶν δὲ ἐν ταῖς ἁπλαῖς ἐπιφανείαις, αἱ μὲν, ἐν ταῖς σφαιρικαῖς, αἱ δὲ, ἐν ταῖς ἐπιπέδοις ἔχουσι τὴν σύστασιν. ποιεῖ γὰρ γωνίας καὶ ζωδιακὸς τέμνων ἰσημερινὸν εἰς δύο κατὰ κορυφὰς τῶν τεμνουσῶν περιφερειῶν. καί εἰσιν ἐπὶ σφαιρικῆς ἐπιφανείας αἱ τοιαῦται γωνίαι. τῶν δὲ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, αἱ μὲν ὑπὸ ἁπλῶν περιέχονται γραμμῶν, αἱ δὲ, ὑπὸ μικτῶν, αἱ δὲ, ὑπὸ ἀμφοτέρων. ἐν γὰρ τῷ θυρεῷ περιέχεται γωνία ὑπό τε τοῦ ἄξονος, καὶ τῆς τοῦ θυρεοῦ γραμμῆς. ἀλλὰ τούτων, ἡ μὲν μικτή ἐστιν, ἡ δὲ, ἁπλῆ. καὶ εἰ τέμοι κύκλος θυρεὸν, ἔσται ὑπό τε περιφερείας, καὶ τῆς ἐλλείψεως περιεχομένη γωνία. ὅταν δὲ αἱ κισσοειδεῖς γραμμαὶ συννεύουσαι πρὸς ἓν σημεῖον ὥσπερ τὰ τοῦ κισσοῦ φύλλα. καὶ γὰρ τὴν (ἐπωνυμίαν ἐκεῖθεν ἔχον) ποιῶσι γωνίαν ὑπὸ μικτῶν ἡ τοιαύτη δήπου περιέχεται ὑπὸ γραμμῶν, καὶ ὅτε ἡ ἱπποπέδη μία τῶν ἀπε[illegible] οὖσα τὴν πρὸς ἄλλην ποιεῖ γωνίαν, καὶ ταύτην μικταὶ γραμμαὶ περιέχουσιν. αἱ δὲ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφεροῦς, ὑπὸ ἁπλῶν περιέχονται γραμμῶν. τούτων δ' αὖ πάλιν, αἱ μὲν ὑπὸ μηνοειδῶν περιλαμβάνονται· καὶ γὰρ δύο περιφέρειαι τέμνουσαι ἀλλήλας ἢ ἐφαπτόμεναι ποιοῦσι γωνίας. καὶ αὗται τριτταὶ, ἢ γὰρ ἀμφικύρτους, ὅτε ἐκτὸς ἦ τὰ κυρτὰ τῶν περιφερειῶν, ἢ ἀμφικοίλους, ὅτε ἀμφότερα τὰ κοῖλα ἐκτὸς ὑπάρχει, ἃς καλοῦσι συστροειδεῖς, ἢ μικτὰς ὑπὸ κυρτῆς καὶ κοίλης, ὥσπερ τὰς τῶν μηνίσκων. καὶ μὴν καὶ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφερείας περιέχονται γωνίαι διχῶς. ἢ γὰρ ὑπὸ εὐθείας καὶ κοίλης περιφερείας, ὡς ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἢ ὑπὸ εὐθείας καὶ κυρτῆς, ὡς ἡ κερατοειδής. αἱ δὲ ὑπὸ δυεῖν εὐθειῶν περιεχόμεναι πᾶσαι, εὐθύγραμμοι κληθήσονται, [illegible] ἔχουσαι καὶ αὐταὶ διαφοράν. ταύτας τοίνυν ἁπάσας τὰς ἐν ἐπιπέδοις ἐπιφανείαις συνισταμένας ὁ γεωμέτρης ἐν τούτοις ἀφορίζεται κοινὸν ὄνομα θέμενος αὐταῖς, τὸ τῆς ἐπιπέδου γωνίας. καὶ τὸ μὲν γένος αὐτῆς κλίσιν εἰπὼν, τὸν δὲ τόπον, τὸ ἐπίπεδον. καὶ γὰρ αἱ γωνίαι, θέσιν ἔχουσι, τὴν δὲ γένεσιν, ὅτι δύο εἶναι δεῖ γραμμὰς, καὶ οὐ τρεῖς τοὐλάχιστον, ὥσπερ ἐπὶ τῶν στερεῶν, καὶ ταύτας ὁμιλεῖν ἀλλήλαις, καὶ ὁμιλούσας μὴ κεῖσθαι ἐπ' εὐθείας, ἵνα κλάσις ᾖ, καὶ περιοχὴ τῶν γραμμῶν, ἀλλὰ μὴ ἔκτασις μόνον καθ' ἓν διάστημα. δοκεῖ δὲ ὁ λόγος οὗτος, πρῶτον μὲν ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, οὐ συγχωρεῖν ἀποτελεῖσθαι γωνίαν, καί τοι γε ἡ κισσοειδὴς μία οὖσα ποιεῖ γωνίαν, καὶ ἡ ἱπποπέδη. τὴν γὰρ ὅλην, κισσοειδῆ καλοῦμεν, ἀλλ' οὐ τὰ μόρια αὐτῶν, ἵνα λέγῃς ὅτι ταῦτα ποιεῖ τὴν γωνίαν συννεύοντα καὶ

τὴν

Γωνία τί.

ἡ ἱπποπέδη μία οὖσα [illegible] γωνίαν.

τὴν ὅλην παρεῖχεν, ἀλλ' οὐ τὰ μέρη. κοινῇ δὲ ἑκάτερα μία τυγχάνουσα ποιεῖ γωνίαν αὐτὴ πρὸς ἑαυτήν, οὐ πρὸς ἄλλην. ἔπειτα κλίσιν ἀφοριζόμενος τὴν γωνίαν πλημμελεῖ. πῶς γὰρ μιᾶς οὔσης κλίσεως, δύο ἔσονται γωνίαι; πῶς δὲ ἴσας καὶ ἀνίσους ἐπὶ γωνίας λέγομεν, καὶ ὅσα ἄλλα πρὸς ταύτην εἰώθαμεν ἀποφέρεσθαι τὴν δόξαν. τρίτον δὲ παρέλκειν ἐπί τινων γωνιῶν, τὸ καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, οἷον ἐπὶ τῶν περιφερογράμμων. καὶ γὰρ ἄνευ τούτου τέλειος ὁ ὁρισμός. ἡ γὰρ πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν τούτων κλίσις ποιήσει τὴν γωνίαν. τὴν ἀρχὴν γὰρ εὐθὺ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι τὰς περιφερεῖς ἀδύνατον. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς ἀποδόσεως τοῦ Εὐκλείδου λέγειν ἔχομεν, τὰ μὲν, ἀφερμηνεύοντες αὐτήν, τὰ δὲ, ἀπαποροῦντες.

Ὅταν δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος ἡ γωνία καλεῖται.) Τὴν γωνίαν σύμβολον εἶναι φαμὲν, καὶ εἰκόνα τῆς συνοχῆς τῆς ἐν τοῖς θείοις γένεσι, καὶ τῆς συναγωγοῦ τάξεως τῶν διῃρημένων εἰς ἓν, καὶ τῶν μεριστῶν εἰς τὸ ἀμερὲς, καὶ τῶν πολλῶν εἰς συνδετικὴν κοινωνίαν. δεσμὸς γὰρ γίγνεται καὶ αὐτὴ τῶν πολλῶν γραμμῶν καὶ ἐπιπέδων, καὶ συναγωγὸς τοῦ μεγέθους, εἰς τὸ ἀμερὲς τῶν σημείων, καὶ συνεκτικὴ παντὸς τοῦ κατ' αὐτὴν ὑφισταμένου σχήματος. διὸ καὶ τὰ λόγια τὰς γωνιακὰς συμβολὰς τῶν σχημάτων συνοχίδας ἀποκαλεῖ, καθόσον εἰκόνα φέρουσι τῶν συνοχικῶν ἑνώσεων, καὶ τῶν συζεύξεων τῶν θείων, καθ' ἃς τὰ διεστῶτα συνάπτουσιν ἀλλήλοις. αἱ μὲν ἐν ταῖς ἐπιφανείαις γωνίαι τὰς ἀυλοτέρας αὐτῶν καὶ ἁπλουστέρας ἀποτυποῦνται καὶ τελεωτέρας ἑνώσεις. αἱ δὲ ἐν τοῖς στερεοῖς, τὰς προϊούσας μέχρι τῶν ἐσχάτων καὶ τοῖς διεσπασμένοις κοινωνίαν, καὶ τοῖς πάντῃ μεριστοῖς ὁμοφυῆ σύνταξιν παρεχομένας. τῶν δὲ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις αἱ μὲν τὰς πρώτας αὐτῶν καὶ ἀμίκτους, αἱ δὲ, τὰς τῆς ἀπειρίας συνεκτικὰς τῆς ἐν αὐτοῖς προόδου ἀπεικάζονται. καὶ αἱ μὲν, τὰς τῶν νοερῶν εἰδῶν εἰδοποιούσας, αἱ δὲ, τὰς τῶν αἰσθητῶν λόγων, αἱ δὲ, τὰς τῶν μεταξὺ τούτων συνδετικάς. αἱ μὲν οὖν περιφερόγραμμοι γωνίαι μιμοῦνται τὰς συνελισσούσας αἰτίας τὴν νοερὰν ποικιλίαν εἰς ἕνωσιν. νοῦ γὰρ καὶ νοερῶν εἰδῶν αἱ περιφέρειαι συνεχῶς ἐπιστρεφόμεναι πρὸς ἑαυτὰς εἰκόνες. αἱ δὲ εὐθύγραμμοι, τὰς τῶν αἰσθητῶν προϊσταμένας, καὶ τὴν σύνδεσιν τῶν ἐν τούτοις λόγων παρεχομένας. αἱ δὲ μικταὶ, τὰς κοινωνίας, τῶν τε αἰσθητῶν, καὶ τῶν νοερῶν εἰδῶν κατὰ μίαν ἕνωσιν ἀσάλευτον φυλαττούσας. δεῖ δὴ πρὸς ταῦτα τὰ παραδείγματα ἀποβλέποντας, καὶ τῶν καθ' ἕκαστα αἰτίας ἀποδιδόναι. καὶ γὰρ παρὰ τοῖς Πυθαγορείοις εὑρήσομεν ἄλλας γωνίας ἄλλοις θεοῖς ἀνειμένας. ὥσπερ καὶ ὁ Φιλόλαος πεποίηκεν, τοῖς μὲν, τὴν τριγωνικὴν γωνίαν τοῖς δὲ, τὴν τετραγωνικὴν ἀφιερώσας, καὶ ἄλλας ἄλλοις. καὶ τὴν αὐτὴν πλείοσι θεοῖς, καὶ τῷ αὐτῷ πλείους κατὰ τὰς διαφόρους δυνάμεις ἀνεὶς πρὸς ἅ μοι δοκεῖ, καὶ ὁ Ἀσιναῖος φιλόσοφος ἀφορῶν κατὰ τὸ τρίγωνον τὸ δημιουργικὸν, τὸ πάσης προσεχὲς αἴτιον τῆς τῶν στοιχείων διακοσμήσεως, ἄλλους μὲν ὑποστῆναι θεοὺς κατὰ τὰς πλευρὰς, ἄλλους δὲ κατὰ τὰς γωνίας, τοὺς μὲν προόδου καὶ δυνάμεως χορηγοὺς, τοὺς δὲ, τῆς ζεύξεως τῶν ὅλων, καὶ τῆς εἰς ἓν πάλιν τῶν προελθόντων συναγωγῆς. ταῦτα μὲν οὖν, εἰς τὴν τῶν ὄντων ἡμᾶς περιάγει θεωρίαν. εἰ δὲ ἐνταῦθα αἱ γραμμαὶ περιέχειν λέγονται τὴν γωνίαν, θαυμαστὸν οὐδέν. τὸ γὰρ ἐν τούτοις ἓν, καὶ τὸ ἀχώριστον ἐπεισοδιῶδές ἐστιν, ἐν δὲ τοῖς θεοῖς, καὶ τοῖς ὄντως οὖσι προηγεῖται τῶν πολλῶν καὶ διῃρημένων τὸ ὅλον καὶ τὸ ἀμέριστον ἀγαθόν.

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα γραμμὴ κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς. ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.) Αὐτά ἐστι τὰ, τὰ τρία τῶν γωνιῶν εἴδη, περὶ ὧν καὶ ὁ ἐν τῇ πολιτ. Σωκράτης φησὶν ἐξ ὑποθέσεως παρὰ τοῖς γεωμέτραις, λαμβανομένην τῆς εὐθυγράμμου, καὶ κατὰ τὴν εἰς τὰ εἴδη διαίρεσιν ταύτης ὑφιστάσας τὰς γωνίας τὴν ὀρθὴν, τὴν ἀμβλεῖαν, τὴν ὀξεῖαν, τῆς μὲν, κατὰ τὸ ἴσον, καὶ κατὰ ταὐτὸν καὶ ὅμοιον ἀφωρισμένης, τῶν δὲ κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, καὶ ὅλως τὸ ἄνισον, καὶ τὴν ἑτερότητα, καὶ τὸ μᾶλλον, καὶ ἧττον ἀορίστως ὑφισταμένων. οἱ μὲν οὖν πολλοὶ γεωμέτραι τῆς διαιρέσεως ταύτης οὐκ ἔχουσιν ἀποδιδόναι λόγον, ἀλλ' ὑποθέσει χρῶνται, καὶ ταύτας τρεῖς εἶναι γωνίας. ἐπειδὰν δὲ τὴν αἰτίαν αὐτοὺς ἐρωτήσωμεν, οὔ φασι χρῆναι ταῦτα παρ' αὐτῶν ἀπαιτεῖν,

ἀπαιτεῖν. οἱ δὲ πυθαγορεικοὶ τῆς τριπλῆς διανομῆς ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀναφέροντες τὴν λύσιν, οὐκ
ἀποροῦσιν αἰτίας ἀποδιδόναι, καὶ ταύτης τῆς διαφορᾶς τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν. ἐπειδὴ
γὰρ τῶν ἀρχῶν ἡ μὲν περὶ ὅρας ὑφέστηκεν, καὶ ἔστιν ὅρου καὶ ταυτότητος αἰτία τοῖς ἀποτελέ-
σμασι, καὶ ἰσότητος, καὶ πάσης τῆς ἀμείνονος συστοιχίας. ἡ δὲ ἄπειρός ἐστι καὶ δίδωσι τὴν ἐπ'
ἄπειρον πρόοδον καὶ αὔξησιν, καὶ μείωσιν, καὶ ἀνισότητα, καὶ παντοίαν ἑτερότητα τοῖς γεννω-
μένοις ἀπ' ἑαυτῆς, καὶ ὅλως ἐξηγεῖται τῆς καταδεεστέρας σειρᾶς, εἰκότως δὴ διὰ ταῦτα, καὶ
τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν κατ' ἐκείνας ὑφισταμένων, ὁ μὲν, ἀπὸ τοῦ πέρατος ἥκων λόγος,
τὴν ὀρθὴν ἀπετέλεσεν γωνίαν μίαν, ἰσότητι κρατουμένην, καὶ ὁμοιότητι πρὸς πᾶσαν ὀρθὴν
καὶ ὡρισμένην ἀεὶ, καὶ τὴν αὐτὴν ἑστῶσαν, καὶ μήτε αὔξησιν, μήτε μείωσιν ἐπιδεχομένην. ὁ δὲ
ἀπὸ τῆς ἀπειρίας δεύτερος ὢν, καὶ δυαδικὸς, καὶ γωνίας ἀνέφηνε διπλᾶς περὶ τὴν ὀρθὴν ἀνι-
σότητι διῃρημένας, κατὰ τὸ μεῖζον καὶ ἔλαττον, καὶ κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον, ἀπέραντον ἐχού-
σας κίνησιν, τῆς μὲν ἀμβλυνομένης μᾶλλον καὶ ἧττον, τῆς δὲ, ὀξυνομένης. διὰ δὲ ταῦτα, καὶ τῶν
θείων διακόσμων, καὶ τῶν μεσαιτέρων δυνάμεων, τὰς μὲν ὀρθὰς γωνίας εἰς τοὺς ἀχράντους
ἀναπέμπουσιν, ὡς τῆς ἀκλινοῦς προνοίας τῶν δευτέρων αἰτίους. τὸ γὰρ ὀρθὸν καὶ ἀκλινὲς, πρὸς
τὰ χείρονα καὶ ἄτρεπτον, ἐκείνοις προσήκει θεοῖς. τὰς δὲ ἀμβλείας καὶ ὀξείας τοῖς τῆς προόδου,
καὶ τοῖς τῆς κινήσεως, καὶ τῆς ποικιλίας τῶν δυνάμεων χορηγοῖς, ἀνεῖσθαι λέγουσιν. τό τε γὰρ ἀμ-
βλὺ τῆς ἐπὶ πᾶν ἁπλωμένης τῶν εἰδῶν ἐκστάσεως ἐστὶν εἰκὼν, καὶ τὸ ὀξὺ τῆς διαιρετικῆς καὶ κινη-
τικῆς τῶν ὅλων αἰτίας ἀφομοίωσιν ἔλαχεν. καὶ μὴν καὶ ἐν αὐτοῖς τοῖς οὖσι, τῇ μὲν οὐσίᾳ ἡ ὀρ-
θότης τὸν αὐτῆς ὅρον τοῦ εἶναι φυλάττειν προσέοικεν, τοῖς δὲ συμβεβηκόσι, ἥ τε ἀμβλεῖα καὶ
ἡ ὀξεῖα. ταῦτα γὰρ δέχεται τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον, καὶ ἀορίστως μεταβάλλοντα, οὔποτε παύε-
ται. ὀρθῶς ἄρα καὶ τῇ ψυχῇ παρακελεύονται τὴν κάθοδον, τὴν εἰς γένεσιν ποιεῖσθαι, κατὰ τὸ ἀκλι-
νὲς ἔχουσαν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶδος, μὴ ῥέπουσαν πρὸς τάδε μᾶλλον, ἢ τάδε, μηδὲ παραδεχομένην
μᾶλλον ἄλλων καὶ ἧττον. ὁ γὰρ τῆς συμπαθείας μερισμὸς, εἰς τὴν ἔνυλον αὐτὴν κατάγει πλημ-
μέλειαν, καὶ τὴν ἀοριστίαν. σύμβολον οὖν καὶ ἡ κάθετός ἐστιν ἀρρεψίας, καθαρότητος, ἀχράν-
του δυνάμεως καὶ ἀκλινοῦς πάντων τῶν τοιούτων. ἔστι δὲ καὶ μέτρου θείου καὶ νοεροῦ σύμβολον.
διὰ γὰρ καθέτου, καὶ τὰ ὕψη τῶν σχημάτων ἀναμετροῦμεν, καὶ τῇ πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀναφορᾷ,
τὰς ἄλλας εὐθυγράμμους γωνίας ὁρίζομεν, αὐτὰς ἀφ' ἑαυτῶν ἀορίστους οὔσας. ὡς ἐν ὑπερ-
βολῇ γὰρ καὶ ἐλλείψει θεωρουμένων. τούτων δὲ ἑκάτερα καθ' αὑτὴν ἀπέραντός ἐστι, διὸ καὶ τὴν
ἀρετὴν κατὰ τὴν ὀρθότητα φασιν ἑστάναι. τὴν δὲ κακίαν κατὰ τὴν ἀοριστίαν τῆς ἀμβλείας καὶ ὀξείας ὑφί-
στασθαι, καὶ μερίζεσθαι τὰς ἐνδείας καὶ ὑπερβολὰς, καὶ διὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον δεικνύναι τὴν ἑαυ-
τῆς ἀμετρίαν. τελειότητος ἄρα καὶ ἀκλινοῦς ἐνεργείας, καὶ ὅρου νοεροῦ, καὶ πέρατος, καὶ τῶν
τούτοις ὁμοίων, εἰκόνα θησόμεθα τὴν ὀρθότητα τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν. τὴν δὲ ἀμβλεῖαν καὶ
ὀξεῖαν, ἀορίστου κινήσεως, καὶ ἀλήκτου προόδου καὶ διαιρέσεως, καὶ ὁρισμοῦ, καὶ ὅλως ἀπειρίας.
τοσαῦτα περὶ τούτων. δεῖ δὲ τοῖς ὁρισμοῖς τῆς τε ἀμβλείας, καὶ ὀξείας προσθεῖναι τὸ γένος.
ἔστι γὰρ ἑκατέρα εὐθύγραμμος, ἡ μὲν μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐλάσσων. ἀλλ' οὐχ ἁπλῶς ἡ ἐλάσσων
ὀρθῆς, ὀξεῖα ἐστί. καὶ γὰρ ἡ κερατοειδὴς πάσης ἐστὶν ὀρθῆς ἐλάσσων, εἴπερ γε καὶ ὀξείας ἀλλ' οὐκ
ὀξεῖα. καὶ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου πάσης ὀρθῆς ὡσαύτως ἐλάσσων ἀλλ' οὐκ ἔστιν ὀξεῖα. τὸ δὲ αἴτιον, ὅτι
μικταί εἰσι καὶ οὐκ εὐθύγραμμοι. καὶ μὲν δὴ τῶν περιφερογράμμων, πολλαὶ μείζους ἂν φα-
νοῖεν ὀρθῶν, ἀλλ' οὐκ εἰσὶν ἀμβλεῖαι διὰ τοῦτο. δεῖ γὰρ εὐθύγραμμον εἶναι τὴν ἀμβλεῖαν. τοῦ-
τό τε οὖν ἐπισημαινόμεθα, καὶ ὅτι τὴν ὀρθὴν ἀφορίσασθαι προθέμενος, ἔλαβεν εὐθεῖαν ἐπὶ τι-
νος εὐθείας ἑστῶσαν, καὶ ποιοῦσαν ἴσας ἀλλήλαις τὰς ἐφεξῆς. τὴν δὲ ἀμβλεῖαν καὶ τὴν ὀξεῖαν
οὐκέτι λαβὼν εὐθεῖαν ἐπὶ θάτερα κεκλιμένην ἀποδίδωσιν, ἀλλ' ἐκ τῆς πρὸς τὴν ὀρθὴν ἀνα-
φορᾶς. μέτρον γὰρ αὕτη καὶ τῶν μὴ ὀρθῶν, ὥσπερ ἰσότης καὶ τῶν ἀνίσων. αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐγ-
κεκλιμέναι, ἄπειροι εἰσὶν, καὶ οὐ μία μόνον ὥσπερ ἡ κάθετος. ἐπὶ δὲ τούτοις τὸ γωνίας εἰπεῖν
ἀλλήλαις ἴσας τῆς γεωμετρικῆς ἀκριβείας εἶναι τίθεμεν. συνετὸν γὰρ ἐὰν ἦν καὶ ἴσας εἶναι γωνίας
ἀλλήλαις, καὶ μὴ ὀρθὰς, καὶ τὸ ἐφεξῆς προστιθὲν οὐ φαίνεταί μοι περιττὸν. ὥστε οὐ καλῶς ζη-
τεῖν ἔδοξεν, ἀλλ' ἐνδείκνυται τὸν λόγον τῆς ὀρθότητος. ἐπὶ πᾶσι δὴ οὖν ἄξιον μεμνῆσθαι τῆς
τοῦ στοιχειωτοῦ κἀνταῦθα προθέσεως, ὅτι περὶ τῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ συνισταμένων ποιεῖται
τὸν λόγον, ὥστε οὐδὲ καθέτου πάσης οὗτος ὁ ὅρος ἐστὶν, ἀλλὰ τῆς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. τὴν

δὲ στερεὰν λεγομένην, οὐκ ἦν καιρὸς ἀφορίζεσθαι νῦν. ὥσπερ οὖν τὴν ἐπίπεδον ὡρίζετο γωνίαν, οὕτω καὶ κάθετον τὴν τοιαύτην. ἐπεὶ ἥ γε στερεὰ κάθετος, οὐ πρὸς μίαν μόνον εὐθεῖαν ὀφείλει ποιεῖν ὀρθὰς γωνίας, ἀλλὰ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. τοῦτο γὰρ ἴδιον ἐκείνης.

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.) Τὸν ὅρον οὐ πρὸς πάντα ἀναφέρειν δεῖ τὰ μεγέθη. καὶ γὰρ γραμμῆς ὅρος ἐστὶ καὶ πέρας, ἀλλὰ πρὸς τὰ χωρία τὰ ἐν ἐπιφανείαις, καὶ τὰ στερεά. νῦν γὰρ ὅρον καλεῖ, τὴν περιοχὴν τὴν ἀφορίζουσαν ἕκαστον χωρίον, καὶ πέρας ἀφορίζεται τοῦτον τὸν ὅρον, οὐχ ὡς τὸ σημεῖον λέγεται πέρας γραμμῆς, ἀλλ᾽ ὡς τὸ περιεῖργον καὶ περικλεῖον, ἐπὶ τῶν περικειμένων. ἔτι δὲ τὸ ὄνομα οἰκεῖον τῇ ἐξ ἀρχῆς γεωμετρίᾳ, καθ᾽ ἣν τὰ χωρία ἐμέτρουν, καὶ τοὺς ὅρους αὐτῶν ἐφύλαττον ἀσυγχύτους, ἀφ᾽ ἧς καὶ τῆς ἐπιστήμης ταύτης εἰς ἐπίνοιαν ἦλθον. τὴν τοίνυν περιοχὴν τὴν ἔξωθεν, ὅρον καλέσας ὁ στοιχειωτὴς, εἰκότως αὐτὴν καὶ πέρας ἀφωρίσατο τῶν χωρίων. διὰ γὰρ ταύτης ἕκαστον τῶν περιεχομένων περατοῦται. λέγω δὲ οἷον ἐπὶ τοῦ κύκλου, τὴν μὲν περιφέρειαν ὅρον καὶ πέρας, αὐτὸ δὲ ἐπίπεδόν τι χωρίον, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως.

Σχῆμά ἐστιν ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.) Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα λέγεται πολλαχῶς καὶ κατ᾽ εἴδη διάφορα διαιρεῖται, δεῖ πρότερον τὰς διαφορὰς αὐτοῦ θεωρήσαντας, οὕτω περὶ τοῦ προκειμένου σχήματος ἐν τῷ ὁρισμῷ διελθεῖν. ἔστι μὲν οὖν σχῆμα, καὶ τὸ κατὰ τροπὴν ὑφιστάμενον καὶ ἀπὸ πάθους γιγνόμενον, πληττομένων, ἢ διαιρουμένων, ἢ ἀφαιρουμένων, ἢ προσθήκας δεχομένων, ἢ ἀλλοιουμένων τῶν σχηματιζομένων, ἢ ἄλλα πάθη ποικίλα πασχόντων. ἔστι δὲ καὶ ἀπὸ τῆς τέχνης οἷον πλαστικῆς, ἢ ἀνδριαντοποιητικῆς ἀπογεννώμενον κατὰ τὸν ἐν τῇ τέχνῃ προϋπάρχοντα λόγον. τῆς μὲν τέχνης προλαβούσης τὸ εἶδος, τῆς δὲ ὕλης δεχομένης τὴν μορφὴν, καὶ τὸ κάλλος, καὶ τὴν εὐσχημοσύνην ἐκεῖθεν. ἔστι δὲ τούτων ἔτι σεμνότερον καὶ διαπρεπέστερα σχήματα φύσεως δημιουργήματα. τὰ μὲν, ἐν τοῖς ὑπὸ σελήνην στοιχείοις συνεκτικὰ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων, τὰ δὲ κατ᾽ οὐρανὸν, τάς τε δυνάμεις αὐτῶν ἀφορίζοντα, καὶ τὰς κινήσεις. καὶ γὰρ καθ᾽ ἑαυτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα τὰ οὐράνια σώματα πολλὴν καὶ θαυμαστὴν προτείνει σχημάτων ποικιλίαν, καὶ ἄλλοτε ἄλλας δείκνυσι μορφὰς, εἰκόνας φέρουσας τῶν νοερῶν εἰδῶν, καὶ ταῖς εὐρύθμοις ἑαυτῶν χορείαις ἀπογράφονται, τὰς ἀσωμάτους καὶ ἀΰλους τῶν σχημάτων δυνάμεις. ἔστιν αὖ δὲ καὶ τούτων ἐπέκεινα κάλλη καθαρώτατα καὶ τελεώτατα τὰ σχήματα τῶν ψυχῶν, ζωῆς ὄντα μεστὰ καὶ αὐτοκίνητα προϋφεστῶτα τῶν ἑτεροκινήτων. καὶ ἀΰλως, καὶ ἀδιαστάτως ὄντα, περὶ τῶν διαστατῶν καὶ ἐνύλων, περὶ ὧν καὶ ὁ Τίμαιος ἡμᾶς ἐνεδίδαξεν τὸ δημιουργικὸν καὶ οὐσιῶδες σχῆμα τῶν ψυχῶν ἀναπλώσας. ἔστι γε μὴν καὶ τῶν ψυχικῶν σχημάτων τὰ νοερὰ πολὺ θειότερα, πάντῃ μὲν ὑπερέχοντα τῶν μεριστῶν οὐσιῶν, πάντῃ δὲ διαλάμποντα τῷ ἀμερίστῳ καὶ νοερῷ φωτί. γόνιμα δὲ καὶ δραστήρια καὶ τελεσιουργὰ τῶν ὅλων, καὶ πᾶσιν ἐξ ἴσου παρόντα καὶ ἐν αὐτοῖς μονίμως ἑστῶτα, καὶ τοῖς ψυχικοῖς σχήμασι τὴν γνῶσιν ἐπάγοντα, τῶν δὲ αἰσθητῶν τὴν παράλλαξιν εἰς τὸν οἰκεῖον ὅρον ἀνακαλούμενα. ἔστι δὲ ἄρα καὶ τούτων ἁπάντων ἐξῃρημένα τὰ τέλεια, καὶ ἑνοειδῆ καὶ ἄγνωστα, καὶ ἄφραστα σχήματα τῶν θεῶν ἐποχούμενα μὲν τοῖς νοεροῖς σχήμασι, τελεσιουργοῦντα δὲ ἡνωμένως τὰ ὅλα σχήματα, συνέχοντα δὲ τὰ πάντα τοῖς ἑαυτῶν ἑνιαίοις ὅροις. ὧν καὶ ἡ θεουργία, τὰς ἰδιότητας ἀποτυπουμένη τοῖς τῶν θεῶν ἀγάλμασιν ἄλλα ἄλλοις περιβάλλει σχήματα. καὶ τὰ μὲν, διὰ τῶν χαρακτήρων ἀρρήτως ἀπεικάζεται. καὶ γὰρ οὗτοι, τὰς ἀγνώστους δυνάμεις τῶν θεῶν ἐκφαίνουσι, τὰ δὲ διὰ τῶν μορφωμάτων καὶ τῶν τύπων ἀπομιμεῖται, τὰ μὲν ἑστῶτα, τὰ δὲ καθήμενα ποιοῦσα καὶ τὰ μὲν, καρδιοειδῆ, τὰ δὲ, σφαιροειδῆ, τὰ δὲ, ἄλλως σχηματιζόμενα. καὶ τὰ μὲν ἁπλᾶ, τὰ δὲ, σύνθετα ἐκ πλειόνων μορφῶν. καὶ τὰ μὲν σεμνὰ, τὰ δὲ, ἥμερα καὶ τὸ ἵλεων προτείνοντα τῶν θεῶν, τὰ δὲ, βλοσυρὰ κατασκευάζουσα, σύμβολά τε ἄλλα ἄλλοις προσάγουσα, κατὰ τὴν πρὸς τοὺς θεοὺς ἀνήκουσαν συγγένειαν. ἄνωθεν ἄρα τὸ σχῆμα ἀρχόμενον ἀπ᾽ αὐτῶν τῶν θεῶν, διατείνει μέχρι τῶν ἐσχάτων, καὶ τούτοις ἐμφανιζόμενον ἀπὸ τῶν προτέρων αἰτίων. δεῖ γὰρ πρὸ τῶν ἀτελῶν ἐφιστάναι τὰ τέλεια, καὶ τῶν ἐν ἄλλοις ὄντων, τὰ ὑφ᾽ ἑαυτῶν ἱδρυμένα, καὶ τῶν ἀναπεπλησμένων τῆς ἑαυτῶν στερήσεως, τὰ τὴν οἰκείαν φύσιν εἰλικρινῆ διασώζοντα. τὰ μὲν οὖν ἔνυλα σχήματα μετέχει

τέχει τῆς ὑλικῆς ἀσχημοσύνης, καὶ οὐκ ἔχει τὴν προσήκουσαν αὐτοῖς καθαρότητα, τὰ δὲ οὐράνια μεριστά ἐστι, καὶ ἐν ἄλλοις ὑφέστηκεν, τὰ δὲ ψυχικὰ, διαιρέσεως καὶ ποικιλίας μετείληφεν, καὶ ἀντιλήξεως παντοίας, τὰ δὲ νοερὰ μετὰ τῆς ἑνώσεως ἔχει τὴν εἰς πλῆθος πρόοδον. αὐτὰ δὲ τὰ τῶν θεῶν, καὶ ἀπόλυτα καὶ ἑνοειδῆ, καὶ ἁπλᾶ καὶ γεννητικὰ, πρὸ τῶν ὅλων ὑφέστηκεν, ἐν αὐτοῖς πᾶσαν ἔχοντα τὴν τελειότητα, καὶ ἀφ' ἑαυτῶν τοῖς πᾶσι προτείνοντα τὴν τελεσιουργίαν τῶν εἰδῶν. οὐκ ἄρα ἡμεῖς ἀνεξόμεθα τῶν πολλῶν λεγόντων, ὅτι τὰ αἰσθητὰ σχήματα προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως καὶ ἀλλοιώσεως τινὰς ἀπογεννῶσιν. οὐ γὰρ ἂν αἱ κινήσεις ἀτελεῖς οὖσαι, τὴν ἀρχικὴν αἰτίαν καὶ προηγουμένην ἔχοιεν τῶν ἀποτελεσμάτων. οὐδ' ἂν ἐκ τῶν ἐναντίων τὰ αὐτὰ πολλάκις ἀποτελεῖτο σχήματα. καὶ γὰρ ἐκ προσθέσεως γένοιτ' ἂν καὶ ἀφαιρέσεως ἡ αὐτὴ μορφή. ἀλλὰ ταῦτα θησόμεθα δηλοῦν ἄλλοις, εἰ τὴν γένεσιν καὶ τὸ τέλος ἀπ' ἄλλων αὐτοῖς τῶν προηγουμένων αἰτιῶν ἀφορίζεσθαι φήσομεν. οὐδ' ἄρα τὰ μὲν ἄλλα σχήματα ἀνυπόστατά ἐστι, τὰ δὲ ἐν τῇ ὕλῃ μόνον ὑφέστηκεν, ὥσπερ φασί τινες. ἀλλ' οὐδ' ὡς ἕτεροι λέγουσιν ἔστι μὲν ἔξω τῆς ὕλης, κατ' ἐπίνοιαν δὲ μόνον, καὶ κατ' ἀφαίρεσιν ἔχει τὴν ὑπόστασιν. ποῦ γοῦν ἡ ἀκρίβεια καὶ τὸ κάλλος καὶ ἡ τάξις ἡ τῶν σχημάτων ἐν τοῖς ἐξ ἀφαιρέσεως σώζεσθαι δύναται. τοιαῦτα μὲν γὰρ ὄντα οἷα τὰ αἰσθητὰ, πάμπολυ τῆς ἀνελέγκτου καὶ εἰλικρινοῦς ἀκριβείας ἀπολείπεται. προσλαμβάνοντα δὲ τὸ ἀκριβὲς καὶ τὸ τεταγμένον, καὶ τὸ τέλειον, πόθεν ταῦτα προσλήψεται; ἢ γὰρ ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν. ἀλλ' οὐκ ἦν ἐν ἐκείνοις. τὸ γὰρ ἀπὸ τοῦ μὴ ὄντος λέγειν, πάντων ἀδυνατώτατόν ἐστιν. οὐ γάρ ποτε τὰ μὲν ἀτελῆ παρήγαγεν ἡ φύσις, τὰ δὲ τέλεια, ἀνυπόστατα ἀφῆκεν. οὐ δὲ θέμις τὴν ἡμετέραν ψυχὴν ἀκριβέστερα καὶ τελειότερα μᾶλλον τεταγμένα, τοῦ νοῦ καὶ τῶν θεῶν, ἀπογεννᾶν. εἰσὶν ἄρα πρὸ τῶν αἰσθητῶν οἱ αὐτοκίνητοι λόγοι τῶν σχημάτων, καὶ οἱ νοεροὶ καὶ θεῖοι. καὶ ἡμεῖς ἀνακινούμεθα μὲν ἀπὸ τῶν αἰσθητῶν, προβαλλόμεθα δὲ τοὺς ἔνδον λόγους εἰκόνας ἄλλων ὄντας. καὶ διὰ τούτων τὰ μὲν αἰσθητὰ παραδειγματικῶς, τὰ δὲ νοερὰ καὶ θεῖα γιγνώσκομεν εἰκονικῶς. ἀναπλώμενοι γὰρ οἱ ἐν ἡμῖν λόγοι, τὰς μορφὰς τῶν θεῶν ἐπιδεικνύουσι, καὶ τὰ ἑνοειδῆ τῶν ὅλων πέρατα, δι' ὧν ἀρρήτως εἰς ἑαυτοὺς ἐπιστρέφουσι πάντα, καὶ συνέχουσιν ἐν ἑαυτοῖς. ἐν μὲν οὖν τοῖς θεοῖς καὶ γνῶσις ἐστὶν ὑπερφυὴς τῶν ὅλων σχημάτων, καὶ δύναμις γεννητικὴ, καὶ ὑποστατικὴ τῶν δευτέρων ἁπάντων. ἐν δὲ ταῖς φύσεσι, ποιητικὴν μὲν ἔχει τῶν φαινομένων σχημάτων δύναμιν, γνώσεως δὲ καὶ τῆς νοερᾶς εἰδήσεως στέρηται. ἐν δὲ ταῖς ψυχαῖς, ἡ μὲν ἄϋλος νόησις ἐστι, καὶ ἡ αὐτενέργητος γνῶσις, ἡ δὲ γόνιμος αἰτία καὶ δραστήριος οὐκ ἔστιν. ὥσπερ οὖν ἡ φύσις ποιητικῶς τῶν αἰσθητῶν σχημάτων προέστηκεν, οὕτως ἡ ψυχὴ κατὰ τὸ γνωστικὸν ἐνεργοῦσα, προβάλλει περὶ τὴν φαντασίαν, ὥσπερ εἰς κάτοπτρον τοὺς τῶν σχημάτων λόγους. ἡ δὲ ἐν εἰδώλοις αὐτὰ δεχομένη καὶ ἐμφάσεις ἔχουσα τῶν ἔνδον ὄντων, διὰ τούτων τῇ ψυχῇ παρέχεται, τὴν εἰς τὸ εἴσω στροφὴν, καὶ πρὸς ἑαυτὴν τὴν ἀπὸ τῶν εἰδώλων ἐνέργειαν. οἷον εἴ τις ἑαυτὸν ὁρῶν ἐν κατόπτρῳ, καὶ θαυμάσας τὴν τῆς φύσεως δύναμιν, καὶ τὴν ἑαυτοῦ μορφὴν ἰδεῖν τελέσειε καὶ λάβοι δύναμιν τοιαύτην, ὥστε ὅλως ὁρῶν καὶ ὁρατὸν ἀποτελεσθῆναι. καὶ γοῦν ψυχὴ τοῦτον τὸν τρόπον ἔξω αὐτῆς εἰς φαντασίαν βλέπουσα, καὶ ἐν σκιᾷ γεγραμμένα σχήματα θεωμένη, καὶ τὸ κάλλος αὐτῶν ἐκπλαγεῖσα, καὶ τὴν τάξιν, ἄγεται τοὺς ἑαυτῆς λόγους, ἀφ' ὧν καὶ ταῦτα, καὶ ἀγασθεῖσα, τὸ μὲν τούτων κάλλος, ὡς ἐν εἰδώλοις φερόμενον ἀφίησι, ζητεῖ δὲ τὸ ἑαυτῆς, καὶ εἰς τὸ εἴσω παρελθεῖν ἐθέλει, καὶ τὸν κύκλον ἐκεῖ, καὶ τὸ τρίγωνον ἰδεῖν, καὶ πάντα ἀμερῶς, καὶ ἐν ἀλλήλοις πάντα, καὶ ἐγγενέσθαι πρὸς τὰ ὁρώμενα, καὶ συμπτύξαι τὸ πλῆθος, καὶ τὰ ἐν τοῖς αἰτίοις τῶν θεῶν, καὶ ἀδύτοις κρύφια καὶ ἄρρητα σχήματα θεάσασθαι, καὶ ἐκφῆναι τὴν ἀκαλλώπιστον τῶν θεῶν εὐμορφίαν, καὶ κύκλον ἰδεῖν κέντρου παντὸς ἀμερέστερον, καὶ τρίγωνον ἀδιάστατον, καὶ τῶν ἄλλων ἕκαστον εἰς ἕνωσιν γνωστὴν ἀνῆκον. ἔστι δὴ οὖν τὸ μὲν αὐτοκίνητον σχῆμα, πρὸ τοῦ ἑτεροκινήτου, τὸ δὲ ἀμέριστον, πρὸ τοῦ αὐτοκινήτου, τὸ δὲ ἑνιαῖον, πρὸ τοῦ ἀμερίστου. πάντα γὰρ εἰς τὰς ἑνάδας ἀνιόντα τελευτᾷ. καὶ γοῦν πᾶσιν ἐκεῖθεν ἡ εἰς τὸ εἶναι πάροδος. ἀλλὰ ταῦτα μὲν κατὰ τὸ Πυθαγόρειον ἀρέσκον ἐμηκύναμεν. ὁ δὲ γεωμέτρης, τὸ ἐν τῇ φαντασίᾳ σχῆμα θεωρῶν, καὶ τοῦτο πρώτως ὁριζόμενος, εἰ καὶ τοῖς αἰσθητοῖς ὁ λόγος ἐφαρμόττει, δευτέρως τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον φησὶν εἶναι τὸ σχῆμα. σὺν ὕλῃ γοῦν αὐτὸ λαβὼν, καὶ ὡς διαστατὸν φανταζόμενος, εἰκότως πεπερασμένον, οὐ δὲ ἑαυτοῦ ὅρος, ἀλλ' ἄλλο μὲν ἐν αὐτῷ τὸ ὁρίζον, ἄλλο δὲ ὁριζόμενον, οὐδὲ ἐν αὐτῷ ἐστιν ἀλλ' ὑπ' αὐτοῦ περιέχεται. τῷ γὰρ

ποσῷ, συμφύεται, καὶ μετ᾽ ἐκείνου συνυφίσταται, καὶ γίγνεται αὐτῷ ὑποκείμενον τὸ ποσόν, λόγος δὲ ἐκείνου καὶ μορφὴ τὸ σχῆμα καὶ τὸ εἶδος. περατοῖ γὰρ αὐτό, καὶ χαρακτῆρα καὶ ὅρον αὐτῷ κοινὸν δὲ προστίθησιν, ἢ ἁπλοῦν ἢ σύνθετον. ἐπειδὴ γὰρ καὶ αὐτὸ τῆς τοῦ πέρατος καὶ ἀπείρου δυοειδῆ πρόοδον ἐν τοῖς ἰδίοις εἴδεσι προτείνει, καθάπερ δὴ καὶ ὁ τῆς γωνίας λόγος, τὸν μὲν ἕνα ὅρον, καὶ τὸ ἁπλοῦν εἶδος ἐπάγει τοῖς ὑφ᾽ ἑαυτοῦ περιεχομένοις, κατὰ τὸ πέρας, τοὺς δὲ πολλοὺς, κατὰ τὴν ἀπειρίαν, καὶ διὰ τοῦτο, πᾶν τὸ ἐσχηματισμένον σχῆμα καλῶν, καὶ τὸ ἔνυλον καὶ τὸ ἐν ποσῷ συνυπάρχον περιεχόμενον, εἰκότως αὐτὸ προσείρηκεν. ὁ δὲ Ποσειδώνιος πέρας συγκλεῖον ἀφορίζεται τὸ σχῆμα, τὸν λόγον τοῦ σχήματος χωρίζων τῆς ποσότητος. καὶ αἴτιον αὐτὸν εἶναι τιθέμενος τοῦ ὡρίσθαι καὶ πεπεράσθαι, καὶ τῆς περιοχῆς. τὸ γὰρ κύκλου ἕτερόν ἐστι τῆς συγκλειομένης, καὶ τὸ πέρας τοῦ πεπερασμένου. καὶ δοκεῖ πως ὁ μὲν εἰς τὸν ἔξω περικείμενον ὅρον ἀποβλέπειν, ὁ δὲ εἰς ὅλον τὸ ὑποκείμενον, ὥστε τὸν κύκλον, ὁ μὲν ἐρεῖ καθ᾽ ὅλον τὸ ἐπίπεδον εἶναι σχῆμα καὶ τὴν ἔξω περιοχήν, ὁ δὲ, κατὰ τὴν περιφέρειαν ἐνδείκνυται. καὶ ὁ μέν τι τὸ ἐσχηματισμένον ἀφορίζεται, καὶ σὺν τῷ ὑποκειμένῳ θεωρούμενον, ὁ δὲ, ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ σχήματος αὐτὸν τὸν περατοῦντα καὶ συγκλείοντα τὸ ποσὸν ἐμφανίζειν ἐθέλει. εἰ δέ τις λογικὸς ἀνὴρ καὶ κομψὸς αἰτιῷτο τὸν Εὐκλείδου λόγον, ὡς ἀπὸ τῶν εἰδῶν τὸ γένος ἀφοριζόμενον, τὸ γὰρ ὑφ᾽ ἑνὸς ὅρου περιεχόμενον, καὶ τὸ ὑπὸ πλειόνων, εἴδη τοῦ σχήματος, λεκτέον ἂν εἴη πρὸς αὐτόν, ὅτι καὶ τὰ γένη τὰς δυνάμεις προείληφε τῶν εἰδῶν ἐν ἑαυτοῖς, καὶ ὅτι ἀπὸ τῶν δυνάμεων τῶν ἐν τοῖς γένεσιν ἐθέλουσιν αὐτὰ σαφῆ ποιεῖν οἱ παλαιοί, δοκοῦσι μὲν ἀπὸ τῶν εἰδῶν ἐπιχειρεῖν, κατὰ δὲ τὸ ἀληθὲς αὐτὰ ἀφ᾽ ἑαυτῶν ἀναδιδάσκουσι, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς δυνάμεων. ὁ τοίνυν λόγος τοῦ σχήματος εἷς ὢν, περιέχει τὰς τῶν πολλῶν σχημάτων διαφορότητας, κατὰ τὸ πέρας, τὸ ἐν αὐτῷ, καὶ τὸ ἄπειρον. καὶ ὁ τοῦτον ὁριζόμενος, οὐκ ἂν ἄτοπος εἴη διὰ τοῦ ὁρισμοῦ τὰς διαφορὰς τῶν ἐν αὐτῷ δυνάμεων περιλαμβάνων, ἀλλὰ πόθεν πρόεισιν ὁ τοῦ σχήματος λόγος, καὶ ἀπὸ ποίων αἰτίων τελεῖται, λέγωμεν δή. ὅτι πρῶτον μὲν ἐκ τοῦ πέρατος ὑφίσταται, καὶ τοῦ ἀπείρου, καὶ τοῦ ἐκ τούτων μεμιγμένου. διὸ καὶ αὐτὸς τὰ μὲν, ἀπογεννᾷ κατὰ τὸ πέρας τῶν εἰδῶν, τὰ δὲ, κατὰ τὸ ἄπειρον, τὰ δὲ, κατὰ τὸ μικτόν. τοῖς μὲν περιφερέσι, τὴν τοῦ πέρατος ἰδέαν ἐπάγων, τοῖς δ᾽ εὐθυγράμμοις τὴν τοῦ ἀπείρου. τοῖς δὲ ἐκ τούτων τοῦ μικτοῦ. δεύτερον δὲ ἀπὸ τῆς ὁλότητος τελεῖται τῆς εἰς τὰ ἀνόμοια μέρη διακεκριμένης. ὅθεν δὴ καὶ αὐτὸς ἑκάστῳ τῶν εἰδῶν ἐπιφέρει τὸ ὅλον, καὶ τὸ σχημάτων ἕκαστον εἰς διάφορα αὐτῶν εἴδη τέμνεται. καὶ γὰρ ὁ κύκλος εἰς ἀνόμοια τῷ λόγῳ, καὶ ἕκαστον τῶν εὐθυγράμμων διαιρετόν ἐστιν. ὃ καὶ αὐτὸς ὁ στοιχειωτὴς ἐν ταῖς διαιρέσεσι πραγματεύεται, τὰ μὲν εἰς ὅμοια τὰ δοθέντα σχήματα διαιρῶν, τὰ δὲ, εἰς ἀνόμοια. τρίτον ἀπὸ τοῦ παντελοῦς πλήθους δυνάμεως, καὶ διὰ τοῦτο παντοίας μορφὰς προτείνει καὶ γεννᾷ τελειοειδεῖς λόγους τῶν σχημάτων. καὶ ἑαυτὸν ἐξελίττων οὐ παύεται μέχρις ἂν εἰς ἔσχατον προέλθῃ, καὶ πᾶσαν ἐκφήνῃ τὴν ποικιλίαν τῶν εἰδῶν. καὶ ὥσπερ ἐκεῖ, τὸ ἓν ἐν τῷ ὄντι, καὶ τὸ ὂν ἐν τῷ ἑνὶ δείκνυται συνυπάρχον, οὕτω δὴ καὶ αὐτὸς ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις τὰ περιφερῆ, καὶ ἀνάπαλιν τὰ εὐθύγραμμα ἐν τοῖς περιφερέσι συμπλεγμένα δείκνυσι. καὶ τὴν ὅλην ἑαυτοῦ φύσιν καθ᾽ ἕκαστον οἰκείως προτείνει, πάντα τε ταῦτα ἐν πᾶσιν ὄντα, καὶ τὸ ὅλον ἔν τε πᾶσιν ὁμοῦ καὶ ἑκάστῳ χωρίς. ταύτην οὖν τὴν δύναμιν, ἀπ᾽ ἐκείνης ἔχει τῆς τάξεως. τέταρτον. ἀπὸ τοῦ πρώτου τῶν ἀριθμῶν ἀποδέχεται τὰ μέτρα τῆς προόδου τῶν εἰδῶν, ὅθεν καὶ ὑφίστησι πάντα κατ᾽ ἀριθμούς, τὰ μὲν, ἁπλουστέρους, τὰ δὲ, συνθετωτέρους. τρίγωνα γὰρ καὶ τετράγωνα, καὶ πεντάγωνα, καὶ πάντα τὰ πολύγωνα συμπρόεισι ταῖς ἐπ᾽ ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν ἐξαλλαγαῖς. διὰ ποίαν δὲ αἰτίαν τοῦτο γίγνεται, τοῖς μὲν πολλοῖς ἄγνωστον, τοῖς δὲ εἰδόσι, πῶς μὲν ἀριθμὸς, πῶς δὲ τὸ σχῆμα, καταφανὴς ὁ τῆς αἰτίας ἀπολογισμός. πέμπτον ἐπ᾽ ἄλλης ὁλότητος δευτέρας καὶ ὁμόχροα κατηρημένης πληροῦται τῆς εἰς τὰ ὅμοια διαιρέσεως τῶν εἰδῶν. καθ᾽ ἣν καὶ ὁ τριγωνικὸς λόγος εἰς τρίγωνα, καὶ ὁ τετραγωνικὸς εἰς τετράγωνα διαιρεῖται, καὶ τοῦτο τὸ ὅπερ ἔφην καὶ ἐν ταῖς εἰκόσι γυμναζόμενοι ποιοῦμεν, πολὺ πρότερον ἐν ταῖς ἀρχαῖς προϋφεστηκός. εἰς δὲ ταύτας ἀποβλέποντας τὰς ἀποδόσεις, πολλὰ δυνάμεθα περὶ τῶν σχημάτων αἰτιολογεῖν, εἰς τὰς ἀρχὰς ἀναγόμενοι, τὰς πρὸ αὐτῶν. καὶ μὲν ἐν κοινότερον σχῆμα, τοιαύτην ἔλαχε τάξιν, καὶ ἀπὸ τοσούτων αἰτιῶν παραδέχεται τὴν τελεσιουργίαν. ἐντεῦθεν δὲ πρόεισιν ἐπὶ τὰ γένη τῶν θεῶν, καὶ κατ᾽ ἄλλας ἰδέας ἄλλοις ἀπονέμεται. καὶ πρὸς ἄλλας ἐνεργεῖ, τοῖς μὲν ἁπλούστερα, τοῖς δὲ ἐκ τούτων ἀποδιδόναι σχήματα. καὶ τοῖς μὲν, τὰ πρωτερ-

πραγματεύεται Εὐκλείδης ἐν τῷ περὶ διαιρέσεων.

πρωτουργὰ, καὶ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἀπογεννώμενα. τοῖς δὲ τῶν στερεῶν ἐπιβαίνουσιν ὄγκων τὰ προσήκοντα τῶν ἐν τοῖς στερεοῖς σχημάτων ἀφορίζων, πάντων μὲν ἐν πᾶσιν ὄντων· αἱ γὰρ τῶν θεῶν μορφαὶ, παντελεῖς εἰσι, καὶ πλήρεις τῶν ὅλων δυνάμεων, ἀλλὰ τῇ ἰδιότητι ἄλλου κατ' ἄλλο προβεβλημένης. ὁ μὲν γὰρ κυκλικῶς, καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν ὡσαύτως.

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου, σημεῖον καλεῖται.)

Τὸ πρώτιστον καὶ ἁπλούστατον τῶν σχημάτων καὶ τελειότατον, ὁ κύκλος ἐστί. τῶν μὲν γὰρ στερεῶν πάντων ὑπερφέρει, τῷ ἐν ἁπλουστέρᾳ τάξει τὴν ὕπαρξιν ἔχειν, τῶν δὲ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ὑφισταμένων, τῇ ὁμοιότητι καὶ ταυτότητι τὴν ὑπεροχὴν ἔλαχεν. καὶ ἔστιν ἀνάλογον τῷ πέρατι καὶ τῇ μονάδι, καὶ ὅλως τῇ ἀμείνονι συστοιχίᾳ. διὸ καὶ τῶν ἐγκοσμίων καὶ τῶν ὑπερκοσμίων τὰς διαιρέσεις ποιούμενος, ἀεὶ τῆς θειοτέρας φύσεως εὑρήσεις ὄντα τὸν κύκλον. εἰ μὲν γὰρ εἰς οὐρανὸν καὶ γένεσιν διαιρεῖς τὸ πᾶν, τῷ μὲν οὐρανῷ τὸ κυκλικὸν εἶδος ἀποδώσεις, τῇ δὲ γενέσει, τὸ εὐθύ. καὶ γὰρ ὅσον ἐστὶν ἐν τοῖς γεννητοῖς κυκλικὸν, ἐντεῦθεν ταῖς μεταβολαῖς καὶ τοῖς σχήμασιν ἄνωθεν ἀπὸ τῆς οὐρανοῦ καθήκει. διὰ γὰρ τὴν ἐκείνου κυκλοφορίαν, ἡ γένεσις ἀνακυκλεῖται πρὸς ἑαυτὴν, καὶ τὸ ἀνίδρυτον περιαλλάξεως εἰς τεταγμένην ἀνάγει περίοδον. εἰ δὲ εἰς ψυχὴν καὶ νοῦν τὰ ἀσώματα διακρίνοις, νοερὸν μὲν ἂν εἴποις εἶναι τὸν κύκλον, ψυχικὸν δὲ τὸ εὐθύ. διὸ καὶ ἡ ψυχὴ κατὰ τὴν πρὸς τὸν νοῦν, κύκλῳ γὰρ κινεῖται φησὶν, ὅτι νοῦν μιμεῖται. ἡ δὲ γένεσις τῆς ψυχῆς, τὸ γὰρ ἄλλοτε ἐν ἄλλοις εἴδεσι γίγνεσθαι, ψυχῆς ἴδιον. εἰ δὲ εἰς σῶμα καὶ ψυχὴν ἐθέλεις διαιρεῖν, πᾶν μὲν τὸ σωματικὸν τῆς τοῦ εὐθέος μερίδος θήσεις, πᾶν δὲ τὸ ψυχικὸν τῆς τοῦ κύκλου ταυτότητος καὶ ὁμοιότητος μετέχειν. τὸ μὲν γὰρ συνθετόν ἐστι καὶ ποικίλον, ταῖς δυνάμεσιν, ὥσπερ τὰ εὐθύγραμμα σχήματα, τὸ δὲ ἁπλοῦν καὶ νοερὸν αὐτοκίνητον, καὶ αὐτενέργητον πρὸς ἑαυτὸ ἐστραμμένον, καὶ περὶ αὐτὸ ἐνεργοῦν. ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος, διὰ τῶν εὐθυγράμμων ὑποστήσας τὰ στοιχεῖα τοῦ παντὸς, τὴν κατὰ κύκλον αὐτοῖς κίνησιν καὶ διαμόρφωσιν ἐκ τῆς ἐποχουμένης τῷ κόσμῳ δέδωκε ψυχῆς. ἀλλ' ὅτι μὲν, πανταχοῦ τὸ πρωτεῖον ὁ κύκλος ἔλαχεν ὡς πρὸς τὰ ἄλλα σχήματα, δῆλον ἐκ τῶν προειρημένων. δεῖ δὲ καὶ τὴν τάξιν αὐτοῦ σαφῶς θεωρεῖν ἄνωθεν ἀρχομένην, καὶ τελευτῶσαν ἄχρι τῶν ἐσχάτων, καὶ πάντα τελειοῦσαν κατὰ τὴν ἐπιτηδειότητα τῶν δεχομένων αὐτοῦ τὴν μετουσίαν. τοῖς μὲν οὖν θεοῖς ἐπιστροφὴν καὶ ἕνωσιν παρέχεται, πρὸς αὐτὰς ἑαυτῶν αἰτίας, καὶ τὸ μένειν ἐν ἑαυτοῖς, καὶ μὴ ἐξίστασθαι τῆς οἰκείας μακαριότητος, τὰς μὲν ἄκρας αὐτῶν ἑνώσεις ὡς κέντρα προθησάμενος, ἐφεστὰς τοῖς δευτέροις, τὰ δὲ πλήθη τῶν ἐν αὐτοῖς δυνάμεων, περὶ ἐκεῖνα ἀτρέπτως ἱδρύων, καὶ διὰ τὴν ἐκείνων ἁπλότητα συνέχων, ταῖς δὲ νοεραῖς οὐσίαις, τὸ πρὸς αὐτὰς ἐνεργεῖν διαιωνίως παρέχων, καὶ περὶ ἑαυτῷ πληροῦσθαι τῆς γνώσεως, ἐν ἑαυταῖς τε συνῃρηκέναι τὰ νοητὰ, καὶ ἐφ' ἑαυτῶν τὰς νοήσεις τελείας. πᾶς γὰρ νοῦς τὸ νοητὸν ἑαυτῷ προτείνει, καὶ ἔστι μὲν ὡς κέντρον ἐστὶ τῷ νῷ. ὁ δὲ νοῦς συνέχει περὶ αὐτὸ, καὶ ἐρᾷ καὶ ἑνίζεται περὶ αὐτῷ ταῖς νοεραῖς ὅλαις πανταχόθεν ἐνεργείαις. ταῖς δὲ ψυχαῖς ἐπιλάμπει, τὸ αὐτοζῶον, τὸ αὐτοκίνητον, πρὸς νοῦν ἐστράφθαι, καὶ περιχορεύειν τὸν νοῦν, τὸ ἀποκαθίστασθαι κατὰ τὰς οἰκείας περιόδους ἀνελισσούσας, τοῦ νοῦ τὴν ἀμέρειαν. πάλιν γὰρ αἱ μὲν νοεραὶ τάξεις, ὥσπερ τὰ κέντρα τὴν ὑπεροχὴν ἔχουσι πρὸς τὰς ψυχὰς, αἱ δὲ ψυχαὶ περὶ αὐτὰς κατὰ κύκλον ἐνεργοῦσι. καὶ γὰρ πᾶσα ψυχὴ, κατὰ μὲν τὸ νοερὸν ἑαυτῆς, καὶ αὐτὸ τὸ ἓν, τὸ ἀκρότατον κεκέντρωται, κατὰ δὲ τὸ πλῆθος, κυκλικῶς περιπορεύεται περιπτύξασθαι ποθοῦσα, τὸν ἑαυτῆς νοῦν. τοῖς δὲ οὐρανίοις σώμασι, τὴν πρὸς τὸν νοῦν ἀφομοίωσιν, τὴν ὁμοιότητα, τὴν ὁμαλότητα, τὴν ἐν πέρασι τῶν ὅλων περιοχὴν, τὰς ἐν μέτροις ὡρισμένοις ἀνακυκλήσεις, τὴν ἀΐδιον ὑπόστασιν, τὸ ἄναρχον καὶ ἀτελεύτητον, ἅπαντα τοιαῦτα. τοῖς δὲ ὑπὸ σελήνην στοιχείοις, τὴν περίοδον τὴν ἐν ταῖς μεταβολαῖς, τὴν πρὸς τὴν οὐρανὸν ἀπείκασιν, τὸ ἐν τοῖς γεννητοῖς ἀγένητον, καὶ ἐν τοῖς κινουμένοις ἑστὼς, καὶ ἐν τοῖς μεριστοῖς ἀφωρισμένον. πάντα γὰρ ἀεὶ ἐστὶ διὰ τὴν κύκλον τῆς γενέσεως, καὶ τὸ ἰσοκρατὲς ἐν πᾶσι, διὰ τὴν ἀνταπόδοσιν τῆς φθορᾶς. εἰ γὰρ μὴ ἀνέκαμπτεν ἡ γένεσις, ταχὺ ἂν ἡ τάξις αὐτῶν διελύθη, καὶ ἡ σύμπασα διακόσμησις. τοῖς δὲ αὖ ζώοις καὶ φυτοῖς τὴν ἐν ταῖς ἀπογεννήσεσιν ὁμοιότητα ἐνδίδωσιν. ἐκ τε γὰρ τῶν σπερμάτων ταῦτα γίγνεται

καὶ σπέρματα ἐκ τούτων, γένεσίς τε ἐξ ἀλλήλων ἀποτελεῖται καὶ ἀνακύκλησις, ἀπὸ τε ἀτελοῦς, εἰς τὸ τέλειον, καὶ ἔμπαλιν, ἵνα καὶ φθίσις ᾖ μετὰ τῆς γενέσεως. τοῖς δέ γε παρὰ φύσιν λεγομένοις τάξιν ἐπιτίθησι, καὶ τὴν ἀοριστίαν αὐτῶν εἰς ὅρον περιάγει καὶ διακοσμεῖ. καὶ τοῦθ' ὁμοίως, τοῖς τελευταίοις ἴχνεσι τῆς ἑαυτοῦ δυνάμεως. διὸ καὶ καθ' ἀριθμοὺς ὡρισμένους ἀνακυκλεῖται, καὶ οὐ φορὰ μόνον, ἀλλὰ καὶ ἀφορία, περὶ τὰς περιτροπὰς ὑφίστανται τῶν κύκλων, ὡς ὁ τῶν μουσῶν λόγος. καὶ πάντα τὰ κακά, ἃ καὶ ἀπέρριπται τῶν θεῶν, εἰς τὸν τῶν θνητῶν τόπον, ἀλλὰ περιπολεῖ καὶ ταῦτα φησὶν ὁ Σωκράτης, καὶ μετέσι καὶ τούτοις τῆς κυκλικῆς περιόδου τάξεως, ἵνα μηδὲν ἄκρατον ᾖ καὶ κακόν, μηδὲ ἔρημον τῶν θεῶν. ἀλλ' ἡ τελεσιουργὸς πρόνοια τῶν ὅλων, καὶ τὴν ἀπειρίαν τῶν κακῶν ποικιλίαν εἰς ὅρον περιάγει καὶ τάξιν τῇ αὐτοῖς πρεπούσῃ. πάντα ἄρα διακοσμοῦσιν ἡμῖν ὁ κύκλος, ἄχρι τῶν μεταδόσεων τῶν τελευταίων, καὶ οὐδὲν ἄμοιρον ἀφῆκεν τῆς ἑαυτοῦ μεταδόσεως, κάλλος καὶ ὁμοιότητα, καὶ εἰδοποιίαν καὶ τελειότητα χορηγῶν. διὸ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, τὰ μέσα κέντρα συντρέχει τῇ προόδῳ συμπάσης τῶν ἀριθμῶν, τῆς ἀπὸ μονάδος ἄχρι δεκάδος ἀνελισσομένης. ἡ γὰρ πεμπὰς καὶ ἡ ἑξάς, ἐκ πάντων τὴν κυκλικὴν ἐπιδείκνυται δύναμιν, ἐν ταῖς ἀφ' ἑαυτῶν προόδοις εἰς αὐτὰς πάλιν ἐπιστρεφόμεναι. πολλαπλασιαζόμεναι γὰρ εἰς αὐτὰς καταλήγουσι. πρόοδος μὲν οὖν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἰκών, εἰς πλῆθος ἐκτεινόμενος, ἐπιστροφῆς δέ, ἡ εἰς τὸ αὐτὸ κατάληξις εἶδος, τὸ δὲ συναμφότερον ἡ κυκλικὴ περιέχεται δύναμις, ἀνεγείρουσα μὲν ἀπὸ τοῦ μένοντος, οἷον κέντρου τὰς γεννήσεις τοῦ πλήθους, συνελίσσουσα δὲ μετὰ τὰς ἀπογεννήσεις ἐπὶ τὰ αἴτια τὸ πλῆθος. δύο τοίνυν ἀριθμοί, τὸ μέσον πάντων κατέχουσι, τὴν ἰδιότητα, καὶ ὁ μέν, πάντως ἡγεῖται τοῦ ἐπιστρεπτικοῦ γένους τῶν ἀρρένων, καὶ τῆς περιττῆς φύσεως, ὁ δέ, πᾶν τὸ θῆλυ, καὶ ἀρτίας καὶ τῆς γονίμου σειρᾶς ἀνακαλεῖται πρὸς τὰς ἀρχάς, κατὰ τὴν κυκλικὴν δύναμιν. ἀλλὰ ταῦτα μὲν μέχρι τούτων διαπεπεράνθω. τὴν δὲ μαθηματικὴν ἀπόδοσιν τοῦ κύκλου θεωρήσωμεν, εἰς πᾶν ἀκριβείας ἥκουσαν. σχῆμα μὲν οὖν αὐτὸν ἔθετο διότι δὴ πεπεράσται, καὶ περιέχεται πανταχόθεν ὑφ' ἑνὸς ὅρου, καὶ οὐκ ἔστι τῆς ἀπείρου φύσεως, ἀλλὰ τῷ πέρατι σύστοιχος. καὶ ἐπίπεδον δ' αὖ καθ' ὅσον τῶν σχημάτων, ἢ ἐν ἐπιφανείαις ὁρωμένων, ἢ ἐν στερεοῖς, ὁ κύκλος τῶν ἐπιπέδων, ἐστὶ τὸ πρωτίστον, ἁπλότητι μὲν τὸ στερεὸν ὑπερφέρον, μονάδι δὲ τὰ ἐπίπεδα λόγον ἔχων. ὑπὸ μιᾶς δὲ γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς δὲ ταύτην τὴν γραμμὴν ἴσας ἔχον τὰς πάσας, ὡς τῷ ἑνὶ προσήκοντα, καὶ κατὰ τὸ ἐν ἀφοριζόμενον, τῇ δὲ ποικιλίᾳ τῶν περικειμένων ἔξωθεν ὅρων οὐ παραδεχόμενον, πρὸς δὲ ταύτην τὴν γραμμὴν ἴσας ἔχον τὰς πάσας τὰς ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς αὐτοῦ κειμένων. διότι καὶ τῶν ὑπὸ μιᾶς ὁριζομένων γραμμῆς, τὰ μὲν ἐκ μέσου πάσας ἴσας ἔχει, τὰ δέ, οὐ πάσας. καὶ γὰρ ἡ ἔλλειψις ὑπὸ μιᾶς περιέχεται γραμμῆς, ἀλλ' οὐ πᾶσαι αἱ πρὸς αὐτῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσίν ἀλλὰ δύο μόνον. καὶ τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐπίπεδον ὑπὸ τῆς κυσσοειδοῦς γραμμῆς, μίαν ἔχει τὴν περιέχουσαν, ἀλλ' οὐκέτι κέντρον ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι ἴσαι. ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον ἐν τῷ κύκλῳ πάντως ἐν ἐστὶ σημεῖον, πλείω γὰρ ἑνὸς οὐκ ἔστι κέντρα, διὰ τοῦτο προσέθηκε τοῦ ἀφ' ἑνὸς σημείου τὰς πρὸς τὸν ὅρον τοῦ κύκλου προσπιπτούσας ἴσας εἶναι γραμμάς. ἄπειρα μὲν γὰρ ἐντὸς αὐτοῦ σημεῖα, τῶν δὲ ἀπείρων, ἓν μόνον, τὴν τοῦ κέντρου δύναμιν ἔχει. καὶ ἐπειδὴ τὸ ἐν τοῦτο σημεῖον ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ προσπίπτουσαι ἴσαι εἰσίν, ἢ ἐντός ἐστι τοῦ κύκλου, ἢ ἐκτός. καὶ γὰρ ἕκαστος κύκλος ἔχει πόλον, ἀφ' οὗ αἱ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγόμεναι ἴσαι τυγχάνουσιν οὖσαι, διὰ τοῦτο προσέθηκεν τὸ τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων σημείων, καὶ οὐδὲ τοῦτο μάτην πεποίηκεν τὸ κέντρον μόνον λαμβάνων, ἀλλ' οὐ τὸν πόλον, ἐπείπερ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ πάντα θεωρεῖν ἐθέλει. ὁ δὲ πόλος, τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου μετεωρότερός ἐστιν. ἀναγκαίως ἄρα καὶ ἐπὶ τέλει προσέθηκεν, ὅτι τοῦτο τὸ σημεῖον, ὃ δὴ κεῖται μὲν ἐντὸς τοῦ κύκλου, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπ' αὐτοῦ προσπίπτουσαι πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι εἰσί κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. δύο γὰρ μόνα σημεῖα τοιαῦτά ἐστιν, ὁ πόλος καὶ τὸ κέντρον, ἀλλ' ὁ μὲν ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ ἐντός. οἷον, εἰ νοήσειας γνώμονα κατὰ τὸ κέντρον ἑστῶτα τοῦ κύκλου τὸ ἄκρον αὐτοῦ τὸ ἄνω πόλος ἐστί. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπ' αὐτοῦ φερόμεναι ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις ἐπιδείκνυνται. κατὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐν τῷ κώνῳ, ἡ τοῦ παντὸς κορυφὴ πόλος ἐστί, τοῦ κατὰ τὴν βάσιν κύκλου. διώρισται οὖν ἐνταῦθα, τί μὲν ὁ κύκλος ἐστί, τί δὲ τὸ κέντρον καὶ ἐν τῷ κύκλῳ τιθεμένη περιφέρεια, τί δὲ τὸ ὅλον σχῆμα. πάλιν οὖν ἐκ τούτων, εἰς τὴν

τῶν

ὅτι ἐν ἐλλείψει τὰ ἐκ τοῦ κέντρου δύο μόναι ἴσαι εἰσὶ ... ἴσας ἀπὸ τοῦ κέντρου

τῶν παραδειγμάτων ἀναδράμωμεν θεωρίαν, καὶ νοήσωμεν ἐν ἐκείνοις, τὸ μὲν κέντρον, ἐπέχειν κατὰ τὴν ἑνιαίαν καὶ ἀμέριστον, καὶ μόνιμον ὑπεροχήν, τὰς δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου διαστάσεις, τὰς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς προόδους, εἰς πλῆθος ἄπειρον κατὰ τὴν δύναμιν, τὴν δὲ περιφέρειαν τοῦ κύκλου, κατὰ τὴν ἐπιστροφὴν τῶν προελθόντων, τὴν ἐπὶ τὸ κέντρον, καθ' ἣν ἑλίσσεται τὰ πλήθη τῶν δυνάμεων εἰς τὴν ἑαυτῶν ἕνωσιν, καὶ πάντα εἰς ἐκείνην ἀποβλέπει καὶ περὶ ἐκείνην ἐνεργεῖν ἐφίεται· καὶ ὥσπερ ἐν τῷ κύκλῳ ἅμα ἐστὶ τὸ κέντρον, αἱ διαστάσεις, ἡ ἐκτὸς περιφέρεια, οὕτω δὴ καὶ ἐν ἐκείνοις, οὐ τὰ μὲν προϋπάρχει κατὰ χρόνον, τὰ δὲ ἐπιγίγνεται, ἀλλ' ὁμοῦ μὲν πάντα, καὶ ἡ μονή, καὶ ἡ πρόοδος, καὶ ἡ ἐπιστροφή. διαφέρει δὲ ταῦτα ἐκείνων τῷ τὰ μὲν, ἀδιαιρέτως εἶναι καὶ ἀδιαστάτως, τὰ δὲ διῃρημένως, ἀλλαχοῦ μὲν τὸ κέντρον, ἀλλαχοῦ δὲ τὰς ἐκ τοῦ κέντρου γραμμάς, ἀλλαχοῦ δὲ τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν τὸν κύκλον ὁρίζουσαν. ἐκεῖ δὲ ἐν ἑνὶ πάντα. κἂν τὸ οἷον κέντρον λάβῃς, ἐν τούτῳ πάντα εὑρήσεις, κἂν τὴν διεσπασμένην ἀπὸ τούτου πρόοδον, καὶ ταύτην ἔχουσαν τὰ πάντα, κἂν τὴν ἐπιστροφὴν ὡσαύτως. πάντ' οὖν ἐν ἀλλήλοις ἰδών, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς διαστάσεως ἐλάττωσιν ἀφελών, καὶ τὴν θέσιν ταύτην περὶ ἣν ὁ μερισμός ἀφανίσας εὑρήσεις τὸν ὄντως ὄντα κύκλον αὐτόν, ἐν αὐτῷ προϊόντα, καὶ ὁρίζοντα ἑαυτόν, καὶ ἐνεργοῦντα τὰ πρὸς ἑαυτὸν ἕν τε ὄντα καὶ πολλὰ μένοντα, καὶ προϊόντα, καὶ ἐπιστρέφοντα. καὶ τὸ μὲν ἀμερέστατον ἑαυτοῦ καὶ ἑνικώτατον ἱδρύοντα σταθερῶς, πάντῃ δὲ ἀπὸ τούτου κινούμενον κατὰ τὸ εὐθύ, καὶ τὴν ἀπειρίαν τὴν ἐν αὐτῷ, συνελισσόμενον δὲ εἰς τὸ ἓν ἀφ' ἑαυτοῦ, καὶ διὰ τῆς ὁμοιότητος καὶ ταυτότητος ἀνεγειρόμενον εἰς τὸ ἀμερὲς τῆς ἑαυτοῦ φύσεως, καὶ τὸ κεκρυμμένον ἐν αὐτῷ τοῦ ἑνός. ὃ δὴ καὶ ἐγκολπισάμενος καὶ περιθέων, ὁμοιοῦται πρὸς αὐτὸ καὶ τὸ ἑαυτοῦ πλῆθος. καὶ γὰρ τὸ ἐπιστρέφον μιμεῖται τὸ μένον, καὶ τὸ περιφερές, οἷον κέντρον ἐστὶ διαστάν, καὶ σπεύδει πρὸς αὐτὸ κεντρωθῆναι αὖθις, καὶ ἐν πρὸς ἐκεῖνο γενέσθαι. καὶ ἀφ' οὗ τὴν ἀρχὴν ἔσχεν ἡ πρόοδος, εἰς τοῦτο περατῶσαι τὴν ἐπιστροφήν. στοιχεῖον γὰρ πανταχοῦ τὸ κέντρον ἐν ἑκάστου τάξει προτεταγμένον τοῖς περὶ αὐτὸ τὴν ὑπόστασιν λαχοῦσι, καὶ πασῶν ἀρχηγὸν τῶν πληθυνομένων προόδων. ὃ καὶ τὸ μαθηματικὸν κέντρον ἀποτυποῦται πάσας τὰς ἀφ' ἑαυτοῦ πρὸς τὴν περιφέρειαν γραμμὰς περιέχον, καὶ τῇ ἰσότητι αὐταῖς εἰκόνα τῆς οἰκείας ἑνώσεως παρέχον. οὕτω δὲ καὶ τὰ λόγια τὸ κέντρον ἀφορίζεται. κέντρον ἀφ' οὗ πᾶσαι μέχρις ἂν τύχον ἴσαι ἔασιν. ἀλλ' ὡς μὲν τῆς διαστάσεως ἀρχὴ τῶν γραμμῶν, τῷ ἀφ' οὗ σημαίνεται, ὡς δὲ μέσον τῆς περιφερείας, τῷ πρὸς ὅ. πρὸς γὰρ τὸ κέντρον αὕτη συνάγεται κατὰ πᾶσαν ἑαυτήν. εἰ δὲ δεῖ καὶ τὴν αἰτίαν εἰπεῖν τῆς πρώτης καθ' ἣν ἀνεφάνη τὸ κυκλικὸν σχῆμα καὶ ἐτελειώθη, τὴν ἀκροτάτην εἴποιμι τάξιν τῶν νοητῶν. τὸ μὲν γὰρ κέντρον, τῇ τοῦ πέρατος αἰτίᾳ προσέοικεν, αἱ δὲ ἀπὸ τούτου γραμμαί, καὶ τῷ πλήθει ἄπειροι καὶ τῷ μεγέθει, ὅσον ἐφ' ἑαυτῆς τὴν ἀπειρίαν ἀποτυποῦνται. ἡ δὲ περατοῦσα τὴν τούτων ἀόριστον ἔκτασιν γραμμή, καὶ πάλιν εἰς τὸ κέντρον συνάγουσα αὐτὴν τῷ ἐκ τούτων ὑποστάντι κρυφίῳ διακόσμῳ, ὃν καὶ Ὀρφεὺς κατὰ κύκλον φησὶ φέρεσθαι. Τὸ δ' ἀπείρεσιον, κατὰ κύκλον ἀτρύτως ἐφορεῖτο. πρὸς γὰρ τὸ νοητὸν κινούμενον νοητῶς καὶ οἷον κέντρον ἐκεῖνο τῆς ἑαυτοῦ φορᾶς ἔχον, εἰκότως λέγεται κυκλικῶς ἐνεργεῖν. διὸ καὶ ἀπὸ τούτων πρόεισιν ὁ τριαδικὸς θεός, καὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων πρόοδον τὴν πρεσβυτάτην αἰτίαν ἐν αὐτῷ περιλαβών. ἐντεῦθεν γὰρ αὐτῷ καὶ τὴν προσηγορίαν ἔθεντο οἱ σοφοί, καὶ τῶν θεολογικῶν οἱ μυστικώτατοι. πρώτιστον δὲ καὶ τῶν εὐθυγράμμων τὸ τρίγωνον. ἀναφαίνεται μὲν οὖν τὰ σχήματα πρώτως ἐν ταῖς ἐφεξῆς διακοσμήσεσι τῶν θεῶν, ὑφίσταται δὲ κατὰ τὰς ἐν τοῖς νοητοῖς προϋπαρχούσας κρυφίως αἰτίας.

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ διατέμνει τὸν κύκλον.) Σαφῶς ἐδήλωσεν αὐτὸς ὁ στοιχειωτὴς ὅτι οὐ πᾶσαν ὁρίζεται διάμετρον, ἀλλὰ τὴν κυκλικήν. ἐπεὶ καὶ τετραγώνων ἐστὶ διάμετρος, καὶ ὅλως παραλληλογράμμων. ἔστι δὲ καὶ σφαίρας ἐν τοῖς στερεοῖς σχήμασιν. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τούτων, καὶ διαγώνιος προσαγορεύεται, ἐπὶ δὲ τῆς σφαίρας, καὶ ἄξων καλεῖται. διάμετρος δὲ μόνον ἐπὶ τῶν κύκλων. ἐπεὶ καὶ τῆς ἐλλείψεως ἄξονα λέγειν εἰώθασι, καὶ κυλίνδρου, καὶ τοῦ κώνου, τὴν δὲ κύκλου διάμετρον ἰδίως. αὕτη τοίνυν εὐθεῖα μὲν ἐστὶ τῷ γένει, πολλῶν

δὲ οὐσῶν εὐθειῶν ἐν τῷ κύκλῳ, καθάπερ καὶ σημείων ἀπείρων μέν, ὥσπερ ἓν τῶν σημείων τὸ κέντρον ἐστίν, οὕτω δὴ καὶ διάμετρος αὕτη καλεῖται μόνη ἡ διὰ τοῦ κέντρου χωροῦσα, καὶ μήτε ἐντὸς ἀπολήγουσα τῆς περιφερείας, μήτε ὑπερβαίνουσα τὸν ταύτης ὅρον, ἀλλὰ περατουμένη ὑπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα. καὶ ταῦτα μὲν τὴν γένεσιν ὑποδείκνυσιν αὐτῆς. τὸ δὲ ἀτελὲς προστιθὲν ὅτι καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον, τὴν ἰδίαν αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐνέργειαν δηλοῖ παρὰ πάσας τὰς ἄλλας εὐθείας, τὰς διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένας, καὶ περατουμένας ὑπὸ τῆς περιφερείας ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. τὸ μὲν οὖν διχοτομεῖσθαι τὸν κύκλον ὑπὸ τῆς διαμέτρου, πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαι φασιν. αἰτία δὲ τῆς διχοτομίας, ἡ τῆς εὐθείας ἀπαρέγκλιτος διὰ τοῦ κέντρου χώρησις. φερομένη γὰρ διὰ τοῦ μέσου καὶ ἀεὶ φυλάττουσα τὴν αὐτὴν κίνησιν ἀρρεπῆ πρὸς τὰ ἀμφότερα καὶ πάντα ἑαυτῆς τὰ μέρη, τὸ ἴσον ἐπ' ἀμφότερα ἀφαιρεῖ, πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. εἰ δὲ καὶ διὰ μαθηματικῆς ἐφόδου δεικνύειν αὐτὸ ἐθέλοις, νόησον ἠγμένην τὴν διάμετρον, καὶ θάτερον τοῦ κύκλου μέρος, ἐπὶ τὸ λοιπὸν συναρμοζόμενον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ἴσον, ἢ ἐντὸς πεσεῖται, ἢ ἐκτός. ὁποτέρως δ' ἂν ἔχοι συμβήσεται τὴν ἐλάσσονα εὐθεῖαν ἴσην εἶναι τῇ μείζονι. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι. ἔστιν οὖν ἡ πρὸς τὴν ἐκτὸς τῇ πρὸς τὴν ἐντὸς ἴση. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἐφαρμόζει ἄρα ἡ διάμετρος καὶ τέμνει τὸν κύκλον. ἀλλ' εἰ μιᾶς οὔσης διαμέτρου δύο ἡμικύκλια γίγνεται, ἄπειροι δὲ διάμετροι διὰ τοῦ κέντρου ἄγονται, συμβήσεται διπλάσια τῶν ἀπείρων εἶναι κατ' ἀριθμόν. ταῦτα γὰρ ἀποροῦσί τινες τὴν ἐπ' ἄπειρον τομὴν τῶν μεγεθῶν. ἡμεῖς δὲ λέγομεν, ὅτι τέμνεται μὲν ἐπ' ἄπειρον τὸ μέγεθος, οὐκ εἰς ἄπειρα δέ. τοῦτο μὲν γὰρ ἐνεργείᾳ ποιεῖ τὰ ἄπειρα, τὸ δέ, δυνάμει μόνον. καὶ τὸ μέν, οὐσίαν τοῖς ἀπείροις δίδωσι, τὸ δέ, γένεσιν μόνον. ἅμα οὖν μιᾷ διαμέτρῳ δύο ἡμικύκλια, καὶ αἱ διάμετροι, οὐδέποτε ἄπειροι ἔσονται, εἰ καὶ ἐπ' ἄπειρον λαμβάνονται, ὥστε οὐδέποτε ἔσται διπλάσια τῶν ἀπείρων. ἀλλὰ τὰ γιγνόμενα ἀεὶ διπλάσια τῶν πεπερασμένων ἐστὶ διπλάσια. ἀεὶ γὰρ αἱ ληφθεῖσαι διάμετροι πεπερασμέναι κατ' ἀριθμόν εἰσι. καὶ πῶς γὰρ οὐ μέλλει πᾶν μέγεθος πεπερασμένας ἔχειν διαιρέσεις, τοῦ ἀριθμοῦ πρὸ τῶν μεγεθῶν ὄντος, καὶ πάσας αὐτῶν τὰς τομὰς ἀφορίζοντος, καὶ περικαταλαμβάνοντος τὴν ἀπειρίαν, καὶ ἀεὶ τὰ ὑφιστάμενα περατοῦντος.

Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς, τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.) Ἀπὸ μὲν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου, τὴν τοῦ κέντρου φύσιν ἀνεῦρεν, πάντων τῶν ἄλλων ἐν τῷ κύκλῳ σημείων διαφέρουσαν. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τὴν διάμετρον ἀφώρισατο, καὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν τῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου γραφομένων διέκρινεν. ἀπὸ δὲ τῆς διαμέτρου τὸ ἡμικύκλιον, ὅτι ποτέ ἐστιν ἀνεδιδάσκε. καὶ ὅτι ὑπὸ δύο ὅρων περιέχεται, καὶ τούτων ἀεὶ διαφερόντων εὐθείας καὶ περιφερείας. καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα, οὐχ ἡ τυχοῦσά ἐστιν, ἀλλ' ἡ τοῦ κύκλου διάμετρος. ἐπεὶ καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τὸ μεῖζον, ὑπὸ εὐθείας περιέχεται καὶ περιφερείας, ἀλλ' οὐκ ἔστιν ἡμικύκλια ταῦτα, τῷ μὴ διὰ τοῦ κέντρου γεγονέναι τὴν τοῦ κύκλου διαίρεσιν. πάντα μὲν τὰ τοιάδε σχήματα δυοειδῆ ἐστιν, ὥσπερ ὁ κύκλος μοναδικός, καὶ ἐξ ἀνομοίων ὑφέστηκεν. πᾶν γὰρ τὸ ὑπὸ δύο ὅρων περιεχόμενον, ἢ ὑπὸ δύο περιφερειῶν περιέχεται, ὥσπερ τὸ μηνοειδές, ἢ ὑπὸ εὐθείας καὶ περιφερείας ὡς τὰ εἰρημένα σχήματα, ἢ ὑπὸ δύο μικτῶν γραμμῶν, ὡς εἰ δύο ἐλλείψεις τέμνοιεν ἀλλήλας. τὸ γὰρ μεταξὺ αὐτῶν ἀπολαμβανόμενον περιέξουσι σημεῖον, ἢ ἀπὸ μικτῆς καὶ εὐθείας, ὡς τὸ ἥμισυ τῆς ἐλλείψεως. τὸ τοίνυν ἡμικύκλιον, ἐξ ἀνομοίων ἐστίν, ἀλλὰ τῶν ἁπλῶν, καὶ τούτων κατὰ παράθεσιν ὁμιλούντων ἀλλήλοις, περὶ ὧν ὁ λόγος ἀφορίσεται τὰ τριαδικὰ τῶν σχημάτων, εἰκότως νῦν τὸ δυοειδὲς ἦλθεν μετὰ τὸν κύκλον. δύο μὲν γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐκ ἄν ποτε καταλάβοιεν, εὐθεῖα δὲ καὶ περιφέρεια δύνανται. καὶ δύο περιφέρειαι ὡσαύτως ἢ γωνίας ποιοῦσαι, ὡς νῦν τοῦ μηνοειδοῦς σχήματος, ἢ καὶ ἀγώνιον ἀποτελοῦσαι σχῆμα, ὡς εἰ νοήσειας κύκλους ὁμοκέντρους. τὸ γὰρ μέσον ἀμφοτέρων ἀπολαμβανόμενον χωρίον ὑπὸ δύο περιφερειῶν περιέχεται, τῆς μὲν ἐντὸς οὔσης, τῆς δέ, ἐκτός, καὶ γωνία οὐ γίγνεται. οὐ γὰρ τέμνουσιν ἀλλήλας ὡς ἐν τῷ μηνοειδεῖ καὶ ἀμφικύρτῳ σχήματι. καὶ μὲν δὴ καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον ἐστίν, ὅπερ καὶ τοῦ κύκλου φανερόν.

ἡ γὰρ

ἡ γὰρ διάμετρος ἐφ' ἑαυτῆς ἔχουσα τὸ κέντρον, συμπληροῖ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι αἱ πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἴσαι προσπίπτουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἓν ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τοῦ κύκλου. καὶ ἐπισημαντέον ὅτι μόνον τοῦτο τῶν σχημάτων ἐπὶ τῆς περιμέτρου τὸ κέντρον ἔχει, λέγω δὲ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. ὥστε συνάγοις ἄν, ὅτι τὸ κέντρον τρεῖς ἔχει τρόπους. ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ σχήματός ἐστιν ὥσπερ ἐπὶ τοῦ κύκλου, ἢ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ὡς ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου, ἢ ἐκτός, ὡς ἐπὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν. τὸ δ' οὖν ἡμικύκλιον, ταὐτὸ ἔχει τῷ κύκλῳ κέντρον. τί οὖν ἐνδείκνυται τοῦτο καὶ ποίων εἰκόνα φέρει πραγμάτων, ἢ ὅτι τὰ μὴ τελείως ἀποφοιτήσαντα τῶν πρώτων, ἀλλὰ μετέχοντά πως αὐτῶν, ὁμόκεντρα αὐτοῖς ἐστίν, καὶ τῶν αὐτῶν αἰτιῶν μετειληφότα. διχῇ γὰρ καὶ τὸ ἡμικύκλιον κοινωνεῖ τῷ κύκλῳ, κατά τε τὴν διάμετρον αὐτοῖς κοινόν. καὶ ἴσως ἐοίκοι ἂν τὸ ἡμικύκλιον ταῖς δευτέραις τάξεσι μετὰ τὰς ἁπλουστάτας ἀρχὰς καὶ μετεχούσαις ἐκείνων, καὶ διὰ τὴν συγγένειαν τὴν πρὸς ἐκείνας, εἰ καὶ ἀτελῶς καὶ ἐξ ἡμισείας, ἀλλ' ἐπὶ τὸ ἓν καὶ πρῶτον αὐτῶν αἴτιον ἀναγομέναις.

Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τῶν τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.)

Μετὰ τὸ μοναδικὸν σχῆμα καὶ ἀρχῆς λόγον, ἐπέχον πρὸς πάντα τὰ σχήματα καὶ τὸ δυοειδὲς ἡμικύκλιον, ἡ κατὰ τὸν ἀριθμὸν ἐπ' ἄπειρον πρόοδος παραδίδοται τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων. διὰ γὰρ τοῦτο καὶ τοῦ ἡμικυκλίου μνήμη γέγονεν, ὡς κατὰ τὸν ὅρον πῇ μὲν τῷ κύκλῳ κοινωνοῦντος, πῇ δὲ τοῖς εὐθυγράμμοις. ὥσπερ καὶ ἡ δυὰς μέση μονάδος ἐστὶ καὶ ἀριθμοῦ. ἡ μὲν γὰρ μονὰς συντιθεμένη, πλέον ποιεῖ, ἢ πολλαπλασιαζομένη, ὁ δὲ ἀριθμὸς ἀνάπαλιν, πολλαπλασιαζόμενος μᾶλλον ἢ συντιθέμενος, ἡ δὲ μονάς, ἴσον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἐφ' αὑτὴν ἀποτελεῖ καὶ τῆς συνθέσεως. ὡς οὖν αὕτη μεσότης ἐστὶ μονάδος καὶ πλήθους, οὕτω καὶ τὸ ἡμικύκλιον, κατὰ μὲν τὴν βάσιν κοινωνεῖ τοῖς εὐθυγράμμοις, κατὰ δὲ τὴν περιφέρειαν, τῷ κύκλῳ. πρόεισι δὲ εὐτάκτως τὰ εὐθύγραμμα, κατὰ τὸν ἀπὸ τριάδος ἀριθμὸν ἐπ' ἄπειρον. διὸ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐντεῦθεν ἤρξατο. τρίπλευρα γάρ φησι καὶ τετράπλευρα, καὶ ἐφεξῆς τῷ κοινῷ ὀνόματι καλούμενα πολύπλευρα. ἀλλὰ καὶ ἰδίαν ἔχει προσηγορίαν μετὰ τῆς κοινῆς, ἐπὶ δὲ τῶν ἄλλων παρακολουθεῖν τῇ εἰς ἄπειρον προόδῳ τῶν ἀριθμῶν, ἀδυνατήσαντες τὴν κοινὴν προσηγορίαν ἠγαπήσαμεν. τριπλεύρων δὲ καὶ τετραπλεύρων μόνων πεποίηται μνήμην, ἐπειδὴ καὶ τῶν ἀριθμῶν οἱ πρώτιστοι τριὰς καὶ τετράς, ὁ μὲν, ἐν τοῖς περιττοῖς ἄκρατος ὢν περιττός, ὁ δέ, ἐν τοῖς ἀρτίοις, ἀρτιώτατος. ἑκατέρους οὖν αὐτῶν περιειλῆφθαι, πρὸς τὴν τῶν εὐθυγράμμων γένεσιν εἰς ἔνδειξιν τῆς κατὰ πάντας αὐτῶν τοὺς ἀριθμοὺς ὑποστάσεως, ἀρτίους τε καὶ περιττούς. καὶ μέντοι καὶ διότι περὶ τούτων ὡς στοιχειωδεστάτων ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ διαλέξει τριγώνων καὶ παραλληλογράμμων, εἰκότως μέχρι τούτων ἔστησεν τὴν ἰδίαν ἀπαρίθμησιν. τὰ δὲ ἄλλα πάντα, κοινῷ περιέλαβεν ὀνόματι, πολύπλευρα καλέσας. ταῦτα περὶ τούτων. πάλιν δὲ ἄνωθεν ῥητέον, ὅτι τῶν ἐπιπέδων σχημάτων τὰ μὲν ὑπὸ ἁπλῶν περιέχεται γραμμῶν, τὰ δὲ ὑπὸ μικτῶν, τὰ δὲ ὑπὸ ἀμφοτέρων. καὶ τῶν ὑπὸ τῶν ἁπλῶν περιεχομένων, τὰ μὲν ὑπὸ τῶν ὁμοειδῶν, ὡς τὰ εὐθύγραμμα, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν ἀνομοειδῶν, ὡς τὰ ἡμικύκλια καὶ τὰ τμήματα, καὶ αἱ ἀψῖδες, αἵ εἰσιν ἡμικυκλίων ἐλάσσονες. καὶ τῶν ὑπὸ ὁμοειδῶν περιεχομένων, τὰ μὲν ὑπὸ κυκλικῆς περιέχεται γραμμῆς, τὰ δέ, ὑπὸ εὐθείας. τῶν δὲ ὑπὸ κυκλικῆς γραμμῆς περιεχομένων, τὰ μὲν ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιέχεται, τὰ δέ, ὑπὸ δύο, τὰ δὲ ὑπὸ πλήθους. ὑπὸ μιᾶς μὲν ὁ κύκλος αὐτός, ὑπὸ δυοῖν δὲ τὰ ἀγώνια ὡς ἡ στεφάνη, ἡ ὑπὸ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ὁριζομένη, τὰ δὲ γεγωνιωμένα, ὡς ὁ μηνίσκος. ὑπὸ πλειόνων δὲ ἢ δυοῖν, ἐπ' ἄπειρον. καὶ γὰρ ὑπὸ τριῶν καὶ τεσσάρων περιφερειῶν καὶ ἑξῆς περιέχεταί τινα σχήματα. ἐὰν οὖν τρεῖς κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ἀπολαμβάνουσι τὸ χωρίον τρίπλευρον ὑπὸ τριῶν περιφερειῶν ὁριζόμενον, ἐὰν δὲ τέσσαρες, ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως. τῶν δὲ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένων, τὰ μὲν ὑπὸ τριῶν περιέχεται χωρίον, οὔτε πολλῷ πλέον ὑπὸ μιᾶς. ὥστε πᾶν μὲν χωρίον ὑπὸ ἑνὸς ὅρου περιεχόμενον, ἢ δυοῖν, τῶν μικτῶν ἐστὶν ἢ τῶν περιφερογράμμων. ὡς μικτῶν διχῶς, ἢ ὅτι μικταὶ γραμμαὶ περιέχουσιν αὐτό, ὡς τὸ ὑπὸ τῆς κισσοειδοῦς ἀπολαμβανόμενον, ἢ ὅτι

ἀνομοειδεῖς

ἀνομοιομερεῖς, ὡς καὶ τὴν ἀϊδίαν. διχῶς γὰρ ἡ μῖξις, ἢ κατὰ παράθεσιν, ἢ κατὰ σύγχυσιν. τὸ μέντοι δὲ τρίπλευρον, ἢ τετράπλευρον, εὐθύγραμμόν ἐστι. καὶ γὰρ ἐκ τῶν διαφερόντων γίνεται ἂν τοσοῦτος πλευρῶν ἀριθμός. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς τῶν ἐπιπέδων σχημάτων διαιρέσεως. ὅτι δὲ τὸ εὐθὺ πανταχοῦ σύμβολόν ἐστι καὶ κινήσεως, καὶ ἀπειρίας, καὶ ὅτι ταῖς γεννητικαῖς τάξεσιν οἰκεῖοῦται τῶν θεῶν καὶ ἑτεροποιοῖς, καὶ τῆς μεταβολῆς καὶ κινήσεως αἰτίαις, εἴρηται καὶ πρότερον. καὶ τοίνυν καὶ τὰ εὐθύγραμμα σχήματα, τούτοις οἰκείωται τοῖς θεοῖς, τοῖς τῆς γονίμου ποιήσεως προκατάρχουσι, τῆς ἐπὶ πᾶν προόδου τῶν εἰδῶν. καὶ ἡ γένεσις κατὰ ταῦτα κεκόσμηται διαφερόντως, καὶ τὴν οὐσίαν ἐκ τούτων ἔλαχεν, ὡς ἐν κινήσει καὶ μεταβολῇ τὴν ὑπόστασιν ἔχουσα.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ δύο μόνον ἴσας ἔχον πλευράς. σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον. ἔτι δὲ, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.)

Τῶν τριγώνων διαίρεσις, ποτὲ μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἔχει τὴν ἀρχήν, ποτὲ δὲ ἀπὸ τῶν πλευρῶν. ἡγεῖται μὲν, τὸ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ὡς γνώριμον, ἕπεται δὲ ἡ ἀπὸ τῶν γωνιῶν ὡς ἰδιάζουσα. ἐπειδὴ καὶ αἱ τρεῖς αὗται γωνίαι τοῖς εὐθυγράμμοις μόνοις προσήκουσι σχήμασιν, ὀρθὴ καὶ ἀμβλεῖα καὶ ὀξεῖα, ἰσότης δὲ καὶ ἀνισότης τῶν πλευρῶν, ἔστι δήπου καὶ ἐν τοῖς μὴ εὐθυγράμμοις σχήμασι. λεγέσθω κοινῶς, ὅτι τῶν τριγώνων, τὰ μὲν, ἰσόπλευρά ἐστι, τὰ δὲ ἰσοσκελῆ, τὰ δὲ, σκαληνά. ἢ γὰρ πάσας ἔχει τὰς πλευρὰς ἴσας, ἢ πάσας ἀνίσους, ἢ δύο μόνας ἴσας. καὶ πάλιν ὅτι τῶν τριγώνων τὰ μὲν ὀρθογώνια. καὶ τὸ μὲν ὀρθογώνιον ὁρίζεται, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ὥσπερ καὶ τὸ ἀμβλυγώνιον. πλείους γὰρ μιᾶς ἢ ὀρθὰς ἔχειν, ἢ ἀμβλείας τὸ τρίγωνον, ἀδύνατον. τὸ δὲ ὀξυγώνιον, τὰς δύο γωνίας ἔχει πάντως ὀξείας, τὰς δὲ τρεῖς ὀξείας, τὸ ὀξυγώνιον μόνον. δοκεῖ δέ μοι καὶ πρὸς ἐκεῖνο μόνον ἀπιδὼν ὁ στοιχειωτής, χωρὶς μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ποιήσασθαι τὴν διαίρεσιν, χωρὶς δὲ ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ὅτι μὴ πᾶν τρίγωνον καὶ τρίπλευρον. ἔστι γὰρ τρίγωνα τετράπλευρα καλούμενα παρ' αὐτοῖς ἀκιδοειδῆ. παρὰ δὲ τῷ Ζηνοδώρῳ, κοιλογώνια. νόησον γὰρ ἐν τινι τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δύο συστάσας ἐντὸς εὐθείας, περιέχεται ἄρα τι χωρίον ὑπό τε τῶν ἐκτὸς περιεχόμενον, καὶ δύο τὰς ὑπὸ τούτων καὶ τῶν ἐντὸς πρὸς ταῖς κορυφαῖς καθ' ἃς συνάπτονται περιεχομένας. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ τοιόνδε σχῆμα τετράπλευρον. οὐκ ἄρα ἐὰν τρεῖς εὕρωμεν ἔχον γωνίας, ἢ ὀξείας, ἢ μίαν ὀρθὴν ἢ ἀμβλεῖαν μίαν, εὐθὺς καὶ τρίπλευρον εὑρήκαμεν, καὶ ἢ ἰσόπλευρον ἢ τῶν ἄλλων τριπλεύρων. ἔστι γὰρ ὅπου καὶ τετράπλευρον. οὕτω δ' ἂν εὕροις καὶ τετράγωνα, πλείους ἔχοντα τῶν τεσσάρων πλευρῶν. καὶ δεῖ μὴ προχείρως ἀπὸ τοῦ πλήθους τῶν γωνιῶν ἀποφαίνεσθαι περὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν. ἀλλὰ ταῦτα μὲν περὶ τούτων. οἱ δὲ Πυθαγόρειοι τὸ μὲν τρίγωνον ἁπλῶς ἀρχὴν γενέσεως εἶναί φασι, καὶ τῆς τῶν γεννητῶν εἰδοποιίας. διὸ καὶ τοὺς λόγους τοὺς φυσικοὺς, καὶ τῆς τῶν στοιχείων δημιουργίας τριγωνικοὺς εἶναί φησιν ὁ Τίμαιος. καὶ γὰρ τριχῇ διέστανται. καὶ συναγωγοί τῶν πάντῃ μεριστῶν εἰσί, καὶ πολυμεταβόλων, τῆς τε ἀπειρίας ἀναπίμπλανται τῆς ὑλικῆς, καὶ τοὺς συνδέσμους λυτοὺς προΐστανται τῶν ἐνύλων σωμάτων. ὥσπερ δὴ καὶ τρίγωνα περιέχονται μὲν ὑπὸ εὐθειῶν, γωνίας δὲ ἔχει, τὰς τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν συναγούσας, καὶ γωνίαν ἐπίκτητον αὐταῖς, καὶ συναφὴν παρεχομένας, εἰκότως ἄρα ὁ Φιλόλαος, τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν, τέτταρσιν ἀνέθηκεν θεοῖς, Κρόνῳ, καὶ Ἅδῃ καὶ Ἄρει, καὶ Διονύσῳ. πᾶσαν τὴν τετραμερῆ τῶν στοιχείων διακόσμησιν τὴν ἄνωθεν ἀπὸ τοῦ οὐρανοῦ καθήκουσαν, εἴτε ἀπὸ τῶν τεττάρων τοῦ ζωδιακοῦ τμημάτων ἐν τούτοις περιλαβών. ὁ μὲν γὰρ Κρόνος πᾶσαν ὑφίστησι τὴν ὑγρὰν καὶ ψυχρὰν οὐσίαν, ὁ δὲ Ἄρης, πᾶσαν τὴν ἔκπυρον φύσιν, καὶ ὁ μὲν Ἅδης, τὴν χθονίαν ὅλην συνέχει ζωήν, ὁ δὲ Διόνυσος τὴν ὑγρὰν καὶ θερμὴν ἐπιτροπεύει γένεσιν, ἧς καὶ ὁ οἶνος σύμβολος ὑγρὸς ὢν καὶ θερμός. πάντες δὲ οὗτοι κατὰ μὲν τὰς εἰς τὰ δεύτερα ποιήσεις διεστήκασι, ἥνωνται δὲ ἀλλήλοις, διότι κατὰ μίαν αὐτῶν γωνίαν συνάγει τὴν ἕνωσιν ὁ Φιλόλαος. εἰ δὲ καὶ τῶν τριγώνων διαφοραὶ συνεργοῦσι πρὸς τὴν γένεσιν, εἰκότως ἂν ὁμολογοῖτο τρίγωνον ἀρχικὸν εἶναι τῆς τῶν ὑπὸ σελήνην στάσεως. ἡ μὲν γὰρ ὀρθὴ γωνία, τὴν οὐσίαν αὐτοῖς παρέχεται, καὶ τὸ μέτρον ἀφορίζει τοῦ εἶναι. καὶ ὁ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λόγος, οὐσιοποιός ἐστι τῶν γεννητῶν στοιχείων.

ἡ δὲ

ἡ δὲ ἀμβλεῖα, τὴν ἐπὶ πᾶν διάστασιν ἐνδίδωσι. καὶ ὁ τοῦ ἀμβλυγωνίου λόγος, εἰς μέγεθος αὔξει καὶ παντοίαν ἔκστασιν τὰ εἴδη τὰ ἔνυλα. ἡ δὲ ὀξεῖα γωνία, διαιρετὴν φύσιν αὐτὴν ἀποτελεῖ τὴν φύσιν, καὶ ὁ τοῦ ὀξυγωνίου λόγος, ἐπ' ἄπειρον αὐτοῖς τὰς διαιρέσεις παρασκευάζει γίνεσθαι. ἁπλῶς δὲ ὁ τριγωνικὸς λόγος οὐσίαν διαστατὴν, καὶ πάντη μεριστὴν ὑφίστησι τὴν τῶν ἐνύλων σωμάτων. τοσαῦτα μὲν περὶ τριγώνων ἔχομεν θεωρεῖν. ἐκ δὲ τούτων λάβοις ἂν τῶν διαιρέσεων, καὶ ὅτι τὰ εἴδη πάντα, τῶν τριγώνων, ἑπτά ἐστι, καὶ οὔτε πλείω, οὔτε ἐλάττω. τὸ μὲν ἰσόπλευρον, ἕν ἐστι μόνον ὀξυγώνιον ὑπάρχον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκάτερον τριπλοῦν, καὶ γὰρ τὸ ἰσοσκελὲς, ἢ ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἢ ἀμβλυγώνιον, ἢ ὀξυγώνιον. καὶ τὸ σκαληνὸν δὲ ὡσαύτως, τὴν τριττὴν ἔχει ταύτην διαφοράν. εἰ οὖν τὰ μὲν τριχῶς, τὰ δὲ ἰσόπλευρα μοναχῶς, ἑπτὰ τὰ πάντα τῶν τριγώνων εἴδη λεγέσθω. λάβοις δ' ἂν καὶ περὶ τὴν τῶν πλευρῶν διαίρεσιν, τὴν τῶν τριγώνων πρὸς τὰ ὄντα ἀναλογίαν. τὸ μὲν γὰρ ἰσόπλευρον περὶ πάντα ἰσότητι καὶ ἁπλότητι κρατούμενον συγγενές ἐστι ταῖς θείαις ψυχαῖς. μέτρον γάρ ἐστι καὶ τῶν ἀνίσων ἡ ἰσότης, ὥσπερ καὶ τὸ θεῖον πάντων τῶν δευτέρων. τὸ δὲ ἰσοσκελὲς, τοῖς κρείττοσι γένεσι τοῖς κατευθύνουσι τὴν ἔνυλον φύσιν, ὧν τὸ μὲν πλέον κεκράτηται τῷ μέτρῳ, τὰ δὲ τελευταῖα τῆς ἀνισότητος ἐφάπτεται, καὶ τῆς ἀμετρίας τῆς ὑλικῆς. καὶ γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν, αἱ μὲν δύο ἴσαι, ἡ δὲ βάσις ἄνισος. τὸ δὲ σκαληνὸν ταῖς μερισταῖς ζωαῖς αἳ πανταχόθεν χωλεύουσι καὶ κατασκευάζουσιν εἰς τὴν γένεσιν, φερόμεναι καὶ ἀναπιπλάμεναι τῆς ὕλης.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον. ἑτερόμηκες δὲ, ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. ῥόμβος δὲ ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρον, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.)

Τὴν τῶν τετραπλεύρων διαίρεσιν, εἰς δύο ποιεῖσθαι χρὴ, τὴν πρώτην. καὶ τὰ μὲν αὐτῶν, παραλληλόγραμμα λέγειν, τὰ δὲ, οὐ παραλληλόγραμμα. τῶν δὲ παραλληλογράμμων, τὰ μὲν, καὶ ὀρθογώνια, καὶ ἰσόπλευρα, ὡς τὰ τετράγωνα, τὰ δὲ, οὐδέτερα τούτων, ὡς τὰ ῥομβοειδῆ. τὰ δὲ, ὀρθογώνια μὲν οὐκ ἰσόπλευρα δὲ, ὡς τὰ ἑτερομήκη, τὰ δὲ, ἔμπαλιν, ἰσόπλευρα μὲν, οὐκ ὀρθογώνια δὲ, ὡς οἱ ῥόμβοι. ἢ γὰρ ἀμφότερα ἔχειν ἀναγκαῖον τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν, καὶ τὴν ὀρθότητα τῶν γωνιῶν, ἢ οὐδέτερον, ἢ τὸ ἕτερον. καὶ τοῦτο διχῶς, ὥστε τετραχῶς ὑφίσταται τὸ παραλληλόγραμμον. τῶν δὲ μὴ παραλληλογράμμων τὰ μὲν δύο μόνον ἔχει παραλλήλους, οὐκέτι δὲ καὶ τὰς λοιπάς, τὰ δὲ οὐδ' ὅλως ἔχει τῶν πλευρῶν τινας παραλλήλους, καὶ τὰ μὲν, καλεῖται τραπέζια, τὰ δὲ, τραπεζοειδῆ. τῶν δὲ τραπεζίων, τὰ μὲν ἴσας ἔχει τὰς συναπτούσας παραλλήλους ταύτας, τὰ δὲ, ἀνίσους. καὶ καλεῖται τὰ μὲν ἰσοσκελῆ τραπέζια, τὰ δὲ σκαληνὰ τραπέζια. τὸ ἄρα τετράπλευρον ἑπταχῶς ἡμῖν ὑποστήσεται. τὸ μὲν γάρ ἐστι τετράγωνον τὸ δὲ, ἑτερόμηκες, τὸ δὲ, ῥόμβος, τὸ δὲ, ῥομβοειδὲς, τὸ δὲ, τραπέζιον, τὸ δὲ, τραπεζοειδές. ἀλλ' ὁ μὲν Ποσειδώνιος, τελείαν εἰς ταῦτα πεποίηται τὴν τῶν τετραπλεύρων εὐθυγράμμων τομὴν, ἑπτὰ καὶ τούτων τὰ εἴδη θέμενος. ὥσπερ δὴ καὶ τῶν τριγώνων. ὁ δ' Εὐκλείδης, εἰς μὲν παραλληλόγραμμα διαιρεῖν οὐκ ἠδύνατο, μήτε περὶ τῶν παραλλήλων εἰπὼν, μήτε περὶ αὐτοῦ τοῦ παραλληλογράμμου διδάξας ἡμᾶς. τὰ δὲ τραπέζια, καὶ τὰ τραπεζοειδῆ πάντα, κοινῷ προσείρηκεν ὀνόματι, τραπέζια προσγράφων αὐτὰ, τῶν τετραγώνων ἐκείνων, οἷς ἐπαληθεύει τὸ τῶν παραλληλογράμμων ἴδιον, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ τὰς ἐπ' ἐναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχειν. καὶ γὰρ τὸ τετράγωνον, καὶ τὸ ἑτερόμηκες, καὶ ὁ ῥόμβος, ἔχει τὰς ἐπ' ἐναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας. αὐτὸς δὲ, ἐπὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς μόνου τοῦτο προσέθηκεν, ἵνα μὴ διὰ ψιλῶν αὐτὸ παραστήσῃ τῶν ἀποφάσεων, οὔτε ἰσόπλευρον, οὔτε ὀρθογώνιον εἰπὼν, ἐφ' ὧν γὰρ ἰδιαζόντων ἀποροῦμεν λόγων, χρῆσθαι τοῖς κοινοῖς ἀναγκαῖον. ὅτι δὲ πάντων ἐστὶ τοῦτο κοινὸν τῶν παραλληλογράμμων, αὐτοῦ δεικνύντος ἀκουσόμεθα. ἔοικε δὲ καὶ ὁ ῥόμβος, σαλευθὲν εἶναι τετράγωνον, καὶ τὸ ῥομβοειδὲς εἶναι ἑτερόμηκες. διὸ κατὰ τὰς πλευρὰς οὐ διήνεγκεν ταῦτα ἐκείνων, περὶ δὲ τὰς τῶν γωνιῶν ἀμβλύτητας καὶ ὀξύτητας, ἐκείνων ὀρθογωνίων ὄντων. ἐὰν γὰρ νοήσῃς τὸ τετράγωνον, ἢ τὸ ἑτερόμηκες, κατὰ τὰς ἐναντίας γωνίας διελόμενον, εὑρήσεις ταύτας μὲν συναγομένας, καὶ

ἐλάσω

ἔοικε καὶ τὸ ὄνομα τοῦ ῥόμβου ἀπὸ τῆς κινήσεως. καὶ γὰρ τὸ τετράγωνον εἰ νοήσειας ῥομβούμενον, φανεῖταί σοι κατὰ τὰς γωνίας παρακινούμενον, ὥσπερ δὴ καὶ ὁ κύκλος, ῥομβούμενος, ἔλλειψις φαίνεται. πόθεν δὲ αὐτοῦ τοῦ τετραγώνου ζητήσειας, διατί ταύτην ἔχει τὴν προσηγορίαν, καὶ οὐχ ὥσπερ τὸ τρίγωνον κοινόν ἐστιν πᾶσι, καὶ τοῖς μὴ ἰσογωνίοις, μὴ δὲ ἰσοπλεύροις, καὶ τὸ πεντάγωνον ὡσαύτως, οὕτω καὶ τὸ τετράγωνον λέγεσθαι δύναται, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τετραπλεύρων. αὐτὸς γοῦν ὁ γεωμέτρης, ἐπ' ἐκείνων προστίθησι τρίγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιον ὡς δυναμένων τούτων, καὶ μὴ τοιούτων εἶναι, τὸ δὲ τετράγωνον ῥηθὲν εὐθὺς τὸ ἰσόπλευρον αὐτὸ δηλοῖ καὶ ὀρθογώνιον. λόγος δὲ τούτου ὅδε. μόνον τὸ τετράγωνον εὐθὺς χωρίον, καὶ κατὰ τὰς πλευρὰς ἔχει τὸ κρεῖσσον, καὶ κατὰ τὰς γωνίας. ἑκάστη γὰρ αὐτῶν ὀρθή ἐστι τὸ κέντρον ἀπολαβοῦσα τῶν γωνιῶν, τὸ μήτε ἐπίτασιν, μήτε ἄνεσιν ἐπιδεχόμενον, κατ' ἀμφότερον οὖν πλεονεκτοῦσα, εἰκότως ἔχει τὴν κοινὴν ἐπωνυμίαν. τὸ δὲ τρίγωνον, οὐκ ἴσας ἔχει γωνίας, καὶ ὀξείας πάσας, καὶ τὸ πεντάγωνον ἀμβλείας πάσας. εἰκότως ἄρα τὸ τετράγωνον, ἰσότητι πλευρῶν, καὶ ὀρθότητι γωνιῶν συμπεπληρωμένον μόνον ἐκ πάντων τετραπλεύρων ταύτης τῆς προσηγορίας ἔτυχεν. τοῖς γὰρ ὑπερέχουσι τῶν εἰδῶν, καὶ τοῦ ὅλου πολλάκις ἐπιφημίζομεν ὄνομα. δοκεῖ δὲ καὶ τοῖς πυθαγορείοις τοῦτο διαφερόντως τῶν τετραπλεύρων εἰκόνα φέρειν θείας οὐσίας. τήν τε γὰρ ἄχραντον τάξιν διὰ τούτου μάλιστα σημαίνουσιν. ἥ τε γὰρ ὀρθότης τὸ ἄκλιτον, καὶ ἡ ἰσότης τὴν μόνιμον δύναμιν ἀπομιμεῖται. κίνησις γὰρ ἀνισότητος ἔκγονος. στάσις δὲ ἰσότητος. αἱ τοίνυν τῆς στερεᾶς ἱδρύσεως αἰτίαι τῆς ὅλης καὶ τῆς ἀχράντου, καὶ ἀκλίτου δυνάμεως, εἰκότως διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ σχήματος, ὡς ἀπ' εἰκόνος ἐμφαίνεται. καὶ πρὸς τούτοις ὁ Φιλόλαος κατ' ἄλλην ἐπιβολὴν τὴν τοῦ τετραγώνου γωνίαν, Ῥέας καὶ Δήμητρος καὶ Ἑστίας ἀποκαλεῖ. διότι γὰρ τὴν γῆν τὸ τετράγωνον ὑφίστησι, καὶ στοιχεῖόν ἐστιν αὐτῆς προσεχές, ὡς παρὰ τοῦ Τιμαίου μεμαθήκαμεν. ἀπὸ δὲ πασῶν τούτων τῶν θεῶν ἀποῤῥοίας ἡ γῆ δέχεται καὶ γονίμους δυνάμεις εἰκότως τὴν τοῦ τετραγώνου γωνίαν ἀνῆκεν ταύταις ταῖς ζῳογόνοις θεαῖς. καὶ γὰρ ἑστίαν καλοῦσι τὴν γῆν καὶ δημητράν τινες, καὶ τῆς ὅλης ῥέας αὐτὴν μετέχειν φασί, καὶ πάντα ἐστὶν ἐν αὐτῇ τὰ γεννητὰ αἴτια χθονίως. τοίνυν μίαν ἕνωσιν τῶν θείων τούτων γενῶν, τὴν τετραγωνικήν φησι γωνίαν περιέχειν. ἀπεικάζουσι δὲ πρὸς τὴν σύμπασαν ἀρετὴν τὸ τετράγωνον, ὡς ἔχον τέτταρας ὀρθάς, τελείαν ἑκάστην. ὥσπερ δὴ καὶ τὰς ἀρετὰς λεγομένας ἑκάστην τελείαν, καὶ αὐτάρκη, καὶ ἄμετρον, καὶ ὅρον ζωῆς, καὶ πάσας μεσότητα ἀμβλείας καὶ ὀξείας. δεῖ δὲ μὴ λανθάνειν, ὅπως τὴν μὲν τριγωνικὴν γωνίαν ὁ Φιλόλαος τέτταρσιν ἀνῆκεν θεοῖς, τὴν δὲ τετραγωνικήν, τρισίν, ἐνδεικνύμενος αὐτῶν τὴν δι' ἀλλήλων χώρησιν, καὶ τὴν ἐν πᾶσι πάντων κοινωνίαν. τῶν τε περισσῶν ἐν τοῖς ἀρτίοις, καὶ τῶν ἀρτίων, ἐν τοῖς περισσοῖς. τριὰς οὖν καὶ τετραδική, τῶν τε γονίμων μετέχουσαι καὶ ποιητικῶν ἀγαθῶν, τὴν ὅλην συνέχουσι τῶν γεννητῶν διακόσμησιν, ἀφ' ὧν ἡ δυοδεκάς, εἰς μίαν μονάδα, τὴν τοῦ διὸς ἀρχὴν ἀνατείνεται. τὴν γὰρ τοῦ δωδεκαγώνου γωνίαν διὸς εἶναί φησιν ὁ Φιλόλαος, ὡς κατὰ μίαν ἕνωσιν τοῦ διὸς ὅλον συνέχοντος, τὸν τῆς δυωδεκάδος ἀριθμόν. ἡγεῖται γὰρ καὶ παρὰ τῷ Πλάτωνι δυωδεκάδος ὁ Ζεύς, καὶ ἀπολύτως ἐπιτροπεύει τὸ πᾶν. τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν τετραπλεύρων εἴχομεν λέγειν, τήν τε στοιχειωτοῦ διάνοιαν ἐμφανίζοντες, καὶ πρὸς τὰς θεωρητικωτέρας ἐπιβολὰς ἀφορμὰς διδόντες τοῖς τῶν νοητῶν καὶ ἀφανῶν οὐσιῶν τῆς γνώσεως ἐφιεμένοις.

Τετράγωνον cur ita dictum

Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Τίνα μὲν στοιχεῖα τῶν παραλλήλων, καὶ τίσι γνωρίζονται συμπτώμασιν ἐν τούτοις μετὰ ταῦτα μαθησόμεθα. τίνες δέ εἰσιν αἱ παράλληλαι εὐθεῖαι, διὰ τούτων ἀφορίζεται τῶν ῥημάτων. δεῖ τοίνυν αὐτὰς φησὶν ἔν τε ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶναι. καὶ ἐκβαλλομένας ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν ἀλλήλαις, ἀλλ' ἐκβάλλεσθαι εἰς ἄπειρον. καὶ γὰρ αἱ μὴ παράλληλοι μέχρι τινὸς ἐκβαλλόμεναι μένοιεν ἂν ἀσύμπτωτοι, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν, χαρακτηρίζειν, τὰς παραλλήλους. καὶ οὐδὲ τοῦτο ἁπλῶς, ἀλλὰ τὸ ἐφ' ἑκάτερα ἐκβάλλεσθαι ἐπ' ἄπειρον, καὶ μὴ συμπίπτειν. καὶ γὰρ τῶν μὴ παραλλήλων δυνατόν, κατὰ θάτερα μὲν τὴν ἐκβολὴν ἐπ' ἄπειρον γίνεσθαι, κατὰ τὰ λοιπὰ δέ, οὔ, συννεύουσαι γὰρ ἐπὶ τάδε τὰ μέρη

πλέον

πλεῖον ἀφίστανται ἀλλήλων ἐπὶ τὰ ἕτερα. τὸ δὲ αἴτιον, ὅτι δύο εὐθεῖαι περιέχειν οὐ δύνανται χωρίον. εἰ δὲ κατ' ἀμφότερα συννεύοιεν, τοῦτο μὴ συμβήσεται. καὶ μέν τοι καὶ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι τὰς εὐθείας ὀρθῶς προσείληπται. εἰ γὰρ ἡ μὲν εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἡ δὲ, ἐν τῷ μετεώρῳ, ἐπὶ πᾶσαν θέσιν ἀσύμπτωτοι ἀεί εἰσιν ἀλλήλαις. καὶ διὰ τοῦτο παράλληλοι οὐκ εἰσίν. οὖν ἔσω τὸ ἐπίπεδον, καὶ ἐκβαλλέσθωσαν ἐπ' ἄπειρον κατ' ἀμφότερα, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις ἐπὶ μηδέτερα. τούτων γὰρ ὑπαρχόντων, ἔσονται παράλληλοι εὐθεῖαι. καὶ ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ὁρίζεται τὸν τρόπον τὰς παραλλήλους εὐθείας. ὁ δὲ Ποσειδώνιος, παράλληλοί φησίν εἰσιν, αἱ μήτε συννεύουσαι, μήτε ἀπονεύουσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἀλλ' ἴσας ἔχουσαι πάσας τὰς καθέτους, τὰς ἀγομένας ἀπὸ τῶν τῆς ἑτέρας σημείων, ἐπὶ τὴν λοιπήν. ὅσαι δ' ἂν ἐλάττους ποιῶσι τὰς καθέτους, συννεύουσιν ἀλλήλαις. ἡ γὰρ κάθετος, τά τε ὕψη τῶν χωρίων καὶ τὰ διαστήματα τῶν γραμμῶν, ὁρίζειν δύναται. διόπερ ἴσων μὲν τῶν καθέτων οὐσῶν, ἴσα τὰ διαστήματα τῶν εὐθειῶν. μειζόνων δὲ καὶ ἐλαττόνων γινομένων καὶ ἡ ἀπόστασις ἐλαττοῦται, καὶ συννεύουσιν ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσίν, αἱ κάθετοι ἐλάσσονες. δεῖ δὲ εἰδέναι, ὅτι, τὸ ἀσύμπτωτον, οὐ πάντως παραλλήλους ποιεῖ γραμμάς. καὶ γὰρ τῶν ὁμοκέντρων κύκλων, αἱ περιφέρειαι οὐ συμπίπτουσιν, ἀλλὰ δεῖ καὶ ἐπ' ἄπειρον αὐτὰς ἐκβάλλεσθαι. τοῦτο δὲ οὐ μόναις ὑπάρχει ταῖς εὐθείαις, ἀλλὰ καὶ ἄλλαις γραμμαῖς. δυνατὸν γὰρ νοῆσαι τεταγμένας ἕλικας περὶ εὐθείας γραφομένας, αἵ τινες συνεκβαλλόμεναι ταῖς εὐθείαις εἰς ἄπειρον, οὐδέποτε συμπίπτουσι. ταῦτα μὲν οὖν Γεμῖνος, ὀρθῶς παρὰ τούτων διεῖλεν ἐξ ἀρχῆς. ὅτι τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν, αἱ μὲν ὡρισμέναι, καὶ σχῆμα περιέχουσιν, ὡς ὁ κύκλος, καὶ ἡ τῆς ἐλλείψεως γραμμὴ, καὶ ἡ κισσοειδὴς, καὶ ἄλλαι παμπληθεῖς, αἱ δὲ, ἀόριστοι, καὶ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, ὡς ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὴ, καὶ ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου, καὶ ἡ κογχοειδής. πάλιν δὲ αὖ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ μὲν, οὐδὲν σχῆμα περιλαμβάνουσιν, ὡς ἡ εὐθεῖα, καὶ αἱ κωνικαὶ τομαὶ αἱ εἰρημέναι. αἱ δὲ συνελθοῦσαί τε καὶ ποιήσασαι σχῆμα, εἰς ἄπειρον τὸ λοιπὸν ἐκφέρονται. τούτων δὲ αἱ μέν εἰσιν ἀσύμπτωτοι, αἱ ὅπως ποτ' ἂν ἐκβληθῶσι μὴ συμπίπτουσαι, συμπτωταὶ δὲ, αἱ ποτὲ συμπεσούμεναι. τῶν δὲ ἀσυμπτώτων, αἱ μὲν, ἐν ἑνί εἰσιν ἀλλήλαις ἐπιπέδῳ, αἱ δὲ οὔ. τῶν δὲ ἀσυμπτώτων καὶ ἐν ἑνὶ οὐσῶν ἐπιπέδῳ, αἱ μὲν, ἴσον ἀεὶ διάστημα ἀφεστήκασιν ἀλλήλων, αἱ δὲ, μειοῦσιν ἀεὶ τὸ διάστημα, ὡς ὑπερβολὴ πρὸς τὴν εὐθεῖαν. αὗται γὰρ ἀεὶ ἐλαττουμένου τοῦ διαστήματος, ἀεὶ ἀσύμπτωτοί εἰσι. καὶ συννεύουσι μὲν ἀλλήλαις, οὐδέποτε δὲ συννεύουσι παντελῶς. ὃ καὶ παραδοξότατόν ἐστιν ἐν γεωμετρίᾳ θεώρημα, δεικνύον σύννευσιν τινῶν γραμμῶν ἀσύννευτον. τῶν δὲ ἴσον ἀεὶ ἀπεχουσῶν διάστημα, αἱ εἰσὶν εὐθεῖαι μηδέποτε ἔλασσον ποιοῦσαι τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ παράλληλοί εἰσι. τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τῆς Γεμίνου φιλοκαλίας, εἰς τὴν τῶν προκειμένων ἐξήγησιν συνελεξάμεθα.

Τέλος τοῦ δευτέρου.

ΠΡΟΚΛΟΥ ΔΙΑΔΟΧΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

ΤΩΝ γεωμετρικῶν ἀρχῶν τριχῇ διῃρημένων, εἴς τε ὑποθέσεις καὶ αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα, τὴν μὲν πρὸς ἄλληλα τούτων διαφορὰν ἐν τοῖς πρόσθεν γεγραμμένοις παραδεδώκαμεν, περὶ δὲ αἰτήματος, καὶ ἀξιώματος, ἰδίᾳ προσήκειν νυνὶ διελθεῖν, ἀκριβέστερον, ἅτε δὴ καὶ περὶ αὐτῶν ἡμῖν ὄντος ἐνταῦθα τοῦ λόγου προηγουμένως. τὰς γὰρ ὑποθέσεις, καὶ τοὺς καλουμένους ὅρους, ἐν τοῖς προειρημένοις ἐσκέμμεθα. κοινὸν μὲν οὖν ἐστι τοῖς τε ἀξιώμασι, καὶ τοῖς αἰτήμασι τὸ μὴ προσδεῖσθαι τινὸς ἀποδείξεως, μηδὲ γεωμετρικῆς πίστεως, ἀλλ' ὡς γνώριμα λαμβάνεσθαι καὶ ἀρχὰς ταῦτα γίγνεσθαι τῶν ἐφεξῆς. διεστήκει δὲ ἀπ' ἀλλήλων, ᾗ καὶ τὰ θεωρήματα τῶν προβλημάτων διώρισται. καθάπερ γὰρ ἐν μὲν τοῖς θεωρήμασι τὸ ἀκόλουθον ἰδεῖν καὶ γνῶναι τοῖς ὑποκειμένοις προτιθέμεθα, ἐν δὲ τοῖς προβλήμασι πορίσασθαι καὶ ποιῆσαί τι προσταττόμεθα. καὶ ταῦτα δή, καὶ ἐν μὲν τοῖς ἀξιώμασι, τοιαῦτα λαμβάνεται, ὅσα αὐτόθι εἰς γνῶσίν ἐστι καταφανῆ, καὶ πρόχειρα ταῖς ἀδιδάκτοις ἡμῶν ἐννοίαις, ἐν δὲ τοῖς αἰτήμασι ταῦτα ζητοῦμεν λαβεῖν, ὅσα ἐστὶν εὐπόριστα καὶ εὐμήχανα, τῆς διανοίας οὐ καμνούσης ὑπὲρ τὴν λῆψιν αὐτῶν, οὐδὲ ποικιλίας δεομένης, οὐδὲ κατασκευῆς. γνῶσις ἄρα ἐνεργής, καὶ ἀναπόδεικτος, καὶ λῆψις ἀκατάσκευος διορίζουσι τά τε αἰτήματα, καὶ τὰ ἀξιώματα. ὥσπερ καὶ γνῶσις ἀποδεικτική, καὶ λῆψις τῶν ζητουμένων μετὰ κατασκευῆς τὰ θεωρήματα τῶν προβλημάτων πεποίηκε. δεῖ γὰρ δὴ πανταχοῦ τὰς ἀρχάς, τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς διαφέρειν, τῇ ἁπλότητι τῷ ἀναποδείκτῳ, καὶ αὐτοπίστῳ. καθόλου γάρ φησιν ὁ Σπεύσιππος, ὧν ἡ διάνοια τὴν θήραν ποιεῖται, τὰ μέν, οὐδεμίαν ποικίλην ποιησαμένη διέξοδον προβάλλει, καὶ προευτρεπίζει πρὸς τὴν μέλλουσαν ζήτησιν, καὶ ἔχει τούτων ἐναργεστέραν ἐπαφὴν μᾶλλον, ἢ τῶν ὁρατῶν ἡ ὄψις. τὰ δὲ ἐκ τῆς εὐθέως αἱρεῖν ἀδυνατοῦσα, κατὰ μετάβασιν ἀπ' ἐκείνων διαβαίνουσα, καὶ τὸ ἀκόλουθον αὐτῶν, μεταχειρίζεσθαι τὴν θήραν. οἷον, τὸ μὲν ἀπὸ σημείου γραμμὴν εὐθεῖαν ἐπὶ σημεῖον ἀγαγεῖν, ὡς πρόχειρον λαμβάνει καὶ εὐπόριστον. τῇ γὰρ ὁμαλῇ ῥύσει τοῦ σημείου συγκειμένην καὶ προϊοῦσα τὸ μηδαμοῦ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀπονεύειν εἰς τὸ ἕτερον, κατὰ ταῦτα σημεῖον. πάλιν εὐθείας τὸ μὲν τῶν περάτων μόνον περὶ αὐτὸ τὸ κινούμενον, γέγραφε τὸν κύκλον, εἰ δέ τις ἕλικα μονόστροφον γράφειν ἐθελήσει, ποικιλωτέρας δεῖται μηχανῆς, καὶ γὰρ κινήσεις ποικίλαι γεννῶσιν αὐτήν. καὶ εἴτις τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι, κἀνταῦθα δεήσεται μεθόδου τινός, εἰς τὴν τοῦ τριγώνου σύστασιν. ἐρεῖ γὰρ ὁ γεωμετρικὸς νοῦς ὅτι νοῆσαι εὐθεῖαν κατὰ μὲν θάτερον τῶν περάτων μένουσαν, κατὰ δὲ θάτερον κινουμένην περὶ ἐκεῖνο, καὶ σημεῖον ἀπὸ τοῦ μένοντος ἐπ' αὐτῆς κινούμενον εἰς ταὐτὸ καταστήσαντα καὶ συμπεσόντα ποιεῖ μοι τὴν τοιαύτην ἕλικα. καὶ πάλιν κύκλους ἴσους γράψας, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς εἰς τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἐπιζεύξας. καὶ ἀπὸ θατέρου τῶν κύκλων ἐπὶ θάτερον εὐθεῖαν ἀγαγὼν ἕξω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. πολλοῦ ἄρα δεῖ ταῦτα διὰ ἁπλῆς ἐπιβολῆς ἀποτελεῖσθαι, καὶ τῆς πρώτης ἐπινοίας. ἀγαπῶμεν γὰρ ἀκολουθοῦντες αὐτῶν ταῖς γενέσεσι. τὸ μὲν οὖν ῥᾷον ταῦτα πορίζεσθαι, καὶ χαλεπώτερον, καὶ ἢ διὰ πλειόνων δείκνυσθαι μέσων, ἢ δι' ἐλαττόνων, παρὰ τὰς ἐξῆς γίγνεται τῶν μεταχειριζομένων. τὸ δὲ ὅλως ἀποδείξεως χρῄζειν καὶ κατασκευῆς, παρὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ζητουμένων τῆς τῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων ἐνεργείας ἀπολειπομένων. ἄμφω μὲν οὖν τὸ ἁπλοῦν ἔχειν δεῖ καὶ εὔληπτον, τό, τε αἴτημα λέγω, καὶ τὸ ἀξίωμα. ἀλλὰ τὸ μὲν αἴτημα προστάττει ἡμῖν μηχανήσασθαι καὶ πορίσασθαί τινα ὕλην εἰς συμπτώσιν, ἀπόδοσιν ἁπλῆν ἔχουσαν καὶ εὐπετῆ τὴν λῆψιν, τὸ δὲ ἀξίωμα συμβεβηκός τι καθ' αὑτὸ λέγει γνώριμον αὐτόθεν τοῖς ἀκούουσιν, ὥσπερ καὶ τὸ θερμὸν εἶναι τὸ πῦρ, ἢ ἄλλο τι τῶν προφανεστάτων, ἐφ' ὧν καὶ τοὺς ἀποροῦντας, ἢ αἰσθήσεως, ἢ κολάσεως δεῖσθαι λέγομεν. ὥστε ὁμογενὲς μὲν τὸ αἴτημα τῷ ἀξιώματι, διαφέρον δὲ αὐτοῦ τὸν εἰρημένον τρόπον. ἑκάτερον γάρ

ἐστὶν ἀρχὴ ἀναπόδεικτος. ἀλλὰ τὸ μὲν ὧδε, τὸ δὲ ἄλλως καθάπερ εἴπομεν. ἤδη δὲ οἱ μὲν, πάντα αἰτήματα καλεῖν ἀξιοῦσιν, ὥσπερ καὶ προβλήματα τὰ ζητούμενα πάντα. καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης τῶν ἀνισοῤῥοπιῶν ἀρχόμενος, αἰτοῦμεθά φησι τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσοῤῥοπεῖν. καὶ τοῦτο μᾶλλον, ἀξίωμα ἄν τις εἴποι. οἱ δὲ, πάντα ἀξιώματα προσαγορεύουσιν, ὥσπερ δὴ καὶ θεωρήματα πάντα τὰ ἀποδείξεως δεόμενα. κατὰ τὴν αὐτὴν γὰρ ὡς ἔοικεν ἀναλογίαν ἀπὸ τῶν ἰδίων ἐπὶ τὰ κοινὰ μεταβεβήκασιν ὀνόματα. διέστηκε δὲ ὅμως ὥσπερ πρόβλημα θεωρήματος, οὕτω καὶ αἴτημα ἀξιώματος, εἰ καὶ ἀμφότερα ἀναπόδεικτά ἐστι, καὶ τὸ μὲν, ὡς εὐπόριστον λαμβάνεται, τὸ δὲ, ὡς εὔγνωστον ὁμολογεῖται. Γεμῖνος μὲν οὖν κατὰ τοῦτον τὸν λόγον τὰ αἰτήματα διαφέρει τῶν ἀξιωμάτων. ἄλλοι δ' ἂν φαῖεν ὅτι τὰ μὲν, ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ἐστιν ὕλης, τὰ δὲ, κοινὰ πάσης τῆς περὶ τὸ ποσὸν καὶ ποικίλον θεωρίας. τὸ μὲν γὰρ τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι, καὶ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν, ὁ γεωμέτρης οἶδεν. τὸ δὲ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι, κοινή ἐστιν ἔννοια, καὶ ὅ, τε ἀριθμητικὸς αὐτῇ χρῆται, καὶ ἕκαστος τῶν ἐπιστημόνων ἐφαρμόζων τῇ ἑαυτοῦ ὕλῃ τὸ κοινόν. ὁ δὲ Ἀριστοτέλης ὥσπερ καὶ πρότερον εἴπομεν, αἴτημά φησιν ἀποδεικτικὸν ὂν καὶ μὴ συγχωρούμενον ὑπὸ τοῦ ἀκούοντος, ὅμως ἀρχὴν λαμβάνεσθαι. τὸ δὲ ἀξίωμα ἀναπόδεικτον ὑπάρχειν καθ' αὑτὸ, καὶ πάντας ἂν ὁμολογῆσαι κατὰ διάθεσιν, εἰ καὶ λόγου ἕνεκά τινες διαμφισβητοῖεν πρὸς αὐτό. τριῶν δὲ τούτων ὄντων διορισμῶν, κατὰ μὲν τὸν πρῶτον, ὡς τῷ ποιεῖσθαι καὶ τῷ γνῶναι μόνον τὸ αἴτημα διέστηκε τοῦ ἀξιώματος. δῆλον ὅτι τὸ πάσας ὀρθὰς εἶναι ἴσας τὰς γωνίας, οὐκ ἔστιν αἴτημα, οὐδὲ τὸ πέμπτον, τὸ, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖά τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. ταῦτα γὰρ, οὐκ εἰς κατασκευὴν λαμβάνεται, οὐδὲ ποιεῖσθαί τι ἀξιοῖ, ἀλλὰ συμπτώματι δηλοῖ ταῖς ὀρθαῖς γωνίαις συνυπάρχον, καὶ ταῖς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομέναις. κατὰ δὲ τὸν δεύτερον, οὐκ ἔσται ἀξίωμα, τὸ, δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν. ὃ καὶ νῦν τινες ὡς ἀξίωμα προσγράφουσι. καὶ γὰρ τοῦτο τῆς γεωμετρικῆς ὕλης ἐστὶν, ὥσπερ τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς ἴσας εἶναι γωνίας. κατὰ δὲ τὸν τρίτον τὸν Ἀριστοτελικὸν, πάντα μὲν ὅσα δι' ἀποδείξεως πιστοῦταί τινος, ἔσται αἰτήματα, ὅσα δὲ ἀναπόδεικτά ἐστι ἀξιώματα. μάτην οὖν τῶν ἀξιωμάτων Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις ἀποδιδόναι. ὀρθῶς γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέστησεν ὅτι, οἱ μὲν, τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπινοοῦσιν, καὶ ἀπὸ ἀγνωστοτέρων μέσων, τὰ γνώριμα πᾶσι κατασκευάζειν ἐπεχείρησαν. ὃ δὴ πέπονθεν ὁ Ἀπολλώνιος, δεικνύναι βουλόμενος ὅτι ἀληθὲς τὸ ἀξίωμα τὸ λέγον, τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. οἱ δὲ, καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσλήφασιν, ὡς αὐτὸς Εὐκλείδης, τό, τε πέμπτον αἴτημα καὶ τὸ τέταρτον. καὶ γὰρ τοῦτό τινες ὡς ἀμφίβολον ἀποδείξεως δεῖσθαί φασι, καὶ πῶς γὰρ οὐ γελοῖον, ὧν τὰ ἀντίστροφα θεωρήματά ἐστιν ἀποδεικτικὰ, ταῦτα ὡς ἀναπόδεικτα προστάττειν. ὅτι γὰρ τῶν συμπιπτουσῶν εὐθειῶν, αἱ ἐκτὸς, ἐλάσσους εἰσὶ δυοῖν ὀρθαῖν, αὐτὸς ὁ Εὐκλείδης δείκνυσιν ἐν ἐκείνῳ τῷ θεωρήματι, παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθή ἐστιν, δείκνυται σαφῶς. οὐκ ἄρα ἀναπόδεικτα τούτοις ἀντιστρέφοντα συγχωρητέον φησὶν ὁ Γεμῖνος. ἔοικεν οὖν κατὰ τὴν τούτου διάταξιν, τρία μὲν εἶναι αἰτήματα, τὰ λοιπὰ δύο δεῖσθαι τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, αὐτά τε καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα αὐτοῖς. ἐν δὲ τοῖς ἀξιώμασι τὸ, δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, προσκεῖσθαι περιττῶς. εἴπερ δι' ἀποδείξεως ἔχει τὸ πιστόν. περὶ μὲν οὖν τῆς διαφορᾶς τῶν αἰτημάτων καὶ ἀξιωμάτων, τοσαῦτα. πάλιν δὲ αὐτῶν ἀξιωμάτων, τὰ μὲν ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἴδια, τὰ δὲ, γεωμετρίας, τὰ δὲ, κοινὰ αὐταῖς ἀμφοτέραις. τὸ μὲν γὰρ πάντα ἀριθμὸν ὑπὸ μονάδος μετρεῖσθαι, ἀξίωμα ἀριθμητικόν ἐστι. τὸ δὲ, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσιν ἀλλήλαις, καὶ τὸ πᾶν μέγεθος ἐπ' ἄπειρον εἶναι διαιρετὸν ἀξιώματα γεωμετρικά ἐστι. τὸ δὲ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι, καὶ ὅσα τοιαῦτα, κοινά ἐστιν ἀμφοῖν. χρῆται δὲ ἑκατέρα καὶ τούτοις ἐφ' ὅσον τὸ ὑποκείμενον ἀπαιτεῖ· οἷον, ἡ μὲν γεωμετρία, ἐπὶ μεγεθῶν, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ, ἐπ' ἀριθμῶν. ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν αἰτημάτων, τὰ μὲν ἴδια τῶν ἐπιστημῶν ἐστι, τὰ δὲ, κοινά. τὸ μὲν γὰρ διελεῖν τὸν ἀριθμὸν, εἰς τὰ ἐλάχιστα μέρη τῆς ἀριθμητικῆς ἴδιον ἂν φαίης αἴτημα. τὸ δὲ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν τῆς γεωμετρίας, τὸ δὲ εἰς ἄπειρον αὔξειν τὸ ποσὸν, κοινὸν ἀμφοτέρων. καὶ γὰρ ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ μέγεθος τοῦτο δύναται πάσχειν. ἠτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν

αἰτήματα

κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν, καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι. ταῦτα τὰ τρία, καὶ ἐνεργείας ἐφίεται καὶ τοῦ ποιεῖσθαί τι προστάττειν ἡμῖν ἐν τοῖς αἰτήμασιν δὲ κἀνάγκης ταχθήσεται, κατά γε τὸν Γεμῖνον. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ἑπόμενόν ἐστι διὰ ῥύσιν εἶναι τοῦ σημείου τὴν γραμμήν, καὶ τὴν εὐθεῖαν ὁμαλὴν καὶ ἀπαρέγκλιτον ῥύσιν. νοήσαντες οὖν τὸ σημεῖον κινούμενον τὴν ὁμαλὴν καὶ ἐλαχίστην κίνησιν ἐπὶ θάτερον σημεῖον καταντήσομεν, καὶ τὸ πρῶτον αἴτημα γέγονεν, οὐδὲν ποικίλον ἡμῶν ἐπινοησάντων. εἰ δὲ διὰ τῆς εὐθείας σημείῳ πεπερασμένης, ὡσαύτως νοήσαιμεν τὸ πέρας κινούμενον τὴν ἐλαχίστην καὶ ὁμαλὴν κίνησιν, ἔσται τὸ δεύτερον αἴτημα πορισθέν, ἀπὸ οὐδεμιᾶς μηχανῆς, καὶ ἁπλῆς ἐπιβολῆς. εἰ δὲ νοήσαιμεν μὲν τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ θάτερον, κινουμένην δὲ περὶ τὸ μένον κατὰ τὸ λοιπόν, τὸ τρίτον ἂν εἴη γεγονός. κέντρον μὲν γάρ ἐστι, τὸ μένον σημεῖον, διάστημα δέ, ἡ εὐθεῖα. ὅση γὰρ ἂν αὕτη τυγχάνῃ, τοσοῦτόν ἐστι τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου πρὸς πάντα τὰ μέρη τῆς περιφερείας. εἰ δέ τις ἀποροίη πῶς κινήσεις ἐπεισάγομεν τοῖς γεωμετρικοῖς ἀκινήτοις οὖσιν, πῶς δὲ τὰ ἀμερῆ κινοῦμεν, ταῦτα γὰρ ἀδύνατα εἶναι παντελῶς, ἀξιώσομεν αὐτόν, μὴ πάντα πᾶσι δυσχεραίνειν, μεμνημένον τῶν ἐν ἀρχῇ ἀποδεδειγμένων, ὡς ἄρα περὶ τῆς φαντασίας κειμένων, οἱ λόγοι γράφουσιν ἐκεῖ πάσας τὰς τῆς διανοίας εἰκόνας, ὧν ἔχει λόγον. τὸ γὰρ ἄγραφον γραμματεῖον, οὗτος ἦν ὁ τελευταῖος νοῦς καὶ παθητικός. ἀλλ' οὐδὲν ἡμῖν ὁ λόγος ὅπως. ὁ γάρ τοι νοῦς ὁ τὰ εἴδη δεχόμενος ἀλλαχόθεν διακινήσεως αὐτὰ δέχεται. τὴν μὲν κίνησιν μή τοι σωματικήν, ἀλλὰ φανταστικὴν νοήσωμεν, καὶ τὰ ἀμερῆ τὰς σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν, τὰς δὲ αὖ φανταστικὰς διεξόδους ὑπομένειν. καὶ γὰρ ὁ νοῦς ἀμερὴς ὢν κινεῖται, καὶ οὐ τοπικῶς, καὶ ἡ φαντασία κατὰ τὸ ἑαυτῆς ἀμερὲς ἔχει κίνησιν ἰδίαν. ἡμεῖς δὲ εἰς τὰς σωματικὰς κινήσεις ἀποβλέποντες, ἀπογιγνώσκομεν τῶν ἐν τοῖς διαστήμασι κινήσεων. τοῦ μὲν ὄντος σωματικοῦ τόπου καὶ τῶν ἔξω κινήσεων, τὰ ἀμερῆ καθαρεύει, κινήσεως δὲ ἄλλο εἶδος καὶ τόπος ἄλλος ἐπ' αὐτῶν θεωρεῖται, ταῖς κινήσεσι σύστοιχος. ἐπεὶ καὶ θέσιν ἔχειν τὸ σημεῖον ἐν τῇ φαντασίᾳ λέγομεν, καὶ οὐ ζητοῦμεν πῶς ἀμερὲς ἔτι δύναται μένειν κινούμενόν πως, καὶ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόπου. τόπος γὰρ τῶν μὲν διαστατῶν, διαστατός ἐστι, τῶν δὲ ἀμερῶν ἀδιάστατος. ἀλλ' οὖν τὰ ἰδίως τῶν γεωμετρικῶν εἴδη, καὶ ἄλλα τὰ ἀπ' ἐκείνων ὑφιστάμενα, καὶ ἄλλη τῶν σωμάτων ἡ κίνησις, καὶ ἄλλη τῶν ἐν φαντασίᾳ νοουμένων, καὶ ἄλλος ὁ τῶν διαστατῶν τόπος, ἄλλος ὁ τῶν ἀμερῶν. καὶ χρὴ ταῦτα διελομένους, μὴ συγχεῖν μηδὲ ἐπιταράττειν, τῶν πραγμάτων τὰς οὐσίας. ἔοικε δὲ τῶν τριῶν αἰτημάτων τούτων, τὸ μὲν πρῶτον, ἐν εἰκόσιν ἡμῖν ἐμφανίζειν, ὅπως τὰ ὄντα περιέχεται ἐν τοῖς αὐτῶν αἰτίοις, ἀμερέσιν οὖσιν, καὶ ὁρίζεται ἀπ' αὐτῶν, καὶ ὅτι καίπερ ὑποστάντα πανταχόθεν ὑπ' ἐκείνων περιείληπται. καὶ γὰρ ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων ὄντως ἐπὶ θάτερον ἀπὸ θατέρου ἐπιζεύγνυται, καὶ περατοῦται ὑπ' αὐτῶν, καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἀπείληπται. τὸ δὲ δεύτερον, ὅπως τὰ ὄντα ἐχόμενα τῶν οἰκείων ἀρχῶν, πρόεισιν ἐπὶ πάντα τήν τε πρὸς ἐκεῖνα συνέχειαν φυλάττοντα, καὶ μὴ ἀποσπώμενα ἀπ' αὐτῶν, ἀλλὰ διὰ τὴν ἀπειροδύναμον αἰτίαν πάντῃ ἐπειγόμενα χωρεῖν, τὸ δὲ τρίτον ὅπως τὰ προελθόντα πάλιν ἐπιστρέφεται πρὸς τὰς οἰκείας ἀρχάς. ἡ γὰρ τοῦ κινουμένου περὶ τὸ μένον στροφή, τὸν κύκλον ἀπογεννῶσα, μιμεῖται τὴν κατὰ κύκλον ἐπάνοδον. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι τὸ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι οὐ πάσαις ὑπάρχει γραμμαῖς. οὔτε γὰρ τῇ κυκλικῇ, οὔτε τῇ κισσοειδεῖ, οὔτε ὅλως ταῖς σχηματογραφούσαις, ἀλλ' οὐδὲ ταῖς μὴ ποιούσαις σχῆμα. οὐδὲ γὰρ ἡ μονόστροφος ἕλιξ ἐπ' ἄπειρον ἐκβάλλεται. μεταξὺ γὰρ δύο σημείων, ἔχει τὴν σύστασιν. οὐδὲ τῶν ἄλλων οὐδεμία γραμμῶν τῶν οὕτω γεννωμένων. ἀλλ' οὐδ' ἀπὸ παντὸς σημείου δυνατὸν ἐπιζευγνῦναι γραμμήν. οὐ γὰρ πᾶσα μεταξὺ πάντων σημείων ὑφίστασθαι δύναται. τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων. ἐπὶ δὲ τὰ ἑξῆς ἴωμεν.

Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.) Τοῦτο εἰ μὲν ὡς ἐναργὲς καὶ μὴ δεόμενον ἀποδείξεως συγχωροῦμεν, αἴτημα μὲν οὐκ ἔστι, κατὰ τὸν Γεμῖνον, ἀξίωμα δέ. συμβεβηκός γάρ τι καθ' αὑτὸ λέγει ταῖς ὀρθαῖς, ἀλλ' οὐ πορίζεσθαι διὰ πολλῆς ἐπινοίας ἀξιοῖ. ἀλλ' οὐδὲ κατὰ τὴν Ἀριστοτέλους διαίρεσιν, αἴτημά ἐστι. τὸ γὰρ αἴτημα κατ' ἐκεῖνον δεῖται ἀποδείξεώς τινος. εἰ δὲ ἀποδεικτικὸν αὐτό φαμεν εἶναι, καὶ ζητοῦμεν αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, οὐδ' ὡς κατὰ τὸν Γεμῖνον ἐν τοῖς αἰτήμασι ταχθήσεται. προφαίνεται μὲν οὖν καὶ κατὰ τὰς κοινὰς ἡμῶν ἐπινοίας, ἡ τῶν ὀρθῶν ἰσότης, μονάδος δὲ ἐχούσας λόγον ἢ ὅρου, πρὸς τὴν ἐπ' ἄπειρον αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν πρὸς ἑκάτερα γωνιῶν ἴση ἐστὶ πρὸς πᾶσαν ὀρθήν. καὶ γὰρ τὴν πρώτην οὕτως ἐπινοήσαμεν

τὴν ὀρθὴν



τὴν ὀρθὴν ἴσας τὰς ἐφ' ἑκάτερα γωνίας ποιήσαντος τῆς ἐφεστώσης εὐθείας, πρὸς ἣν ἐφέστηκεν. εἰ δὲ δεῖ καὶ ἀπόδειξιν αὐτοῦ παραθέσθαι γραμμικήν, ἔστωσαν δύο ὀρθαί, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΖ. λέγω δὴ ὅτι ἴσαι εἰσίν. εἰ γὰρ μή, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔσται, ἡ πρὸς τὸ Β. ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς ΔΕ, ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται, πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΒ, ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΘ, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις. ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία, ἴση τῇ ἐφεξῆς. ἡ ἄρα ὑπὸ τὸ ΑΒΘ μείζων τῆς ὑπὸ τὸ ΑΒΗ. πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΗ ἐπὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ, καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθή, διὰ ταῦτα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΒΚ. ὥστε ἡ ὑπὸ ΑΒΘ, ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΒΗ, ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς. τοῦτο μὲν οὖν καὶ ἄλλοις δέδεικται τῶν ἐξηγητῶν, καὶ οὐ πολλῆς ἐδεῖτο πραγματείας. ὁ δὲ Πάππος ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι ἀληθές, τό, τὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίαν, ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθήν. ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη, πάντως ὀρθὴν εἶναι. δύνασθαι δὲ καὶ περιφερόγραμμον γωνίαν ἴσην ὀρθῇ δειχθῆναι. καὶ δῆλον ὡς οὐκέτι τὴν τοιαύτην ὀρθὴν εἶναι δυνάμεθα προσαγορεύειν. ἐπὶ γὰρ τῆς τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομῆς, τὴν ὀρθὴν ἐλαμβάνομεν ὑφισταμένων αὐτὴν ὑπὸ εὐθειῶν, ὑφεστώσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἡ ἴση τῇ ὀρθῇ, οὐ πάντως καὶ τῇ ὀρθῇ ἐστὶν εἴπερ μὴ δὲ εὐθύγραμμος. νενοήσθωσαν οὖν εὐθεῖαι δύο, ἴσαι αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τὴν πρὸς τὸ Β ὀρθήν, καὶ ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡμικύκλια κέντροις καὶ διαστήμασι γραφέντα, τὰ ΑΕΒ, ΒΖΓ. ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ ἡμικύκλια ἐφαρμόσει ἀλλήλοις, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΒΑ γωνία, τῇ ὑπὸ ΖΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ. ὅλη ἄρα ἡ ὀρθή, ἴση ἐστὶ τῇ μηνοειδεῖ, τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. καὶ ὅμως οὐκ ἔστιν ἡ μηνοειδὴς ὀρθή. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ, καὶ ἀμβλείας οὔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, δειχθήσεται αὐτῇ ἴση γωνία ἡ μηνοειδής. τοῦτο γάρ ἐστι τὸ ἴδιον τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν, τὸ συμβιβαζόμενον ταῖς εὐθυγράμμοις. πλήν τό γε τοσοῦτον ἰστέον, ἐπὶ μὲν τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προσθεῖναι δεῖ τὴν μεταξὺ γωνίαν τῆς ΑΒ εὐθείας, καὶ ΒΖ περιφερείας· ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφελεῖν. ἡ γὰρ ΑΒ εὐθεῖα, τέμνει τὴν ΒΖ περιφέρειαν. ἐκκείσθω οὖν ἑκατέρας τῆς ὑποθέσεως τὰ διαγράμματα. ταῦτα μὲν οὖν ἀναγεγράφθω δεικνῦντα καὶ ὅτι πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρθῇ ἴση ὀρθή ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ δὲ εὐθύγραμμον εἴη, πῶς ἂν ὀρθήν τις εἴποι τὴν τοιαύτην. φανερὸν δὲ καὶ ἐκ τοῦδε τοῦ αἰτήματος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τῇ ἰσότητι συγγενής ἐστιν, ὥσπερ ἡ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης, τῇ ἀνισότητι. καὶ γάρ ἐστιν ἡ μὲν ὀρθότης αὐτῇ τῇ ἰσότητι σύστοιχος. ἀμφότεραι γὰρ ὑπὸ τὸ πέρας, ὥσπερ δὴ καὶ ἡ ὁμοιότης· ἡ δὲ ὀξύτης καὶ ἀμβλύτης, τῇ ἀνισότητι, καθάπερ καὶ ἡ ἀνομοιότης. ἀπειρίας γὰρ ἔκγονοι πᾶσαι. διὸ καὶ οἱ μέν, τὸ ποσὸν ὁρῶντες τῶν γωνιῶν, τὴν ὀρθὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ λέγουσιν. οἱ δὲ τὸ ποιόν, ὁμοίαν. ὅπερ γάρ ἐστιν ἐν ποσοῖς ἡ ἰσότης, τοῦτο ἐν τοῖς ποιοῖς ἡ ὁμοιότης.



Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάττονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν ὀρθῶν ἐλάττονες.) Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων. θεώρημα γάρ ἐστι, πολλὰς μὲν ἀπορίας ἐπιδεχόμενον, ἃς καὶ ὁ Πτολεμαῖος ἔν τινι βιβλίῳ διαλῦσαι προὔθετο. πολλῶν δὲ εἰς ἀπόδειξιν δεόμενον καὶ ὅρων καὶ θεωρημάτων, καίτοι γε ἀντιστρέφον καὶ ὁ Εὐκλείδης, ὡς θεώρημα δείκνυσιν. ἴσως δ' ἄν τινες ἀπατώμενοι, καὶ τοῦτο τάττειν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἀξιώσειαν ἄν, ὡς διὰ τῆς ἐλάττωσιν τῶν δύο ὀρθῶν αὐτόθεν τὴν πίστιν παρεχόμενον τῆς τῶν εὐθειῶν συννεύσεως, καὶ συμπτώσεως, πρὸς οὓς ὁ Γεμῖνος ὀρθῶς ἀπήντησεν λέγων, ὅτι παρ' αὐτῶν ἐμάθομεν τῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἡγεμόνων, μὴ πάνυ προσέχειν τὸν νοῦν ταῖς πιθαναῖς φαντασίαις, εἰς τὴν τῶν λόγων τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδοχήν. ὅμοιον γάρ φησι καὶ Ἀριστοτέλης ῥητορικὸν ἀποδείξεις ἀπαιτεῖν, καὶ γεωμέτρου πιθανολογοῦντος ἀνέχεσθαι. καὶ ὁ παρὰ τῷ Πλάτωνι Συμμίας, ὅτι τοῖς ἐκ τῶν εἰκότων τὰς ἀποδείξεις ποιουμένοις σύνοιδα οὖσιν ἀλαζόσι. κἂν τοίνυν, τὸ μὲν ἐλαττουμένων τῶν ὀρθῶν συννεύειν τὰς εὐθείας ἀληθὲς καὶ ἀναγκαῖον. τὸ δὲ συννευούσας, ἐπὶ πλέον ἐν τῷ ἐκβάλλεσθαι συμπεσεῖσθαί ποτε, πιθανόν, ἀλλ' οὐκ ἀναγκαῖον, εἰ μή τις ἀποδείξειεν λόγος, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τοῦτο ἀληθές. τὸ γὰρ εἶναί τινας γραμμάς, συννευούσας μὲν ἐπ' ἄπειρον, ἀσυμπτώτους δὲ ὑπαρχούσας, καίτοι δοκοῦν ἀπίθανον εἶναι καὶ παράδοξον, ὅμως ἀληθές ἐστι, καὶ πεφώραται ἐπ' ἄλλων εἰδῶν τῆς γραμμῆς. μήποτε οὖν τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν δυνατόν, ὅπερ ἐπ' ἐκείνων τῶν γραμμῶν. ἕως γὰρ δι' ἀποδεί-

ξεις ἂν τὸ καταδουσώμεθα πρὸς τὴν φαντασίαν τὰς ἐπ' ἄλλων δεικνυμένας γραμμάς, εἰ δὲ καὶ οἱ ἀμφισβητοῦντες λόγοι πρὸς τὴν σύμπτωσιν πολὺ τὸ πληκτικὸν ἔχοιεν, πῶς οὐχὶ πολλῷ πλέον ἂν τὸ πιθανὸν τοῦτο καὶ τὸ ἄλογον ἐκβαλοίμεθα τῆς ἡμετέρας παραδοχῆς. ἀλλ' ὅτι μὲν ἀπόδειξιν χρὴ ζητεῖν τοῦ προκειμένου θεωρήματος, δῆλον ἐκ τούτων. καὶ ὅτι τῆς τῶν αἰτημάτων ἐστὶν ἀλλοτρίου ἰδιότητος. πῶς δὲ ἀποδεικτέον αὐτό, καὶ διὰ ποίων λόγων ἀναιρετέον τὰς πρὸς αὐτὸ φερομένας ἐνστάσεις, τηνικαῦτα λεκτέον ἡνίκα καὶ ὁ στοιχειωτὴς αὐτοῦ μέλλει ποιεῖσθαι μνήμην, ὡς ἐναργεῖ προσχρώμενος, τότε γὰρ ἀναγκαῖον ἑαυτοῦ δεῖξαι τὴν ἐνάργειαν, οὐκ ἀναποδείκτως προφερομένην ἀλλὰ διὰ ἀποδείξεως γνώριμον γιγνομένην.

Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἐὰν ἴσα ἴσοις προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα ἐστί. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα, ἴσα ἐστί. καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἄνισα. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν. καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσι.) Ταῦτά ἐστι, τὰ παρὰ πάντας ἀναπόδεικτα καλούμενα ἀξιώματα, καθόσον ὑπὸ πάντων οὕτως ἔχειν ἀξιοῦται, καὶ διαμφισβητεῖ πρὸς ταῦτα οὐδείς. πολλάκις μὲν γὰρ καὶ τὰς προτάσεις ἁπλῶς ἀξιώματα καλοῦσιν, ὁποῖαι ποτ' ἂν ὦσιν, εἴτε ἄμεσοι κυρίως, εἴτε καὶ δεόμεναι τινὸς ὑπομνήσεως. καὶ οἵ γε ἀπὸ τῆς στοᾶς, ἅπαντα λόγον ἀπλοῦν καταφατικὸν ἀξίωμα προσαγορεύειν εἰώθασι, καὶ ὅτε διαλεκτικὰς ἡμῖν τέχνας γράφουσι, περὶ ἀξιωμάτων δηλοῦν ἐθέλουσιν. ἀκριβέστερον δὲ τινὲς ἀπὸ τῶν ἄλλων προτάσεων διακρίνοντες τὸ ἀξίωμα, τὴν ἄμεσον καὶ αὐτόπιστον διὰ ἐνάργειαν πρότασιν, οὕτως ὀνομάζουσιν ὥσπερ καὶ ὁ Ἀριστοτέλης, καὶ οἱ γεωμέτραι λέγουσι. ταυτὸ γάρ ἐστι παρὰ τούτοις ἀξίωμα, καὶ ἔννοια κοινή. πολλοῦ δὲ ἄρα δεόμεθα ἡμεῖς τὸν γεωμέτρην Ἀπολλώνιον ἐπαινεῖν, ὃς καὶ τῶν ἀξιωμάτων ὡς οἴεται γέγραφεν ἀποδείξεις ἀπ' ἐναντίας Εὐκλείδῃ φερόμενος. ὁ μὲν γὰρ καὶ ἀποδεικτικὸν ἐν τοῖς αἰτήμασι κατηρίθμησεν, ὁ δὲ, καὶ τῶν ἀναποδείκτων ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις εὑρίσκειν. ἦν δὲ ἄρα διωρισμένα ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων τῇ φύσει, καὶ τῶν σημαδῶν διαφέρον τὸ γένος, τῆς τε περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις, καὶ πάντη δι' ἐνάργειαν προσπιπτούσας, καὶ τῆς ταῖς ἀποδείξεσι χρωμένων, αἳ τὰς ἀρχὰς ἀπ' ἐκείνων λαμβάνουσι, καὶ λαβοῦσαι χρῶνται πρὸς τὰ οἰκεῖα συμπεράσματα δεόντως. ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἣν Ἀπολλώνιος εὑρηκέναι πέπεικε τοῦ πρώτου τῶν ἀξιωμάτων οὐδὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμώτερον, εἰ μὴ καὶ πλέον ἀμφισβητούμενον, μάθοι τις ἂν ἀποβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. ἔστω γάρ φησι τὸ α τῷ β ἴσον, τοῦτο δὲ, τῷ γ. λέγω ὅτι καὶ τὸ α τῷ γ ἴσον. ἐπεὶ γὰρ τὸ α τῷ β ἴσον, τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον, καὶ τὸ ἄρα α τῷ γ τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον, ἴσα ἄρα ἐστίν. ἐν δὴ τούτοις, δύο προλαβεῖν ἀναγκαῖον. ἓν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον, ἀλλήλοις ἴσα ἐστίν, ἕτερον δὲ ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον, καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. ταῦτα δὲ, ὅτι πολλῷ ἀσαφέστερα τοῦ προηγουμένου ἀξιώματος ἐναργές. πῶς γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν ἐκπληροῦντα τόπον ἴσα ἐστί, κατὰ βολὰ, ἢ περὶ μέρος, ἢ περὶ σχηματισμὸν λέγουσιν, διὸ καὶ οὐκ ἔστι παντελῶς, εὐπαραδεκτέον τὸ μεταβάλλειν περὶ τὸν τόπον, ὃς ἐστιν ἀγνωστότερος ἡμῖν τῶν ἐν τόπῳ ὄντων· χαλεπὴ γοῦν καὶ ἡ εὕρεσις τῆς οὐσίας, καὶ ἀμφισβητήσιμος. ἵνα οὖν μὴ μακρηγορῶμεν, πάντα ἀξιώματα ὡς ἄμεσα καὶ αὐτοφανῆ παραδεκτέον γνώριμα ἀφ' ἑαυτῶν ὄντα καὶ πιστά. ὁ γὰρ τοῖς φανερωτάτοις ἀπόδειξιν προσάγων, οὐ βεβαιοῖ τὴν περὶ αὐτῶν ἀλήθειαν ἀλλ' ἐλαττοῖ τὴν ἐνάργειαν ἣν ἔχομεν ἐν τοῖς ἀδιδάκτοις προλήψεσι. τοῦτο δὲ δὴ περὶ τῶν ἀξιωμάτων προληπτέον, κριτήριον τῆς ἰδιότητος αὐτῶν, καὶ ὅτι πάντα τῶν κοινῶν γένους ἐστὶ τῶν μαθημάτων, οὐ μόνον λέγεται μεγέθεσιν ἀληθεύειν τούτων ἕκαστον, ἀλλὰ καὶ ἀριθμοῖς καὶ κινήσεσι καὶ χρόνοις. καὶ τοῦτο ἀναγκαῖον. τό γε ἴσον καὶ ἄνισον, καὶ τὸ ὅλον καὶ τὸ μέρος, καὶ τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλαττον, κοινὰ καὶ τῶν διῃρημένων ἐστὶ ποσῶν, καὶ τῶν συνεχῶν. ἥ τε οὖν περὶ τοὺς χρόνους θεωρία δεῖται πάντων τούτων ὡς ἐναργῶν, καὶ ἡ περὶ τὰς κινήσεις, καὶ ἡ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ μεγέθη, καὶ ἐπὶ πάντων ἀληθές, καὶ τὸ τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι, καὶ τῶν λοιπῶν ὅπερ ἂν λάβωμεν κοινοῖς δὲ οὖσιν, ἕκαστος χρῆται κατὰ τὴν οἰκείαν ὕλην ἐφ' ἣν αὐτὴ ἀπαιτεῖ. καὶ ὁ μὲν, ὡς περὶ μεγεθῶν, ὁ δὲ, ὡς περὶ χρόνων αὐτοῖς προσχρῆται. καὶ οὕτως ἰδία γέγονε τὰ συμπεράσματα καθ' ἑκάστην ἐπιστήμην, κἂν ᾖ τὰ ἀξιώματα κοινά. καὶ μὴν, καὶ τὸν ἀριθμὸν

ἀριθμὸν αὐτῶν. ἔτι εἰς ἐλάχιστον δεῖ συναιρεῖν ὡς ὁ Ἥρων ποιεῖ, τρία μόνα ἐκθέμενος ἀξιώματα. καὶ ὅτι τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ὁ γεωμέτρης πολλαχοῦ καὶ αὐτὸ προσλαμβάνει πρὸς τὰς ἀποδείξεις. καὶ ὅτι τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα. καὶ γὰρ αὐτὸ εὐθὺς ἐν τῷ τετάρτῳ συντελέσει πρὸς τὸ ζητούμενον. οὔτε αὖ προσθεῖναι ἄλλα ἐπ᾽ ἄλλοις, ὧν τὰ μέν ἐστιν ἴδια τῆς γεωμετρικῆς ὕλης, ὡς δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν. καίτοι τῶν ἀξιωμάτων τῶν κοινῶν ὄντων ὡς εἴπομεν, τὰ δὲ, ἕπεται τοῖς ἐκκειμένοις, οἷον, τὸ ἴσα τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια εἶναι. καὶ αὐτὸ γὰρ ἀκολουθεῖ, τῷ ἂν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα εἶναι. τὰ γὰρ ἴσα τῷ ἡμίσει προσλαβόντα αὐτὸ τὸ ἥμισυ, διπλάσιά τε γίγνεται τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἴσα ἀλλήλοις, διὰ τὴν ἴσην προσθήκην. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν λόγον, οὐ τὰ διπλάσια μόνον, ἀλλὰ καὶ τὰ τριπλάσια καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ πολλαπλάσια πάντα ἴσα φανήσεται. τούτοις δὲ τοῖς ἀξιώμασιν ὁ Πάππος, συναναγράφεσθαί φησιν, ὅτι καὶ ἂν ἴσοις ἄνισα προστεθῇ, ἡ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν προστεθέντων. καὶ ἀνάπαλιν. ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, ἡ τῶν ὅλων ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν ἐξ ἀρχῆς. καὶ ἔστι καὶ ταῦτα προφανῆ μὲν ἀφ᾽ ἑαυτῶν, δείκνυται δὲ ὅμως τοῦτον τὸν τρόπον. ἔστω ἴσα τὰ α β. καὶ προσκείσθω αὐτοῖς ἄνισα, τὰ γ δ. μεῖζον δὲ ἔστω τὸ γ τοῦ δ τῷ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ α τῷ β ἴσον, καὶ τὸ ζ τῷ δ, τὸ αζ τῷ βδ ἴσον. ἐὰν γὰρ ἴσα ἴσοις προστεθῇ, τὰ ὅλα ἴσα. τὰ ἄρα γδ τοῦ βδ, τῷ ε μόνῳ ὑπερέχει. ᾧ καὶ τὸ γ μόνον ὑπερεῖχεν τοῦ δ. πάλιν ἄνισα τὰ γ δ, καὶ προσκείσθω ἴσα τὰ α β, καὶ ἔστω τῆς γ πρὸς τὸ δ ὑπεροχὴ τὸ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ α τῷ β ἴσον καὶ τὸ αζ ἴσον τῷ βδ, ὅλον ἄρα τὸ αγ τοῦ βδ τῷ ε μόνῳ ὑπερέχει, ᾧ καὶ τὸ γ τοῦ δ. ταῦτα οὖν ἕπεται τοῖς προειρημένοις ἀξιώμασι, καὶ εἰκότως ἐν τοῖς πλείστοις ἀντιγράφοις παραλείπεται. ὅσα δὲ ἄλλα τούτοις προστιθέασι προείληπται διὰ τῶν ὅρων, καὶ ἐκείνοις ἀκολουθεῖ, οἷον, ὅτι πάντα τοῦ ἐπιπέδου τὰ μόρια, καὶ τῆς εὐθείας ἀλλήλοις ἐφαρμόττει. τὰ γὰρ εἰς ἄκρον τεταγμένα, τοιαύτην ἔχει φύσιν. καὶ ὅτι γραμμὴν μὲν διαιρεῖ σημεῖον, ἐπιφάνειαν δὲ γραμμή, στερεὸν δὲ ἐπιφάνεια. πάντα γὰρ διαιρετὰ τούτοις, ἐφ᾽ ὧν καὶ πέρατά ἐστι προσεχῶς. καὶ ὅτι τὸ ἄπειρον ἐν τοῖς μεγέθεσίν ἐστι, καὶ τῇ προσθέσει, καὶ τῇ ἀφαιρέσει, δυνάμει δὲ ἑκάτερον. πᾶν γὰρ συνεχὲς, ἐπ᾽ ἄπειρον διαιρετόν ἐστι καὶ αὐξητόν. ἀλλ᾽ ἐπεὶ καὶ ταῦτα συνεκεφαλαιωσάμεθα, τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς λοιπὴν τὴν ἐπίσκεψιν ποιησόμεθα. μέχρι γὰρ τούτων αἱ ἀρχαί. τῶν δὲ πρὸς γεωμετρίαν ἐνστάσεων, οἱ μὲν πλεῖστοι πρὸς τὰς ἀρχὰς ἠπόρησαν ἀνυπόστατα τὰ μέρη δεικνύναι ἀποβλέψαντες. ὧν καὶ οἱ λόγοι διατεθρύλληνται. τῶν μὲν, καὶ πᾶσαν ἐπιστήμην ἀναιρούντων, καὶ ὥσπερ πολεμίων καρποὺς ἐξ ἀλλοτρίας χώρας, καὶ γονίμους τῆς φιλοσοφίας ἀφανιζόντων, ὥσπερ τῶν ἐφεκτικῶν. τῶν δὲ, τὰς γεωμετρικὰς μόνας ἀρχὰς ἀνατρέπειν προθεμένων ὥσπερ τῶν Ἐπικουρείων. οἱ δὲ, πάλιν καὶ ταῖς ἀρχαῖς ἐπιτρέψαντες, οὔ φασι τὰ μετὰ τὰς ἀρχὰς ἀποδείκνυσθαι μὴ συγχωρηθέντος αὐτοῖς, καὶ ἄλλου τινὸς, ὃ μὴ προείληπται ἐν ταῖς ἀρχαῖς. τοῦτον γὰρ τὸν τρόπον τῆς ἀντιρρήσεως μετῆλθεν Ζήνων ὁ Σιδώνιος μὲν, τῆς δὲ Ἐπικούρου μετέχων αἱρέσεως, πρὸς ὃν καὶ ὁ Ποσειδώνιος ὅλον γέγραφε βιβλίον, δεικνὺς σαθρὰν αὐτοῦ, πᾶσαν τὴν ἐπίνοιαν. ἀλλ᾽ αἱ μὲν ὑπὲρ τῶν ἀρχῶν αἰτιολογίαι, μετρίως ἡμῖν διὰ τῶν ἔμπροσθεν ἠνύσθησαν. τὴν δὲ τοῦ Ζήνωνος ἐπιβολήν, μικρὸν ὕστερον ἐπισκεψόμεθα. νυνὶ δὲ ἀναλαβόντες ἐπὶ βραχὺ τὸν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων λόγον, καὶ περὶ διαφορᾶς αὐτῶν, καὶ τῶν ἑκατέρου μερῶν, καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρέσεων, ἐπὶ τὴν ἐξήγησιν τραπώμεθα, τῶν δεικνυμένων ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ, τὰ μὲν γλαφυρώτερα τῶν εἰς ταῦτα γεγραμμένων τοῖς παλαιοῖς ἀναλεγόμενοι, καὶ τὴν ἀπέραντον αὐτῶν πολυλογίαν συντέμνοντες, τὰ δὲ τεχνικώτερα καὶ μεθόδων ἐπιστημονικῶν ἐχόμενα παραδιδόντες, τῇ τῶν πραγμάτων ἐπεξεργασίᾳ πλέον ἀπονέμοντες ἢ τῇ ποικιλίᾳ τῶν πτώσεων καὶ λημμάτων, οἷς ὡς τὸ πολὺ, νεοπρεπῶς ἐπιτρέχοντας ὁρῶμεν.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Τῆς ἐπιστήμης πάσης διττῆς οὔσης, καὶ τῆς μὲν περὶ τὰς ἀμέσους προτάσεις ἀσχολουμένης, τῆς δὲ περὶ τὰ ἐξ ἐκείνων δεικνύμενα καὶ ποριζόμενα, καὶ ὅλως περὶ τὰ ἀκόλουθα ταῖς ἀρχαῖς, ἐξελιττούσης τὴν ἑαυτῆς πραγματείαν αὕτη πάλιν ἐν τοῖς γεωμετρικοῖς λόγοις, διεῖλεν ἑαυτήν. εἴς τε τὴν τῶν προβλημάτων ἀπεργασίαν, καὶ τὴν τῶν θεωρημάτων εὕρεσιν. προβλήματα μὲν καλοῦσα, ἐν οἷς τὰ μὴ ὄντα πῶς ποιεῖσθαι, προστίθεται, καὶ εἰς ἐμφανὲς προαγαγεῖν, καὶ προσμηχανήσασθαι. θεωρήματα δὲ ἐν οἷς τὸ ὑπάρχει ἢ μὴ ὑπάρχει ἰδεῖν καὶ γνῶναι καὶ ἀποδεῖξαι προαιρεῖται. τὰ μὲν γενέσεις καὶ θέσεις καὶ παραβολάς, ἀναγραφὰς καὶ περιγραφάς, καὶ ὅσα τοιαῦτα ὑποστήσασθαι παρασκευάζει, τὰ δὲ τὰ συμπτώματα, καὶ καθ᾽ αὐτὰ ὑπάρχοντα τοῖς ὑποκειμένοις, τῇ γεωμετρίᾳ πιέ-

καὶ κατασκευάσασθαι, καὶ περὶ ὅσων ζητήσεις γενέσθαι δυνατόν. περὶ τούτων πάντων ἡ γεωμετρία ποιεῖται τὸν λόγον, τὰ μὲν, εἰς τὰ προβλήματα ἀναφέρουσα, τὰ δὲ, εἰς τὰ θεωρήματα. καὶ γὰρ, τὸ τί ἐστι ζητεῖ, καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ τὸν λόγον ζητεῖ καὶ τὴν νόησιν, ἢ τὴν νόησιν καὶ τὴν οὐσίαν αὐτὴν τοῦ ὑποκειμένου. λέγω δὴ ὅταν ζητῇ, τίς ἡ ὁμοιομερὴς γραμμή, τοῦτο γὰρ ζητοῦσα, ἢ τὸν ὅρον εὑρεῖν ἐθέλει τῆς τοιαύτης γραμμῆς, ὅτι ὁμοιομερής ἐστιν ἡ γραμμή, ἡ πάντα τὰ μόρια πᾶσιν ἐφαρμόζοντα ἔχουσα, ἢ αὐτὰ τὰ εἴδη τῶν ὁμοιομερῶν γραμμῶν λαβεῖν, οἷον ὅτι ἡ εὐθεῖά ἐστιν, ἢ περιφερής, ἢ περὶ κύλινδρον ἕλιξ. καὶ πρὸς τούτῳ τὸ εἰ ἔστιν αὐτὸ καθ' αὑτὸ ζητεῖ, καὶ τοῦτο μάλιστα ἐν τοῖς διορισμοῖς ἐξετάζουσα, εἰ ἀδύνατον τὸ διὰ τοῦτο ζητούμενον ἢ δυνατόν. καὶ μέχρι τινὸς ἐγχωρεῖ, καὶ ποσαχῶς. καὶ μὴν καὶ τὸ ὁποῖόν τι ἐστιν, ὅταν γὰρ τὰ καθ' αὑτὰ συμβεβηκότα τῷ τριγώνῳ καὶ τῷ κύκλῳ καὶ ταῖς παραλλήλοις ἐπισκοπῇ, δῆλον ὅτι τὸ ὁποῖόν ἐστιν ἐνταῦθα ζητεῖ. τήν γε μὴν αἰτίαν, καὶ τὸ διότι, πολλοῖς μὲν ἔδοξεν ἡ γεωμετρία μὴ θεωρεῖν. ταύτης γάρ ἐστι καὶ ὁ Ἀμφίνομος τῆς δόξης, Ἀριστοτέλους κατάρξαντος. εὕροις δ' αὐτήν φησιν ὁ Γεμῖνος καὶ τὴν τούτου ζήτησιν ἐν γεωμετρίᾳ. πῶς γὰρ οὐχὶ γεωμέτρου τὸ ζητεῖσθαι δι' ἣν αἰτίαν, ἐν μὲν τοῖς κύκλοις ἄπειρα πολυγώνια ἐγγράφεται ἰσόπλευρα, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις, οὐκέτι πολύεδρα σχήματα ἰσόπλευρα, ἰσογώνια, καὶ ἐξ ὁμοίων ἐπιπέδων συγκείμενα δυνατὸν ἐγγράφειν ἄπειρα. τίνος γὰρ ἂν εἴη τοῦτο καὶ ζητῆσαι καὶ εὑρεῖν ἢ τοῦ γεωμέτρου; ὅτε μὲν οὖν ὁ συλλογισμὸς ἡ διὰ ἀδυνάτου τοῖς γεωμέτραις, ἀγαπῶσι τὸ σύμπτωμα μόνον εὑρεῖν, ὅταν δὲ διὰ προηγουμένης ἀποδείξεως, τότε πάλιν εἰ μὲν ἐπὶ μέρους αἱ ἀποδείξεις γένοιντο, οὔπω δῆλον τὸ αἴτιον, εἰ δὲ καθόλου καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ὁμοίων, εὐθὺς καὶ τὸ διότι γίγνεται καταφανές. περὶ μὲν οὖν τῶν ζητημάτων τοσαῦτα. πᾶν δὲ πρόβλημα καὶ πᾶν θεώρημα τὸ ἐκ τελείων τῶν ἑαυτοῦ μερῶν συμπεπληρωμένον, βούλεται πάντα ταῦτα ἔχειν ἐν ἑαυτῷ, πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμόν, κατασκευήν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα. τούτων δέ, ἡ μὲν πρότασις λέγει τίνος δεδομένου, τί τὸ ζητούμενόν ἐστιν. ἡ γὰρ τελεία πρότασις, ἐξ ἀμφοτέρων ἐστίν. ἡ δὲ ἔκθεσις αὐτὸ καθ' αὑτὸ τὸ δεδομένον ἀποδιαλαβοῦσα προευτρεπίζει τῇ ζητήσει. ὁ δὲ διορισμὸς χωρὶς τὸ ζητούμενον, ὅ, τι ποτέ ἐστι διασαφεῖ. ἡ δὲ κατασκευή, τὰ ἐλλείποντα τῷ δεδομένῳ, πρὸς τὴν τοῦ ζητουμένου θήραν προστίθησι. ἡ δὲ ἀπόδειξις, ἐπιστημονικῶς ἀπὸ τῶν ὁμολογηθέντων, συνάγει τὸ προκείμενον. τὸ δὲ συμπέρασμα πάλιν ἐπὶ τὴν πρότασιν ἀναστρέφει βεβαιοῦν τὸ δεδειγμένον. καὶ τὰ μὲν σύμπαντα μέρη, τῶν τε προβλημάτων καὶ θεωρημάτων ἐστὶ τοσαῦτα. τὰ δὲ ἀναγκαιότατα καὶ ἐν πᾶσιν ὑπάρχοντα, πρότασις καὶ ἀπόδειξις καὶ συμπέρασμα. δεῖ γὰρ καὶ προεγνῶσθαι τὸ ζητούμενον καὶ δείκνυσθαι τοῦτο διὰ τῶν μέσων, καὶ συνάγεσθαι τὸ δεδειγμένον, καὶ τούτων τῶν τριῶν ἐκλείπειν τι τῶν ἀδυνάτων ἐστί. τὰ δὲ λοιπὰ πολλαχοῦ μὲν παραλαμβάνεται, πολλαχοῦ δὲ οὐδεμίαν παρέχοντα χρείαν, παραλείπεται. διορισμός τε γὰρ καὶ ἔκθεσις, οὐκ ἔστιν ἐν ἐκείνῳ τῷ προβλήματι, ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει διπλασίαν τῆς λοιπῆς. κατασκευὴ δὲ ἐν πλείστοις πάνυ θεωρήμασιν οὐκ ἔστι, τῆς ἐκθέσεως ἀποχρώσης ἄνευ προσθήκης ἄλλης ἐκ τῶν δεδομένων δεῖξαι τὸ προκείμενον. πότε οὖν ἐκλείπειν τὴν ἔκθεσιν φαμέν; ὅταν ἐν τῇ προτάσει μηδὲν ᾖ δεδομένον. ὅτι ἡ πρότασις διῄρηται ὡς ἐπίπαν εἰς δεδομένον καὶ ζητούμενον. οὐ μὴν τοῦτο ἀεὶ γίγνεται, ἀλλ' ἐνίοτε μόνον λέγει τὸ ζητούμενον ὃ δεῖ γνῶναι ἢ ποιήσασθαι, ὡς ἐπὶ τοῦ προειρημένου προβλήματος. οὐ γὰρ προλέγει τίνος δεδομένου δεῖ συστήσασθαι τὸ ἰσοσκελὲς ἔχον ἑκατέραν τῶν ἴσων διπλασίαν τῆς λοιπῆς, ἀλλ' ὅτι δεῖ ποιήσασθαι. καὶ γίγνεται μὲν κἀνταῦθα ἐκ προεγνωσμένων ἡ τοῦ προκειμένου λῆψις. καὶ γὰρ τί τὸ ἰσοσκελές, καὶ τί τὸ ἴσον ἢ διπλάσιον εἰδότες τυγχάνομεν. τοῦτο δὲ ἁπάσης τῆς διανοητικῆς μαθήσεως ἴδιόν φησιν Ἀριστοτέλης. ὑπόκειται δὲ ὅμως οὐδὲν ἡμῖν ὥσπερ ἐπ' ἄλλων προβλημάτων, οἷον, ὅτε λέγει, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν. ἐνταῦθα γὰρ ἡ εὐθεῖα δέδοται, προστασσόμεθα δὲ αὐτήν, δίχα διελεῖν. καὶ διώρισται, τί μὲν τὸ δεδομένον χωρίς, τί δὲ τὸ ζητούμενον. ὅταν μὲν οὖν ἡ πρότασις ἀμφότερα ἔχῃ, τότε καὶ διορισμὸς εὑρίσκεται καὶ ἔκθεσις. ὅταν δὲ ἐκλείπῃ τὸ δεδομένον, ἐκλείπουσι καὶ ταῦτα. ἡ γὰρ ἔκθεσις τοῦ δεδομένου ἐστί, καὶ ὁ διορισμός. ἔσται γὰρ ὁ αὐτὸς τῇ προτάσει. τί γὰρ ἄλλο ἂν εἴποις διοριζόμενος ἐπὶ τοῦ προειρημένου προβλήματος, ἢ ὅτι δεῖ εὑρεῖν ἰσοσκελὲς τοιόνδε. τοιοῦτον δὲ ἦν ἡ πρότασις. ἐὰν ἄρα ἡ πρότασις μὴ ἔχῃ τὸ μὲν δεδομένον, τὸ δὲ ζητούμενον, ἡ μὲν ἔκθεσις τοῦ δεδομένου ἐστὶ καὶ ὁ διορισμὸς ἔσται γὰρ ὁ αὐτὸς τῇ προτάσει. τί γὰρ ἄλλο ἂν εἴποις διοριζόμενος ἐπὶ τοῦ προτεθέντος προβλήματος.

Πρότασις. Ἔκθεσις. Διορισμός. Κατασκευή. Ἀπόδειξις. Συμπέρασμα.

ἢ ὅτι

ἢ ὅτι δεῖ εὑρεῖν ἰσοσκελὲς τοιόνδε. ἔστω δὲ ἤδη ἡ πρότασις. ἐὰν ἄρα ἡ πρότασις μὴ ἔχῃ τὸ μὲν δεδομένον, τὸ δὲ ζητούμενον, ἡ μὲν ἔκθεσις σιωπᾶται, τῷ μὴ εἶναι τὸ δεδομένον. ὁ δὲ διορισμὸς παραλείπεται, ἵνα μὴ ὁ αὐτὸς γένηται τῇ προτάσει. πολλὰ δ' ἂν εὕροις καὶ ἄλλα τοιαῦτα προβλήματα, καὶ μάλιστα ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, καὶ ἐν τῷ δεκάτῳ, εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει συμμέτρους μόνον ῥητὸν περιεχούσας, καὶ πάντα ὅσα τοιαῦτα. πᾶν γε μὴν τὸ δεδομένον καθ' ἕνα τούτων δίδοται τῶν τρόπων, ἢ θέσει, ἢ λόγῳ, ἢ μεγέθει, ἢ εἴδει. τὸ μὲν γὰρ σημεῖον, θέσει δίδοται μόνον, γραμμὴ δὲ καὶ τὰ ἄλλα πᾶσιν. ὅτε γὰρ λέγομεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, τὸ εἶδος λέγομεν ὁποῖον δέδοται τῆς γωνίας ὅτι εὐθύγραμμον, ἵνα μὴ ζητῶμεν διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου, καὶ τὴν περιφερόγραμμον δίχα τεμεῖν. ὅτε δὲ, ὅτι δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἀφελεῖν, τῷ μεγέθει δέδοται. τὸ γὰρ μεῖζον καὶ ἔλασσον, καὶ τὸ πεπερασμένον καὶ ἄπειρον τοῦ μεγέθους ἐστὶν ἴδια κατηγορήματα. ὅταν δὲ λέγωμεν ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται, δέδοται ὁ αὐτὸς λόγος ἐν τοῖς τέτρασι μεγέθεσιν. ὅτε δὲ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ χρὴ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι, τότε τῇ θέσει δέδοται τὸ σημεῖον. διὸ καὶ τῆς θέσεως διαφόρους δυναμένης εἶναι, καὶ ἡ κατασκευὴ ποικιλίαν δέχεται. δέδοται γὰρ τὸ σημεῖον, ἢ ἔξω τῆς εὐθείας, ἢ ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ ἐπ' ἄκρου τῆς εὐθείας, ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περάτων αὐτῆς. τετραχῶς οὖν τοῦ δεδομένου παραλαμβανομένου, δῆλον ὅτι καὶ ἡ ἔκθεσις γίνεται τετραχῶς. ἐνίοτε δὲ καὶ δύο συμπλέκει τρόπους καὶ τρεῖς. τὴν δὲ λεγομένην ἀπόδειξιν, ὅτε μὲν καὶ τὰ ἴδια τῆς ἀποδείξεως ἔχουσαν εὑρήσομεν, ἀπὸ τῶν ὁρισμῶν μέσων τὸ ζητούμενον δεικνῦσαν. αὕτη γὰρ ἀποδείξεως τελειότης. ὅτε δὲ ἐκ τεκμηρίων ἐπιχειροῦσαν. καὶ δεῖ μὴ λανθάνειν. πανταχοῦ γὰρ τὸ ἀναγκαῖον ἔχουσιν οἱ γεωμετρικοὶ λόγοι, διὰ τὴν ὑποκειμένην ὕλην, οὐ πανταχοῦ δὲ περαίνονται διὰ τῶν ἀποδεικτικῶν μεθόδων. ὅταν γὰρ διὰ τοῦ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν ἴσην εἶναι δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον δείκνυται, τὸ τρίγωνον ἴσας ἔχειν τὰς ἐντὸς τρεῖς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς, πῶς ἀπ' αἰτίας ἡ ἀπόδειξις αὕτη; πῶς δὲ οὐχὶ τεκμήριόν ἐστι τὸ μέσον; καὶ γὰρ μήπω τῆς ἐκτὸς οὔσης γωνίας αἱ ἐντὸς οὖσαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἔστι γὰρ τὸ τρίγωνον, κἂν τῆς πλευρᾶς μὴ ἐκβεβλημένης. ὅταν δὲ διὰ τῆς τῶν κύκλων περιγραφῆς, τὸ συσταθὲν τρίγωνον ἰσόπλευρον γίνεται, τὴν ὁμοιότητα καὶ ἰσότητα τῶν κύκλων τῆς τοῦ τριγώνου ἰσότητος αἰτιασόμεθα. τό γε μὴν συμπέρασμα διπλοῦν εἰώθασι ποιεῖσθαι τρόπον. καὶ γὰρ ὡς ἐπὶ τοῦ δεδομένου δείξαντες, καὶ ὡς καθόλου συνάγουσιν, ἀναστρέφοντες ἀπὸ τοῦ μερικοῦ συμπεράσματος ἐπὶ τὸ καθόλου. διότι γὰρ οὐ προσδέχονται τῇ ἰδιότητι τῶν ὑποκειμένων, ἀλλὰ πρὸ ὀμμάτων ποιούμενοι τὸ δεδομένον γράφουσι τὴν γωνίαν ἢ τὴν εὐθεῖαν, ταὐτὸν ἡγοῦνται τὸ ἐπὶ ταύτης συναγόμενον, καὶ ἐπὶ τοῦ ὁμοίου συμπεραίνεσθαι παντός. μεταβαίνουσι μὲν οὖν ἐπὶ τὸ καθόλου, ἵνα μὴ μερικὸν ὑπολάβωμεν εἶναι τὸ συμπέρασμα. εὐλόγως δὲ μεταβαίνουσιν, ἐπειδὴ τοῖς ἐκτεθεῖσιν οὐχ ᾗ τοιαῦτά ἐστιν, ἀλλ' ᾗ τοῖς ἄλλοις ὅμοια, χρῶνται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν. οὐ γὰρ ᾗ τοσήδε ἐστὶν ἡ ἐκκειμένη γωνία, ταύτῃ τὴν διχοτομίαν ποιοῦμαι, ἀλλ' ᾗ μόνον εὐθύγραμμον. ἔστι δὲ τὸ μὲν ποσὸν τῆς ἐκκειμένης ἴδιον, τὸ δὲ εὐθύγραμμον, πασῶν τῶν εὐθυγράμμων κοινόν. ἔστω γὰρ ἡ δεδομένη ἡ ὀρθή. εἰ μὲν οὖν τῇ ἀποδείξει τὴν ὀρθότητα παρελαμβάνομεν, οὐκ ἠδυνάμην ἐπὶ πᾶν τὸ εἶδος τῶν εὐθυγράμμων μεταβαίνειν. εἰ δὲ τὸ μὲν ὀρθὸν αὐτῆς οὐ προσποιοῦμαι, τὸ δὲ εὐθύγραμμον σκοπῶ μόνον, ὁμοίως ὁ λόγος ἐφαρμόσει, καὶ παρὰ ταῖς εὐθυγράμμοις γωνίαις. ταῦτα δὲ πάντα τὰ προειρημένα σκεψώμεθα ἐπὶ τοῦ πρώτου τούτου προβλήματος. ὅτι μὲν γὰρ πρόβλημά ἐστι, δῆλον· ἐπιτάττει γὰρ ἡμῖν τριγώνου μηχανήσασθαι γένεσιν ἰσοπλεύρου. σύγκειται δὲ ἡ ἐν τούτῳ πρότασις, ἔκ τε τοῦ δεδομένου, καὶ τοῦ ζητουμένου. δέδοται μὲν γὰρ εὐθεῖα πεπερασμένη, ζητεῖται δὲ πῶς ἂν ἐπ' αὐτῆς συσταίη τὸ ἰσόπλευρον. καὶ ἡγεῖται τὸ δεδομένον, ἕπεται δὲ τὸ ζητούμενον, ἵνα καὶ συνημμένον πλέξῃς, εἰ ἔστιν εὐθεῖα πεπερασμένη, δυνατὸν ἐπ' αὐτῆς συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον. οὔτε γὰρ μὴ εὐθείας οὔσης, συσταίη ἂν τρίγωνον· ὑπὸ γὰρ εὐθειῶν περιέχεται γραμμῶν. οὔτε μὴ πεπερασμένης· οὐ γὰρ δύναται γωνία γενέσθαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, τῆς δὲ ἀπείρου πέρας οὐκ ἔστι σημεῖον. μετὰ δὲ τὴν πρότασιν, ἑξῆς ἡ ἔκθεσις, ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἥδε. καὶ ὁρᾷς ὅτι τὸ δεδομένον αὐτὸ λέγει μόνον ἡ ἔκθεσις, οὐ προσποιουμένη τὸ ζητούμενον. καὶ ἐπὶ ταύτῃ ὁ διορισμός, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ἐκτεθείσης πεπερασμένης εὐθείας, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. τρόπον τινὰ προσοχῆς ἐστὶν αἴτιος ὁ διορισμός. προσεχεστέρους γὰρ ἡμᾶς ποιεῖ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν, ἀναφωνῶν τὸ ζητούμενον, ὥσπερ ἡ ἔκθεσις εὐ-

μαθεστέρους

Δεδομένον.

Ἔκθεσις.

Ἀπόδειξις.

μαθητευόμενος ἀπεργάζεται πρὸ ὀμμάτων ποιουμένη τὸ δεδομένον. μετὰ δὲ τὸν διορισμὸν ἡ κατασκευή. κέντρῳ μὲν τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς ἑτέρας, διαστήματι δὲ τῷ λοιπῷ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν μὲν τῷ κέντρῳ τῷ προτέρῳ, διαστήματι δὲ τῷ κέντρῳ γεγράφθω κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς τῶν κύκλων τομῆς ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι. καὶ ὁρᾷς ὅτι πρὸς τὴν κατασκευὴν χρῶμαι τοῖς αἰτήμασι, τῷ τε ἀπὸ παντὸς σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, καὶ τῷ κέντρῳ καὶ τῷ διαστήματι κύκλον γράψαι. καθόλου γὰρ τὰ μὲν αἰτήματα, συντελεῖ ταῖς κατασκευαῖς, τὰ δὲ ἀξιώματα, ταῖς ἀποδείξεσιν. ἐφεξῆς οὖν ἡ ἀπόδειξις. ἐπειδὴ θατέρου σημείου τῶν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας κέντρον ἐστὶ τοῦ περιέχοντος αὐτὸ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομήν, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἐπεὶ τὸ λοιπὸν σημεῖον τῶν ἐπὶ τῆς δοθείσης τοῦ περιέχοντος αὐτὸ κύκλου κέντρον ἐστίν, ἴση ἐστὶν ἡ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τούτων ὑπόμνησις ἀπὸ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου, ὃς ἔλεγεν ἴσας εἶναι τὰς ἐκ κέντρου πάσας, ἑκατέρα ἄρα τῇ αὐτῇ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα διὰ τὸ ἀξίωμα, αἱ τρεῖς ἄρα ἴσαι. συνέστη ἄρα ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον. τοῦτο μὲν, τὸ πρῶτον συμπέρασμα τῇ ἐκθέσει ἑπόμενον, ἐπὶ δὲ τούτῳ τὸ καθόλου. ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέστη. κἂν γὰρ τὴν διπλασίαν τῆς νῦν ἐκτεθείσης ποιήσῃς δεδομένην, αἱ αὐταὶ κατασκευαὶ καὶ ἀποδείξεις ἁρμόζουσι, κἂν τριπλασίαν κἂν ἄλλην ὁποσηνοῦν μείζονα ταύτης ἢ ἐλάσσονα λάβῃς. τούτοις δὲ προσέθηκε τὸ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, δεικνὺς ὅτι τὸ συμπέρασμα προβληματικόν. καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν θεωρημάτων προστίθησι, τό, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὰ μὲν γὰρ ποίησιν ἐπαγγέλλεταί τινος, τὰ δέ, δεῖξιν καὶ εὕρεσιν ὄντος. ὅλως μὲν οὖν ἐπάγει ταῦτα τοῖς συμπεράσμασιν ἐνδεικνύμενος, ὅτι τὰ τῆς προτάσεως γέγονεν, καὶ τέλος ἀρχῇ συνάπτων, καὶ μιμούμενος τὸν ἀνελιχθέντα νοῦν, καὶ πάλιν εἰς τὴν ἀρχὴν ἐπιστρέφοντα, οὐ ταὐτὸν δέ, ἀλλ' ὅτε μὲν τό, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, ὅτε δὲ τό, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, διὰ τὴν τῶν προβλημάτων πρὸς τὰ θεωρήματα διαφοράν. ἡμεῖς μὲν οὖν ἀφ' ἑνὸς τοῦ πρώτου προβλήματος ἐγυμνάσαμεν πάντα ταῦτα, καὶ σαφῆ πεποιήκαμεν. δεῖ δὲ τοὺς ἀκούοντας, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ταῦτα ζητεῖν. τίνα μὲν παραλαμβάνεται, τίνα δὲ παραλείπεται, τῶν κεφαλαίων, καὶ ποσαχῶς τὸ δεδομένον δέδοται, καὶ ἀπὸ ποίων ἀρχῶν ἢ τὰς κατασκευὰς ἢ τὰς ἀποδείξεις λαμβάνομεν. ἡ γὰρ τούτων συνοπτικὴ θεωρία, γυμνασίαν οὐκ ὀλίγην ἐμποιεῖ, καὶ μελέτην τῶν ἐν γεωμετρίᾳ λόγων. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ταῦτα διώρισται, φέρε περὶ τῶν συνηρτημένων τούτοις, βραχέα διέλθωμεν, τί λῆμμα τί πτῶσις, τί πόρισμα, τί ἔνστασις, τί ἀπαγωγή.

Λῆμμα.

τὸ μὲν οὖν λῆμμα πολλάκις καὶ ἐπὶ πάσης προτάσεως εἰς κατασκευὴν ἄλλων λαμβανομένης κατηγορεῖσθαι, ἐκ προσώπου λημμάτων αὐτοῖς τὴν ἀπόδοσιν γεγονέναι φάσκοντες. ἰδίως δὲ ἐν τοῖς γεωμετρουμένοις λῆμμα πρότασίς ἐστι δεομένη πίστεως. ὅταν γὰρ ἢ περὶ τὴν κατασκευήν, ἢ περὶ τὴν ἀπόδειξιν λαμβάνωμέν τι τῶν μὴ δεδειγμένων, ἀλλὰ λόγου δεομένων, τότε τὸ ληφθὲν ὡς ἀμφίβολον καθ' αὑτὸ ζητήσεως ἀξιώσαντες, λῆμμα αὐτὸ προσαγορεύομεν, τοῦ αἰτήματος καὶ ἀξιώματος διαφέρον τῷ ἀποδεικτικὸν ὑπάρχειν, ἐκείνων ἄνευ ἀποδείξεως εἰς πίστιν ἄλλων αὐτόθι παραλαμβανομένων. περὶ δὲ τὴν εὕρεσιν τῶν λημμάτων, τὸ μὲν ἄριστον, τῆς διανοίας ἐστὶ πρὸς τοῦτο ἐπιτηδειότης. πολλοὺς γάρ ἐστιν ἰδεῖν ὀξεῖς περὶ τὰς λύσεις, καὶ οὐ μεθόδοις τοῦτο ποιοῦντας. ὥσπερ καὶ ὁ καθ' ἡμᾶς Κράτιστος. ἱκανὸς μὲν ἦν θηρᾶσαι τὸ ζητούμενον ἐκ πρώτων καὶ ἐλαχίστων ὡς δυνατόν. ἐχρήσατο δὲ τῇ φύσει πρὸς τὴν εὕρεσιν. μέθοδοι δὲ ὅμως παραδίδονται, καλλίστη μέν, ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως ἐπ' ἀρχὴν ὁμολογουμένην ἀνάγουσα τὸ ζητούμενον, ἣν καὶ ὁ Πλάτων ὥς φασι Λεωδάμαντι παραδέδωκεν. ἀφ' ἧς καὶ ἐκεῖνος πολλῶν ἐπὶ γεωμετρίαν εὑρετὴς ἱστόρηται γενέσθαι. δευτέρα δέ, ἡ διαιρετική. κατ' ἄρθρα μὲν διαιροῦσα τὸ προκείμενον γένος, ἀφορμὴν δὲ τῇ ἀποδείξει παρεχομένη, διὰ τῆς τῶν ἄλλων ἀναιρέσεως τῆς τοῦ προκειμένου κατασκευῆς, ἣν καὶ αὐτὴν ὁ Πλάτων ἐξύμνησεν, ὡς πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις ἐπίκουρον γινομένην. τρίτη δὲ ἡ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, οὐκ αὐτὸ ζητοῦσα τὸ δεικνύμενον αὐτόθι, ἀλλὰ τὸ ἀντικείμενον ἐλέγχουσα, καὶ κατὰ συμβεβηκὸς τὸ ἀληθὲς εὑρίσκουσα. τὸ μὲν οὖν λῆμμα τοιαύτην ἔχει θεωρίαν.

Πτῶσις.

ἡ δὲ πτῶσις, διαφόρους τῆς κατασκευῆς τρόπους ἐπαγγέλλεται καὶ θέσεως παραλλαγήν, τῶν σημείων μετατιθεμένων ἢ τῶν γραμμῶν, ἢ τῶν ἐπιπέδων ἢ τῶν στερεῶν. καὶ ὅλως πᾶσα ἡ αὐτῆς ποικιλία περὶ τὴν καταγραφὴν ὁρᾶται. διὸ καὶ πτῶσις ἀποκαλεῖται μετάθεσις οὖσα τῆς κατασκευῆς. τὸ δὲ πόρισμα, λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδῃ γεγραμμένα πορίσματα. λέγεται δὲ ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμέ-

νων

νων ἄλλο τι συναναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν, ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. ἡ δὲ ἔνστασις κωλύει τὴν ὅλην ἀτραπὸν τοῦ λόγου, ἤτοι πρὸς τὴν κατασκευήν, ἢ πρὸς τὴν ἀπόδειξιν ἀπαντῶσα. καὶ οὐχ ὥσπερ τὴν πτῶσιν προσιέμενον ἀναγκαῖον ἀποδεικνύναι τὴν πρότασιν ἐπαληθεύουσαν, οὕτω τὴν ἔνστασιν, ἀλλὰ ἀντιλέγειν δεῖ τὴν ἔνστασιν καὶ δεῖξαι τὸν χρόνον αὐτῆς ψευδόμενον. ἡ δὲ ἀπαγωγή, μετάβασίς ἐστιν ἀπ' ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο, οὗ γνωσθέντος, ἢ πορισθέντος, καὶ τὸ προκείμενόν ἐστι καταφανές. οἷον, ὥσπερ καὶ τὸν διπλασιασμὸν τοῦ κύβου ζητηθέντος, μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι Ἱπποκράτην τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον τετραγώνισεν, καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυὴς περὶ τὰ διαγράμματα εἴπερ τις ἄλλος γενόμενος. τοιαῦτα καὶ περὶ τούτων. ἐπὶ δὲ τὸ προκείμενον ἐπανέλθωμεν πρόβλημα. τὸ μὲν οὖν ἰσόπλευρον τρίγωνον ὅτι κάλλιστον ἐν τοῖς τριγώνοις, καὶ τῷ κύκλῳ συγγενέστατον διὰ τὸ πάσας ἴσας ἔχοντι τὰς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ μίαν καὶ ἁπλῆν τὴν ἔξωθεν αὐτὸ περιέχουσαν γραμμήν, παντὶ καταφανές. ἔοικεν δὲ ἡ τῶν δύο κύκλων περίληψις καὶ τούτων ἐκ μέρους ἑκατέρου, οὐ γὰρ εἰς ὅλον ἑκάτερον ἐγγέγραπται, ἀλλ' εἰς τὸ ἐκ τῶν ἑκατέρου δηλοῦν, ὡς ἐν εἰκόσιν, ὅπως καὶ τὰ προελθόντα ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τὸ τέλειον καὶ τὸ ταυτὸν καὶ τὸ ἴσον, ἀπ' ἐκείνων κατακέχηται. κατὰ γὰρ τοῦτον τὸν τρόπον, καὶ τὰ ἐπ' εὐθείας κινούμενα κύκλῳ περιάγεται, διὰ τῆς ἀειγενεσίας, καὶ αἱ ψυχαὶ μεταβατικὰς ἔχουσαι κινήσεις, διὰ τῶν ἀποκαταστάσεων, καὶ τῶν περιόδων ἀπεικονίζουσι τὴν ἀμετάβατον ἐνέργειαν τοῦ νοῦ. λέγεται δὲ καὶ ὑπὸ δύο νοῶν ἡ ζωογόνος πηγὴ περιέχεσθαι τῶν ψυχῶν. εἰ τοίνυν ὁ μὲν κύκλος εἰκών ἐστι τῆς νοερᾶς οὐσίας, τὸ δὲ τρίγωνον τῆς πρωτίστης ψυχῆς, διά τε τὴν ἰσότητα καὶ τὴν ὁμοιότητα τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν, εἰκότως ἂν καὶ διὰ τοῦτο τῶν κύκλων ἐν αὐτοῖς μέσον ἀπολαμβανόμενον, ἰσόπλευρον ἀποδεικνύοιτο. εἰ δὲ καὶ πᾶσα ψυχὴ πρόεισιν ἀπὸ νοῦ, καὶ ἐπιστρέφει πρὸς νοῦν, καὶ μετέχει τοῦ νοῦ διαδικῶς, εὖ ἂν ἔχοι καὶ ταύτῃ τὸ τρίγωνον τῆς τριφυοῦς τῶν ψυχῶν ὑποστάσεως σύμβολον ὄν, ὑπὸ δυεῖν κύκλοιν περιληφθὲν λαμβάνειν τὴν γένεσιν. ἀλλὰ ταῦτα μὲν ὡς ἐξ ἐκείνων ἡμᾶς ἀναμιμνησκέτω τῶν πραγμάτων φύσεως. ἐπειδὴ δέ τινες πρὸς τὴν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σύστασιν ἀνέστησαν, οἰόμενοι τὴν ὅλην γεωμετρίαν διελέγχειν, βραχέα καὶ πρὸς τούτους ἀπαντήσωμεν. λέγει δὴ Ζήνων ἐκεῖνος, οὗ καὶ πρότερον ἐμνήσθημεν, ὅτι κἂν τὰς ἀρχάς τις ἐπιτρέψῃ τῶν γεωμετρῶν, οὐκ ἂν συσταίη τὰ ἐφεξῆς, μὴ συγχωρηθέντος αὐτοῖς, ὅτι δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ τμήματα οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ τοῦτο μὴ δοθείη, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καταγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς, ἐπεζεύχθωσαν, αἱ γεα γεβ, κοινὸν ἔχουσαι τὸ γε τμῆμα· συμβαίνει τοίνυν τὰς μὲν ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἴσας εἶναι τῇ αβ τῇ δοθείσῃ, οὐκέτι δὲ τὰς τοῦ τριγώνου ἴσας, ἀλλ' ἐλάσσονας τὰς δύο τῆς αβ. τούτου δὲ μὴ συστάντος, οὐδ' ἂν τὰ ἐφεξῆς ἔτι σύστασιν λάβοι. μήποτε οὖν φησὶν ὁ Ζήνων καὶ τῶν ἀρχῶν δοθεισῶν οὐχὶ ἕπεται τὰ ἐφεξῆς, εἰ μὴ καὶ τοῦτο προληφθείη, τὸ μήτε περιφερειῶν, μήτε εὐθειῶν εἶναι τμήματα κοινά. πρὸς δὴ ταῦτα ῥητέον πρῶτον μὲν ὅτι τοῦτο τρόπον τινὰ προείληπται ἐν ταῖς ἀρχαῖς τῶν δύο εὐθειῶν μὴ εἶναι τμῆμα κοινόν. καὶ γὰρ ὁ τῆς εὐθείας ὁρισμὸς τοῦτο ἔχει, εἴπερ εὐθεῖά ἐστιν, ἡ ἐξ ἴσου κειμένη τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. τὸ γὰρ ἴσον εἶναι τὸ διάστημα τῶν σημείων τῇ εὐθείᾳ, μίαν ποιεῖ τὴν συνάπτουσαν αὐτὰ καὶ ἐλαχίστην. ὥστε εἴ τις αὐτὴν κατὰ μέρος ἐφαρμόσει, καὶ κατὰ λοιπὸν μέρος ἐφαρμόσειεν. ἐπ' ἄκρον γὰρ τεταμένη διὰ τὸ ἐλαχίστην εἶναι ὅλη ἐπὶ ὅλην ποιεῖν ἀναγκασθήσεται. καὶ δὴ καὶ ὅτι ἐν τοῖς αἰτήμασι τοῦτο προδήλως εἴληπται. τὸ γοῦν καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν, δεικνύει σαφῶς ὅτι μίαν εἶναι δεῖ τὴν ἐκβαλλομένην καὶ κατὰ τὴν μίαν κίνησιν ἐκβάλλεσθαι. εἰ δὲ δεῖ καὶ ὥσπερ λήμματος τούτου λαβεῖν ἀπόδειξιν, ἔστω εἰ δυνατὸν εἰ αβ τμῆμα κοινὸν τῆς αγ, καὶ τῆς αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βδ, γεγράφθω κύκλος, ὁ αγδ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά ἐστι διὰ τοῦ κέντρου, ἡ αβγ, ἡμικύκλιον τὸ αεγ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ αβδ, ἡμικύκλιον τὸ αεδ. ἴσα ἄρα ἀλλήλοις τὰ αεγ, αεδ, ὅπερ ἀδύνατον. πρὸς δὲ ταύτην τὴν ἀπόδειξιν ὁ Ζήνων ἐνίσταται, ὅτι καὶ τὸ τὴν διάμετρον δίχα τέμνειν τὸν κύκλον ἀποδέδεικται προλαβόντων ἡμῶν, ὅτι οὐκ ἔστι δύο περιφερειῶν ἓν τμῆμα κοινόν,

Πόρισμα.

Ἔνστασις.

Ἀπαγωγή.

οὕτω

οὕτω γὰρ ἐλαμβάνομεν ἑτέραν ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐφαρμόσειν τῶν περιφερειῶν, ἢ μὴ ἐφαρμόσασαν ἔξω πεσεῖν, ἢ ἐντός. κωλύει δέ φησιν οὐδὲν, μὴ ὅλην ἐφαρμόζειν πρὸς ὅλην, ἀλλὰ κατά τι μέρος. ἕως δ' ἂν μὴ ἀποδεικνύηται τὸ τὴν διάμετρον δίχα τέμνειν τὸν κύκλον, οὐδὲ τὸ προκείμενον δειχθήσεται. πρὸς ταῦτα καὶ ὁ Ποσειδώνιος ὀρθῶς ἀπήντησε ἐπισκώψας τὸν ἐρημαῖον Ἐπίκουρον, ὡς συμπεσόντα καὶ ἐπὶ μέρος μὴ ἐφαρμόσωσιν αἱ περιφέρειαι προχωροῦσαν τὴν ἀπόδειξιν. καθ' ὃ γὰρ ἐφαρμόζουσι μέρος, ἡ μὲν ἐντός, ἡ δὲ ἐκτὸς ἔσται, καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα, τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου προβληθείσης ἐπὶ τὴν ἐκτὸς περιφέρειαν. ἔσονται γὰρ ἴσαι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσαι, ἥτε μείζων ἡ ἐπὶ τὴν ἐκτός, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ ἐπὶ τὴν ἐντός. εἰ οὖν ὅλη πρὸς ὅλην ἐφαρμόσει, καὶ ἴσαι εἰσίν, ἢ ἡ κατὰ μέρος ἐφαρμόζουσαι, παραλλάττει καθ' ἕτερον, ἢ οὐδὲν μέρος αὐτῆς οὐδενὶ ἐφαρμόζει. καὶ εἰ τοῦτο, ἢ ἐκτὸς πεσεῖται, ἢ ἐντός. πάντα δὲ ταῦτα ὡσαύτως διελέγχεται. ταῦτα μὲν ὑπὲρ τούτων. ὁ δὲ Ζήνων ἑτέραν ἀπόδειξιν ἀναγράφει τοιαύτην, ἣν καὶ διαβάλλειν ἐπιχειρεῖ. ἔστω γὰρ δύο εὐθειῶν τῶν αγ, αδ, τμῆμα κοινὸν ἡ αε. καὶ ἤχθω τῇ αγ πρὸς ὀρθὰς ἡ βε. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εβγ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἡ ὑπὸ εβδ ὀρθή, ἴσαι ἔσονται, ὅπερ ἀδύνατον. εἰ δὲ μὴ, ἤχθω τῇ αδ πρὸς ὀρθὰς ἡ ζβ. ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζβα. ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εβα ὀρθή. ἴσαι ἄρα εἰσὶ καὶ ἀλλήλαις, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν οὖν ἀπόδειξις αὕτη, ὡς προλαμβανούσης τι τῶν ὕστερον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγεῖν. ὁ δὲ Ποσειδώνιος, οὐδαμοῦ μὲν ἐν ταῖς στοιχειώσεσιν ἀπόδειξιν τοιαύτην φέρεσθαί φησιν, ἀλλὰ τὸν Ζήνωνα συκοφαντεῖν τοὺς ἐφ' ἑαυτοῦ γεωμέτρας, ὡς μοχθηρᾷ ἀποδείξει χρωμένους. ἔστι δέ τινα καὶ ὑπὲρ ταύτης λόγον εἰπεῖν. ἐπεὶ γάρ ἐστι τις πάντως ἑκατέρᾳ τῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθάς, πᾶσαι γὰρ δύο εὐθεῖαι δύνανται ποιεῖν ὀρθήν. καὶ τοῦτο προσειλήφαμεν δειξάμενοι τὴν ὀρθήν. παρὰ γὰρ τὴν τοιάνδε κλίσιν μόνην ὑφιστάμεθα τὴν ὀρθήν. ἔστω δὲ ἤδη τυχὸν ἣν ἀντεστήσαμεν, πρὸς τὸ καὶ αὐτὸν τὸν Ἐπίκουρον συγχωρεῖν, καὶ τοὺς ἄλλους φιλοσόφους, πολλὰ μὲν δυνατά, πολλὰ δὲ καὶ τῆς ἀδυνάτου ὕλης ὑποθέσθαι ἐστὶ τοῦ ἀκολούθου ἕνεκα θεωρίας. τοσαῦτα περὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. δεῖ δὲ καὶ τὰ λοιπὰ συστήσασθαι καὶ πρότερον τὸ ἰσοσκελές. ἔστω οὖν ἡ αβ ἐφ' ἧς δεῖ συστήσασθαι τὸ ἰσοσκελές. καὶ γεγράφθωσαν κύκλοι ὡς ἐπὶ τοῦ ἰσοπλεύρου. καὶ ἐκβεβλήσθω ἑκατέρως ἡ αβ, ἐπὶ τὰ γ δ σημεῖα. ἴση ἄρα ἡ γβ ἐστὶ αδ. κέντρῳ οὖν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ γβ, γεγράφθω κύκλος ὁ γε. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ δα, ὁ δε κύκλος. καὶ ἀπὸ τοῦ ε καθὸ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν αἱ εα εβ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν εα, τῇ αδ, ἡ δὲ εβ, τῇ βγ, ἴση δὲ ἡ αδ τῇ βγ, ἴση καὶ ἡ εα τῇ εβ, ἀλλὰ καὶ μείζους ἐστὶ αβ, ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ αβε τρίγωνον, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. ἀλλὰ δὴ προστετάχθω σκαληνὸν συστήσασθαι τρίγωνον ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἐστὶ αβ. καὶ γεγράφθωσαν οἱ κύκλοι κέντροις καὶ διαστήμασιν, ὡς ἐπὶ τῶν προτέρων, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ κέντρον ἔχοντος τὸ α σημεῖον τὸ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. ἐπεὶ οὖν κέντρον τὸ α, ἴση δὲ ἡ αδ τῇ αγ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῆς αγ, κέντρον δὲ τὸ β. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εβ, τῇ αβ, μείζων ἄρα ἡ δβ, ἐστὶ βα, ἡ δὲ βα, τῆς αδ μείζων, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ δβ βα αδ ἄνισοι εἰσίν. σκαληνὸν ἄρα τὸ τρίγωνόν ἐστιν. ὥστε συνεστάθη τὰ τρία τρίγωνα. ταῦτα μὲν πολυθρύλλητα. τὸ δὲ ἐν τούτοις γλαφυρόν, ὅτι τὸ μὲν ἰσόπλευρον πανταχόθεν ἴσον ὂν μοναχῶς συνίσταται, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς ἐν δύο μόναις πλευραῖς. ἡ γὰρ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων ὡς ἡμεῖς ἐποιήσαμεν, ἢ μείζων ἀμφοτέρων. τὸ δὲ σκαληνόν, πάντη ἄνισον ὄν, τριχῶς συνίσταται. ἡ γὰρ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἢ μεγίστη ἐστίν, ἢ ἐλαχίστη τῶν τριῶν, ἢ τινὸς μὲν μείζων, τινὸς δὲ ἐλάσσων. καὶ ἔξεστιν ἑκάστην αὐτῶν, ἢ προτείνοντα, ἢ συστέλλοντα τὰς ὑποθέσεις γυμνάζεσθαι. ἡμῖν δὲ ἀρκείτω τὰ ἐκκείμενα. καθόλου δὲ θεωρήσωμεν, ὅτι τῶν προβλημάτων, τὰ μὲν, μοναχῶς γίγνεται, τὰ δέ, πλεοναχῶς, τὰ δέ, ἀπειραχῶς. λέγεται δὲ ὥς φησιν Ἀμφίνομος, τὰ μὲν μοναχῶς συνιστάμενα, τὰ δὲ πλεοναχῶς, καὶ κατὰ ἀριθμὸν συνιστάμενα μέσα, τὰ δὲ ἀπειραχῶς ποικιλλόμενα ἄτακτα. πῶς μὲν οὖν μοναχῶς ἢ πλεοναχῶς συσταίη ἂν προβλήματα, δῆλον ἐπὶ τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὸ μὲν γὰρ ἰσόπλευρον μοναχῶς, τῶν δὲ λοιπῶν τὸ μέν, διχῶς συνίσταται, τὸ δέ, τριχῶς. ἀπειραχῶς δὲ τὰ τοιαῦτα προβλήματα γένοιτ' ἄν, τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν εἰς τὰ τρία ἀνάλογα. εἰ μὲν γὰρ εἰς διπλάσιον λόγον τμηθείη, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ ἐστίν, εἰς τρία ἴσα τετμημένη. εἰ δὲ

Problematum diuersitas.

τὸ μεῖζον

τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ ἐλάσσονος εἴη, μεῖζον ἢ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον καὶ παραβληθείη τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἴσον, παρὰ τὴν μείζονα, ἐλλεῖπον εἴδει, τετραγώνῳ, δῆλον ὡς εἰς ἄνισα ἔσται ἀνάλογον τετμημένη. ἐπεὶ οὖν ἀπειραχῶς ἂν εἰς δύο τμηθείς, ὧν τὸ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἐπ' ἄπειρον γὰρ ὁ πολλαπλάσιος πρόεισι λόγος, ἀπειραχῶς καὶ εἰς τρία ἀνάλογα τμηθήσεται. δεῖ δὲ εἰδέναι, καὶ ὅτι τὸ πρόβλημα λέγεται πλεοναχῶς. καὶ γὰρ πᾶν τὸ προτεινόμενον, πρόβλημα καλεῖται, εἴτε μαθήσεως ἕνεκα προτείνοιτο, εἴτε τῆς ποιήσεως. ἰδίως δὲ ἐν τοῖς μαθήμασι καλεῖται πρόβλημα τὸ προτεινόμενον εἰς ποίησιν τὴν θεωρητικήν. καὶ γὰρ τὸ ποιούμενον ἐν τούτοις τέλος ἔχει τὴν θεωρίαν. καὶ πολλάκις μὲν καὶ τῶν ἀδυνάτων τινὰ προβλήματα καλοῦσιν, ἰδιαίτερον δὲ τὸ δυνατὸν καὶ μὴ πλεονάζον, μὴ δὲ ἐλλεῖπον, ἔχει τὴν ἐπωνυμίαν ταύτην. ἔστι δὲ πλεονάζον μὲν, τὸ τοιόνδε τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι, ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ διμοίρου ὀρθῆς. τοῦτο γὰρ περιττεύει, καὶ παρέλκει προσκείμενον. παντὶ γὰρ ὑπάρχει τῷ ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ. τῶν δὲ πλεοναζόντων, ὅσα μὲν ἀσυμβάτοις πλεονάζει συμπτώμασι καὶ ἀνυπάρκτοις, ἀδύνατα ταῦτα προσαγορεύουσιν. ὅσα δὲ συμβαίνειν δυναμένοις, μείζονα προβλήματα ταῦτα καλοῦσιν. ἐλλεῖπον δέ ἐστι πρόβλημα, τὸ προσθήκης ἄλλης δεόμενον, ἵνα ἐκ τῆς ἀοριστίας, εἰς τάξιν τε καὶ ὅρον ἐπιστημονικὸν ἀχθείη, εἰ λέγοι τις ἰσοσκελὲς συστήσασθαι τρίγωνον, ἐλλιπές γε τοῦτο καὶ ἀοριστῶδες. καὶ δεῖ τὸν προσθέντος, ὁποῖον ἰσοσκελὲς, τὸ ἔχον μείζονα τὴν βάσιν, ἢ τὸ ἐλάσσονα ἐχόντων ἴσας ἑκατέρας, καὶ πότερον τὸ ἔχον τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ διπλῆν, ἢ κατ' ἄλλον τινὰ τρόπον, τὰς γωνίας ταύτας ἔχον, τριπλάσιον, ἢ τετραπλάσιον. δυνατὸν γὰρ ἀπειραχῶς ποικίλλειν. φανερὸν οὖν ἐκ τούτων, ὅτι τὰ κυρίως λεγόμενα προβλήματα, βούλεται τὴν ἀοριστίαν διαφεύγειν, καὶ μὴ εἶναι τῶν ἀπειραχῶς γιγνομένων. λέγεται δὲ ὅμως κἀκεῖνα προβλήματα, διὰ τὴν ὁμωνυμίαν τοῦ προβλήματος. τὸ δὴ πρώτιστον πρόβλημα τῶν στοιχείων, καὶ ταύτῃ πλεονεκτεῖ, τῷ μήτε πλεονάζον εἶναι, μήτε ἐλλιπὲς, μήτε ἀόριστον, καὶ πολλαχῶς ἢ ἀπειραχῶς συνιστάμενον. ἔδει γὰρ τοιοῦτον εἶναι τὸ τῶν ἄλλων στοιχεῖον ἐσόμενον.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.) β

Τῶν προβλημάτων, τὰ μὲν ἄπτωτά ἐστι, τὰ δὲ, πολύπτωτα, ὥσπερ καὶ τῶν θεωρημάτων. ὅσα μὲν οὖν τὴν αὐτὴν δύναμιν ἔχει διὰ πλειόνων πεφοιτηκυῖαν διαγραμμάτων, καὶ τὰς θέσεις ἐξαλλάττοντα, τὸν αὐτὸν φυλάττει τῆς ἀποδείξεως λόγον, ταῦτα λέγεται πτῶσιν ἔχειν. ὅσα δὲ ἐπὶ μίαν θέσιν καὶ κατασκευὴν μίαν προκόπτει, ταῦτα ἄπτωτά ἐστιν. ἁπλῶς γὰρ ἡ πτῶσις περὶ τὴν κατασκευὴν ὁρᾶται, καὶ τῶν θεωρημάτων καὶ τῶν προβλημάτων. ἔστιν οὖν τὸ δεύτερον πρόβλημα πολύπτωτον. δέδοται δὲ ἐν αὐτῷ, τὸ μὲν σημεῖον, τῇ θέσει. ταύτῃ γὰρ καὶ δίδοται μόνον. ἡ δ' εὐθεῖα τῷ τε εἴδει. οὐ γὰρ ἁπλῶς ἐστι γραμμὴ, ἀλλὰ τοιάδε, καὶ τῇ θέσει. ζητεῖται γὰρ ταύτῃ τῇ εὐθείᾳ ἴσην θέσθαι πρὸς τῷ σημείῳ, ὅπου ποτ' ἂν ἢ τοῦτο κείμενον. πρόδηλον δὲ ὅτι πάντως ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἐπιπέδῳ τὸ σημεῖόν ἐστιν, ἐν ᾧ καὶ ἡ εὐθεῖα, καὶ οὐκ ἐν μετεωροτέρῳ. πᾶσι γὰρ τοῖς τῶν ἐπιπέδων προβλήμασι καὶ θεωρήμασιν ἐν ἐπιπέδῳ ὑποκεῖσθαι χρὴ νομίζειν. εἰ δέ τις ἀποροίη, πῶς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ θέσθαι ἴσην παρακελεύεται, τί γὰρ εἰ ἄπειρος δέδοται; τὸ γὰρ δοθὲν τοῦτο, καὶ ἐπὶ τὴν πεπερασμένην φέρει, καὶ ἐπὶ τὴν ἄπειρον, σημαίνει γὰρ τὸ ἐκκείμενον, πᾶν καὶ ὑποβεβλημένον ἡμῖν εἰς τὴν ζήτησιν. δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὸς, ὅτε μὲν λέγων ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, συστήσασθαι τρίγωνον ἰσόπλευρον, ὅτε δὲ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἄπειρον κάθετον ἀγαγεῖν. εἴτις οὖν ταῦτα ἀποροίη, λεκτέον ὅτι τὴν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ θέσθαι παρακελευσάμενος, πῶς οὐχὶ δῆλόν ἐστι πεποίηκεν αὐτόθεν ὅτι ἡ δοθεῖσα πεπεράσθαι. πάντως γὰρ ἡ πρὸς τῷ σημείῳ τεθησομένη πεπεράσθαι, κατ' αὐτὸ τὸ σημεῖον. ὥστε πολλῷ πρότερον ἐκείνη πεπεράσθαι, ἧ ἐστιν ἴση τῇ τιθεμένη. ἅμα τε οὖν εἶπεν πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, καὶ ἀμφοτέρας παρανεῖ τὰς εὐθείας, καὶ τὴν δοθεῖσαν, καὶ ἣν ἐκείνῃ τίθησιν ἴσην. ὅτι δὲ αἱ πτώσεις τούτου τοῦ προβλήματος γίγνονται παρὰ τὴν τοῦ σημείου διάφορον θέσιν, δῆλον. ἢ γὰρ ἔξω κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας, ἢ ἐπ' αὐτῆς. καὶ εἰ ἐπ' αὐτῆς, ἢ τῶν περάτων αὐτῆς ἔσται θάτερον, ἢ ἐν τῷ μεταξὺ κείσεται τῶν ἄκρων. καὶ εἰ ἔξω αὐτῆς, ἢ ἐκ πλαγίου, ὥστε τὴν ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸ πέρας τῆς εὐθείας ἐπιζευγνυμένην γωνίαν ποιεῖν, ἢ ἐπ' εὐθείας

τῇ δεδομένῃ, ὥστε ἐκβαλλομένην αὐτὴν ἐπὶ τὸ σημεῖον ἔξω κείμενον, καὶ ἐκ πλαγίου συμπίπτειν. γυμνασίας δὲ ἕνεκα πάσας ληπτέον τὰς θέσεις, ὡς ἡμεῖς ἐκθησόμεθα, τὴν δυσκολωτέραν. ἔστω γὰρ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, καὶ τὸ σημεῖον τὸ δοθὲν τὸ γ κείμενον ἐπ᾽ αὐτῆς, ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περάτων, καὶ γεγονέτω τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς γα, τὸ δγα, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ δγ δα. καὶ κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ, κύκλος ὁ βε. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, κύκλος ὁ εζ. ἐπεὶ οὖν κέντρον τὸ α, ἴση ἡ βα, τῇ αε. καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἡ δε, τῇ δζ. ὧν ἡ δγ τῇ δα ἴση. τρίγωνον γὰρ ἰσόπλευρον, τὸ δαγ. λοιπὴ ἄρα ἡ αε τῇ γζ ἴση ἐστίν, ἦν δὲ ἡ αε τῇ αβ ἴση ὡς δέδεικται, καὶ ἡ γζ ἄρα ἴση τῇ αβ. πρὸς τῷ δοθέντι ἄρα σημείῳ τῷ γ, ἴση ἡ γζ ἔθετο τῇ αβ. ὡς μὲν οὖν πρὸς τὴν τοῦ σημείου θέσιν τοσαῦται γίγνονται πτώσεις, ὡς δὲ πρὸς τὴν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου σύστασιν, καὶ τὰς τῶν πλευρῶν ἐκβολὰς καὶ τὰς τῶν κύκλων γραφὰς ἔτι πολλῷ πλείους. εἰλήφθω γὰρ ὡς ἐν τῷ στοιχείῳ τοῦτο σημεῖον, τὸ α, καὶ ἡ βγ εὐθεῖα, ἐπεζεύχθω ἡ βα, τρίγωνον οὖν ἐπ᾽ αὐτὴν ἰσόπλευρον μὴ συνεστάτω ἄνω ἔχον τὴν κορυφήν, διὰ τὸ μὴ εἶναι τόπον, ἀλλὰ κάτω, καὶ ἔστω τὸ αδβ. οὐκ οὖν ἤτοι ἴση ἡ αδ τῇ βγ, ἢ μείζων, ἢ ἐλάσσων. εἰ μὲν οὖν ἴση, γέγονε τὸ προσταχθέν, εἰ δὲ ἐλάσσων κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω, ὧν τὰ η ζ, καὶ κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ λε. ἐπεὶ οὖν ἴση, ἡ δλ τῇ δε, ἐκ κέντρου γάρ, ἀλλὰ καὶ ἡ βη τῇ βγ ἴση, ἐκ κέντρου γάρ. ἡ ἄρα αε, ἴση τῇ βγ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. εἰ δὲ μείζων ἡ αδ τῆς βγ, ὅπερ γὰρ ὑπόλοιπον, κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω, τέμνει ἄρα τὴν δβ ὁ εζ κύκλος. πάλιν κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, κύκλος γεγράφθω. τέμνει ἄρα τὴν δα ὁ ηε. ἐπεὶ οὖν τὸ δ κέντρον, τοῦ ηε, ἴση ἡ δκ τῇ δε, ἦν δὲ καὶ ἡ δα τῇ δβ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ακ ἴση τῇ βε. ἀλλὰ ἡ βε. ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἐκ κέντρου γάρ εἰσιν ἀμφότεραι. ἡ ἄρα ακ, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, καὶ κεῖται πρὸς τῷ α, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. πολλῶν δὲ καὶ ἑτέρων πτώσεων οὐσῶν, ἀρκεῖ καὶ ταῦτα πρὸς τὸ παρὸν ἀναγράψασθαι. καὶ γὰρ ἀπὸ τούτων δυνατὸν καὶ περὶ τὰς ἄλλας γυμνάζεσθαι τοῖς ζητητικωτέροις. ἤδη δέ τινες ἀφελόντες τὴν τοῦ στοιχείου τούτου κατασκευήν, καὶ ποικιλίαν εἰρήκασιν οὕτως. ἔστω τὸ α τὸ δοθὲν σημεῖον, ἡ δὲ βγ, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α διαστήματι δὲ τοσούτῳ, ὅση ἐστὶν ἡ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ δε. καὶ προσεκβεβλήσθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἡ αδ, αὕτη ἄρα ἴση τῇ βγ, τοσαύτη γὰρ ἦν, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ὅση βγ. καὶ γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. εἴ τις οὖν ταῦτα λέγοι, τὸ ἐν ἀρχῇ αἰτεῖται. ὅταν γὰρ λέγῃ κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ βγ πρὸς τῷ α κειμένην πέρατι, καὶ φυλάττων τὸ αἴτημα τοῦ διαστήματος, ἐκεῖ μὲν ἐποίει κέντρον, ἐκεῖ δὲ ἔγραφε τὸν κύκλον, ἐνταῦθα δέ, ἄλλο μὲν τὸ κέντρον, ἀλλαχοῦ δὲ τὸ διάστημα τοῦ κύκλου. παντὶ ἄρα τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως, οὐ προσθησόμεθα.

γ´ Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάττονι ἴσην ἀφελεῖν.)

Τρίτον πρόβλημα τοῦτο δεδομένας μὲν ἔχον δύο εὐθείας περὶ τὸ μέγεθος ἀνίσους, προστάττον δὲ ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς μείζονος ἴσην τῇ ἐλάσσονι. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πολύπτωτον. αἱ γὰρ δοθεῖσαι ἄνισοι εὐθεῖαι, ἢ διεστᾶσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων, ὡς παρὰ τῷ στοιχειωτῇ, ἢ καθ᾽ ἓν πέρας ἑαυτῆς τέμνει τὴν ἑτέραν καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ ἡ μείζων τὴν ἐλάσσω, ἢ ἡ ἐλάσσων τὴν μείζονα. ἀλλ᾽ εἰ μὴ καθ᾽ ἓν συνάπτοιντο πέρας, δήλη ἡ ἀπόδειξις. τῷ γὰρ κοινῷ πέρατι κέντρῳ χρησάμενος διαστήματι δὲ τῇ ἐλάσσονι τῶν εὐθειῶν, γράψεις κύκλον, καὶ τὴν μείζονα τεμεῖς, καὶ ἀφαιρήσεις ἴσην τῇ ἐλάσσονι. ὅσον γὰρ τῆς μείζονος ὁ κύκλος ἐντὸς ἀποτέμνεται, τοσοῦτον ἴσον ἐστὶ τῇ ἐλάσσονι. εἰ δὲ ἡ ἑτέρα τέμνει τὴν ἑτέραν κατὰ ἑαυτῆς πέρας, ἤτοι μείζων τὴν ἐλάσσονα τέμνει, ἢ ἀνάπαλιν. καὶ εἰ ἀλλήλας τέμνοιεν, ἢ εἰς ἴσα τέμνονται ὑπ᾽ ἀλλήλων. ἢ εἰς ἄνισα. ἢ ἡ μὲν εἰς ἴσα, ἡ δέ, εἰς ἄνισα, καὶ τοῦτο διχῶς. ταῦτα γὰρ πάντα ποικιλίαν ἡμῖν θαυμαστὴν παρέχεται γυμνασίας, παρακείσθω δὲ καὶ ἡμῖν ὀλίγα ἐκ πολλῶν. ἔστωσαν ἄνισοι εὐθεῖαι, ἡ αβ καὶ ἡ γδ. μείζων δὲ ἡ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ, κατὰ ἑαυτῆς πέρατι τῷ γ, καὶ κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ γεγράφθω κύκλος, ὁ βζ. καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον, ἐπὶ τῆς αγ, τὸ αεγ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εα εγ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, κύκλος ὁ ηκ. καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ γ διαστήματι δὲ τῷ γη, κύκλος ὁ κλ. ἐπεὶ οὖν ἡ εζ ἴση τῇ εη, κέντρον γὰρ τὸ ε, ὧν ἡ εα ἴση τῇ εγ, λοιπὴ ἡ αζ ἴση τῇ γη, ἀλλὰ καὶ ἡ αζ ἴση τῇ αβ, κέντρον γὰρ τὸ α, καὶ

αὕτη

αὐτῇ τῇ γδ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐλάσσων ἡ αγ, ἢ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ κατὰ τὸ γ τῷ ἑαυτῆς πέρατι. ἤτοι οὖν κατὰ τὸ μέσον τέμνει αὐτὴν, ἢ οὐ κατὰ τὸ μέσον. πρότερον τεμνέτω κατὰ τὸ μέσον. οὐκοῦν ἡ γδ, ἢ ἡμίσειά ἐστι τῆς αβ, καὶ ἴση ἡ αγ τῇ γδ, ἢ ἐλάσσων τῆς ἡμισείας. καὶ κέντρῳ τῷ γ διαστήματι δὲ τῷ γδ, διαγράψας κύκλον ἀφαιρήσεις ἀπὸ τῆς αβ, ἴσην τῇ γδ. ἢ μείζων τῆς ἡμισείας, καὶ πρὸς τῷ α σημείῳ θέμενος ἴσην τῇ γδ τὴν αζ, καὶ γράψας κύκλον κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αζ, ἀφαιρήσεις ἀπὸ τῆς αβ, ἴσην τῇ αζ, τουτέστι τῇ γδ. εἰ δὲ μὴ κατὰ τὸ μέσον τέμνει τὴν αβ ἡ γδ, ἔσται ἡ γδ, ἢ ἡμίσεια αὐτῆς, ἢ μείζων, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. εἰ τοίνυν ἡ γδ ἢ ἡμίσειά ἐστι τῆς αβ ἢ ἐλάσσων, κέντρῳ χρησάμενος τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ ἀφαιρήσεις ἀπὸ τῆς αβ τῇ γδ ἴσην, καὶ γέγονε τὸ προσταχθέν. ἢ καὶ ταύτης μείζων. καὶ πάλιν πρὸς τῷ α θέμενος ἴσην τῇ γδ τὴν αζ, τὰ αὐτὰ ποιήσεις. κέντρῳ γὰρ τῷ α, διαστήματι τῷ ζα γράψας κύκλον ἀφαιρήσεις ἀπὸ τῆς αβ ἴσην τῇ αζ, τουτέστι τῇ γδ. εἰ δὲ τέμνοιεν ἀλλήλας, ὡς αἱ γδ αβ, κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα κύκλος γεγράφθω ὁ αζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βγ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι εἰσὶν ἄνισοι, αἱ βζ γδ, καὶ ἡ γδ κατὰ τὸ πέρας ἐστὶ τῆς τέμνει τὴν βζ, δυνατόν ἐστιν ποιῆσαι τῇ βζ ἀπὸ τῆς γδ. δέδεικται γὰρ ἀμφότερα. δυνατὸν ἄρα καὶ τῇ αβ ἴσην ἀφελεῖν ἀπὸ τῆς γδ. ἡ γὰρ αβ, καὶ ἡ βζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἡμεῖς μὲν οὖν ἐκ διαιρέσεως λαβόντες τὰς πτώσεις, ἐπιδεῖξαι τὴν ποικιλίαν αὐτῶν ἐπεχειρήσαμεν. θαυμαστὴ δὲ ἡ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις, πάσαις ἐκείνη ταῖς εἰρημέναις κατασκευαῖς ἐφαρμόττουσα. καὶ δυνατὸν ἐπὶ πάσης θέσεως πρὸς τῷ πέρατι τῆς μείζονος ἴσην ἀφαιρεῖν τῇ ἐλάσσονι, εἰ τέμνοιεν ἀλλήλας, εἴτε ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν, εἴτε ὁπωσοῦν ἄλλως ἔχοιεν θέσεως. *

Hic desunt uersus circiter 14.

δ

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔχοι ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχοι δὲ γωνίαν γωνίᾳ ἴσην τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.)

Τοῦτον πρῶτον θεώρημα ἐν τῇ στοιχειώσει παρειλήφαμεν, τὰ δὲ πρὸ τούτου, πάντα προβλήματα ἦν. τὸ μὲν πρῶτον τὴν τοῦ τριγώνου γένεσιν πραγματευόμενον. τὸ δὲ δεύτερον καὶ τρίτον ἴσην εὐθεῖαν ἄλλην ἄλλῃ ποιεῖσθαι προτιθέμενα. καὶ τούτων, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ ἀνίσου τὴν ἴσην ὑφίστας, τὸ δὲ, ἀπὸ τοῦ ἀνίσου κατὰ ἀφαίρεσιν τὸ ἴσον εὑρίσκει. τῆς οὖν ἰσότητος, ἣ τὸ πρώτιστον ἐστὶν ἐν τῷ ποσῷ σύμπτωμα προδιαπορευομένης, κατά τε τὸ τρίγωνον, καὶ εὐθείας, εἰκότως τὸ πρῶτον, ὅπερ ἐξεθέμεθα θεώρημα, παραδίδωσιν ἀπ' ἐκείνοις. καὶ πῶς γὰρ ἔμελλε μὴ προϋποστήσας τὰ τρίγωνα, μηδὲ ποιησάμενος τὴν γένεσιν αὐτῶν περὶ τῶν καθ' αὑτὸ συμβεβηκότων αὐτοῖς διδάσκειν, καὶ γωνιῶν τῆς ἐν αὐτοῖς ἰσότητος καὶ πλευρῶν. πῶς δὲ ἂν ἔλαβε πλευρὰς ἴσας πλευραῖς, καὶ εὐθείας ἄλλας εὐθείαις, μὴ πρότερον διαπραγματευόμενος τὴν τῶν ἴσων εὐθειῶν εὕρεσιν. λεγέτω γὰρ εἰ τύχοι πρὸ τῆς ἐκείνων ποιήσεως, ὅτι ἐὰν δύο τρίγωνα τὸ δεῖνα τὸ σύμπτωμα ἔχῃ, ἕξει καὶ τόδε πάντως. ἆρ' οὖν οὐ ῥᾴδιον παντὶ πρὸς αὐτὸν ἀπαντᾶν, οὐκ ἴσμεν γὰρ ὅλως εἰ συνίσταται τρίγωνον. ἐπαγέτω δὲ καὶ ὅτι κἂν τὰ δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔχῃ δύο πλευραῖς, οὐκ αὐτῆς καὶ πρὸς τοῦτο διηπορήσαμεν μή ποτε οὐδὲ δυνατὸν εὐθείας ἀλλήλαις ἴσας εἶναι, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν εἰδῶν, ἐν οἷς, οὐ πάντως ἀνισότητος οὔσης, καὶ ἰσότης ἐστί. μαθησόμεθα γοῦν, ὅτι ἡ κερατοειδὴς ἀεὶ ἄνισος τῇ ὀξείᾳ, καὶ οὐδέποτε ἴση. καὶ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου ὡσαύτως, καὶ ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐπὶ τὸ ἔλασσον, οὐ πάντως διὰ τοῦ ἴσου γίγνεται. ταῦτα τοίνυν ὁ στοιχειωτής, προαναιρῶν, καὶ τῶν τριγώνων τὴν σύστασιν παραδέδωκεν. κοινὸν γάρ ἐστι τῶν τριῶν εἰδῶν, καὶ τὰς τῶν ἴσων εὐθειῶν γενέσεις. καὶ ταύτας διττάς, τὴν μὲν γὰρ μὴ οὔσας ὅλως ὑφίστησι, τὴν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀνίσου κατὰ ἀφαίρεσιν ποιεῖται. καὶ τούτοις εἰκότως ἐπιφέρει τὸ θεώρημα, δι' οὗ δείκνυται πῶς τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένην, ἀναφαίνεται καὶ τὴν βάσιν ἴσην ἔχοντα τῇ βάσει, καὶ τὸ ἐμβαδὸν, τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας, ταῖς λοιπαῖς ἴσας. τρία γάρ ἐστι τὰ δεικνύμενα, δύο τὰ διδόμενα περὶ τὰ τρίγωνα. δέδοται μὲν οὖν δύο πλευρῶν ἰσότης, καὶ δύο πλευραί. καὶ δῆλον ὅτι τῷ λόγῳ δέδοται, καὶ γωνίας αὐτῆς ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένης πρὸς γωνίαν ἰσότης, ζητεῖται δὲ τρία. ἡ τῆς βάσεως πρὸς τὴν βάσιν ἰσότης,

ἡ τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ τρίγωνον, καὶ ἡ τῶν λοιπῶν γωνιῶν, πρὸς τὰς λοιπὰς γωνίας. ἐπειδὴ γὰρ δυνατόν ἐστι, τὰς μὲν δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς, οὐ μὴν καὶ τὸ θεώρημα ἀληθεύειν, τῷ μὴ εἶναι ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσην, ἀλλ' ἅμα ἀμφοτέρας, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τοῖς δεδομένοις ἴσας εἶναι τὰς πλευράς, οὐχ ἁπλῶς, ἀλλ' ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. εἰ γὰρ ἔτυχε τῶν τριγώνων θάτερον ἔχειν, τὴν μὲν τῶν πλευρῶν τριῶν μονάδων, τὴν δέ, τεττάρων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τὴν μὲν πέντε, τὴν δὲ δυοῖν, ὀρθῆς οὔσης τῆς ὑπὸ τούτων περιεχομένης γωνίας, ἦσαν μὲν ἂν αἱ δύο ἅμα πλευραὶ ταῖς δυσὶν ἴσαι. ἑπτὰ γὰρ καὶ αὗται καὶ ἐκεῖναι. οὐκ ἐδείκνυτο δὲ ἴσον τῷ τριγώνῳ τὸ τρίγωνον. ὅπου μὲν γὰρ τὸ ἐμβαδόν ἐστιν ἕξ, ὅπου δὲ πέντε. καὶ τὸ τούτου αἴτιον ὅτι οὐχὶ καὶ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. πολλοὶ γοῦν ἐν διανομαῖς περιχωρίων τοῦτο μὴ παραφυλάξαντες τῶν τὸ μεῖζον λαβόντων χωρίον δικαίου ἀπηνέγκαντο δόξαν, ὡς τὸ ἴσον εἰληφότες, διὰ τὸ συναμφοτέρας τὰς περιεχούσας ἴσας εἶναι συναμφοτέραις. δεῖ τοίνυν καὶ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ λαμβάνειν ἴσην. καὶ ὅπως ἂν ὁ στοιχειωτὴς τοῦτο προσθεὶς ἀποσημαίνεται, ὡς οὐ μάτην προστίθησιν. ἔπειτα καὶ περὶ τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος τῶν δεδομένων ἴσων διαλεγόμενος, προσέθηκεν τὸ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων περιεχομένων, ἵνα μὴ ἀδιορίστως ῥηθέντος τῆς πρὸς τῇ βάσει τινὰς λάβωμεν γωνιῶν. καὶ μὴν καὶ τὴν βάσιν ἐπὶ τῶν τριγώνων μηδεμιᾶς μὲν τῆς προωνομασμένης τὴν πρὸς τῇ ὄψει κειμένην πλευράν, τῶν δὲ δυοῖν ἤδη προειλημμένων ἐξ ἀνάγκης τὴν λοιπὴν εἶναι βάσιν ὑποθετέον. διὸ καὶ ἐνταῦθα ὁ στοιχειωτὴς τὰς δύο περιλαβὼν ἴσας ταῖς δύο πλευραῖς, τὰς ὑπολοίπους βάσεις τῶν τριγώνων ἐκάλεσεν. τρίγωνον δὲ αὖ τριγώνῳ ἴσον λέγεται τηνικαῦτα, ἡνίκα ἂν τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν ἴσον ᾖ. δυνατὸν γὰρ τῶν περιμέτρων ἴσων ὑπαρχουσῶν διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν γωνιῶν, τὰ ἐμβαδὰ ἄνισα εἶναι. καλῶ δὲ ἐμβαδόν, αὐτὸ τὸ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἀπολαμβανόμενον. ὥσπερ δὴ καὶ περίμετρον τὴν συγκειμένην γραμμὴν ἐκ τριγωνικῶν πλευρῶν. ἄλλο οὖν ἑκάτερον. καὶ δεῖ μετὰ τῆς τῶν περιμέτρων ἰσότητος καὶ κατὰ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς γωνίας ἴσας εἶναι, εἰ μέλλοι καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τῷ ἐμβαδῷ ἴσον. συμβαίνει δ' ἐπί τινων καὶ τῶν ἐμβαδῶν ἴσων ὄντων ἀνίσους εἶναι καὶ τὰς περιμέτρους. καὶ τῶν περιμέτρων ἴσων οὐσῶν, ἄνισα τὰ ἐμβαδά. δυοῖν γοῦν ὄντων τριγώνων ἰσοσκελῶν, ὧν ἑκάτερον ἔχει τὰς ἴσας πλευρὰς, ἀνὰ πέντε μονάδων, τῶν δὲ βάσεων, τὴν μὲν ὀκτώ, τὴν δὲ ἕξ, τούτων ὁ μὲν ἄπειρος γεωμετρίας εἴποι ἂν μεῖζον εἶναι τὸ ἔχον ὀκτὼ τὴν βάσιν. πάντα γὰρ ἔσται ἡ περίμετρος ὀκτωκαίδεκα. ὁ δὲ γεωμετρικὸς εἴποι ἄν, ὡς ἑκατέρου τὸ ἐμβαδόν ἐστι δώδεκα, καὶ τοῦτο ἀποδείξει κάθετον ἀγαγών, ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων ἀπὸ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιήσας ταύτην ἐπὶ θατέρῳ μέρει τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. ἔστι δὲ ὥσπερ ἔφην καὶ τῶν περιμέτρων ἰσαζομένων ἄνισα εἶναι τὰ χωρία. καὶ ἤδη τινὲς κοινωνοὺς ἑαυτῶν ἐν διανομαῖς χωρίων παρεκρούσαντο, διὰ τῆς κατὰ περίμετρον ἰσότητος μεῖζον λαβόντες χωρίον. βάσις δ' αὖ ἴση λέγεται εἶναι βάσει, καὶ ὅλως εὐθεῖα ἴση ἐστὶν ἄλλῃ εὐθείᾳ, ἐπειδὰν αὖ αὐτῶν τὰ πέρατα συναπτόμενα ὅλην ὅλῃ ποιήσῃ ἐφαρμόσαι. πᾶσα γὰρ εὐθεῖα ἐπὶ πάσης ἐφαρμόττει, τῶν δὲ ἴσων καὶ κατὰ τὰ πέρατα γίνεται ἡ ἐφαρμογή. γωνία δὲ ἴση γωνίᾳ λέγεται ἡ εὐθύγραμμος τῇ εὐθυγράμμῳ, ὅτε μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ἑτέραν πλευρῶν περιτεθειμένης ἐπὶ μίαν τῶν τῆς ἑτέρας, καὶ ἡ λοιπὴ τῇ λοιπῇ ἐφαρμόζει. ὅταν δὲ ἡ λοιπὴ ἔξω πίπτῃ τῆς λοιπῆς, μείζων ἐστὶν ἡ γωνία, ἧς ἡ πλευρὰ ἔξω πέπτωκεν, ὅτε δ' ἐντὸς ἐλάττων. ὅπου μὲν γὰρ περιλαμβάνει τὴν ἑτέραν, ὅπου δὲ περιλαμβάνεται ὑπ' αὐτῆς. τὴν δὲ ἰσότητα τῶν γωνιῶν, ληψόμεθα κατὰ τὴν ἐφάρμοσιν τῶν πλευρῶν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁμοειδῶν, οἷον τῶν μηνοειδῶν, τῶν ξυστροειδῶν, τῶν ἀμφικύρτων. ἐπεὶ δυνατὸν καὶ ἴσας εἶναι καὶ μὴ ἐφαρμόττειν ἀλλήλαις τὰς πλευράς. ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὀρθὴ μηνοειδεῖ τινὶ γωνίᾳ, καὶ ἀδύνατον ἐφαρμόσαι, ταῖς εὐθείαις τὰς περιφερείας. ἔτι τοίνυν ἐκεῖνο προληπτέον, ὅτι ὑποτείνειν λέγονται γωνίας αἱ πλευραί, αἱ κατ' ἀντικρὺ κείμεναι. πᾶσα γὰρ τριγωνικὴ γωνία, περιέχεται μὲν ὑπὸ δύο τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ὑποτείνεται δὲ ὑπὸ τῆς λοιπῆς. διὸ καὶ ὁ γεωμέτρης, περὶ καὶ τὰς γωνίας ἴσας εἶναι προσέθηκεν τὸ ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἵνα μὴ νομίσωμεν διάφορον εἶναι, ἂν δήποτε γωνίαν λαβεῖν καὶ ταύτην ἴσην εἰπεῖν τῇ τυχούσῃ τῶν λοιπῶν δύο τοῦ τριγώνου γωνιῶν, ἀλλ' ἴσας λέγωμεν ἃς ὑποτείνουσιν αἱ ἴσαι πλευραί. καὶ μὴν τῶν ἴσων πλευρῶν, ἡ μὲν ὑποτείνει τὴν ἑτέραν, ἡ δέ, μία τῶν περιεχουσῶν τὴν λοιπήν. πρὸς μὲν οὖν τὴν σαφήνειαν τοῦ θεωρήματος τοσαῦτα θεωρήσθω. πρὸς δὲ τὴν ὑπόνοιαν, ἐκεῖνο προλάβωμεν, ὅτι δύο

εὐθείας,



εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι, τοῦτο γὰρ ὡς ὁμολογούμενον ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν. εἰ γὰρ τὰ πέρατά φησιν ἐφαρμόσει τῶν βάσεων ἀλλήλοις, ἐφαρμόζουσι καὶ αἱ βάσεις, εἰ δὲ μή, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσι. πόθεν οὖν ὅτι τοῦτο ἀδύνατον; ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι περιέχουσαι τὸ χωρίον, αἱ αεγ αδβ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' ἄπειρον. καὶ κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ αβ, κύκλος ὁ αεζ γεγράφθω. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἡ αγβζ ἡμίσεια τῆς περιφερείας ἐστὶν ἡ αεζ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρος ἡ αδβε, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐστὶν ἡ αεε. ἄρα ἴσαι εἰσίν, ἡ αβε, αβζ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν. ὃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς εἰδώς, ἐν τῷ πρώτῳ τῶν αἰτημάτων ἔλεγεν ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. ὡς ἂν μιᾶς ἀεὶ δυναμένης εὐθείας ἐπιζευχθῆναι, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐπὶ τὰ ἐναντία. οὕτω γὰρ καὶ τὰ πέρατα τῆς διαμέτρου ζεύγνυται. διὰ δύο μὲν περιφερειῶν, μιᾶς δὲ εὐθείας, δυνατὸν δὲ καὶ ἐκτὸς τῶν ἡμικυκλίων καὶ ἐντός, ἀπείρους γράψαι περιφερείας ἐπιζευγνυούσας τὰ δοθέντα σημεῖα. τὸ δὲ αἴτιον ὅτι ἡ εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. ἐν δὲ πανταχοῦ τὸ ἐλάχιστον, καὶ ἀεὶ μέτρον γίγνεται τῆς ἀπειρίας τῶν ἄλλων, ὥσπερ ἡ ὀρθὴ μία οὖσα μέτρον γίγνεται τῆς ἀπειρίας τῶν ἄλλων γωνιῶν. διὰ γὰρ ταύτης κἀκείνας εὑρίσκομεν, οὕτω καὶ ἡ εὐθεῖα συντελεῖ πρὸς τὴν καταμέτρησιν τῶν εὐθειῶν. τοσαῦτα καὶ περὶ τούτων. ὅτι δὲ ἡ σύμπασα τούτου τοῦ θεωρήματος ἀπόδειξις ἀπὸ κοινῶν ἐννοιῶν ἤρτηται, καὶ ὡς αὐτοφυής ἐστι καὶ ἀπ' αὐτῆς ὁρμωμένη τῆς τῶν ὑποθέσεων ἐναργείας, παντὶ καταφανές. διότι μὲν γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ δύο πλευραὶ ταῖς δυσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ἐφαρμόζουσιν ἀλλήλαις. διότι δὲ αἱ ἀπὸ τῶν ἴσων περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι καὶ αὐταὶ ἐφαρμόζουσι. τῆς δὲ γωνίας ἐπὶ τὴν γωνίαν ἁρμοζούσης, καὶ τῶν πλευρῶν ἐπὶ τὰς πλευράς, ἐφαρμόσει καὶ τὰ πέρατα κάτω τῶν πλευρῶν. εἰ δὲ ταῦτα, καὶ ἡ βάσις ἐφαρμόσει τῇ βάσει. εἰ δὲ αἱ τρεῖς ταῖς τρισί, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ πάντα πᾶσιν ἴσα. ἄρα ἡ ἰσότης ἐν ὁμοιομερέσιν ὀφθεῖσα τῆς ὅλης ἀποδείξεως αἰτία ἀνεφάνη. δύο γάρ ἐστιν ἐνταῦθα ἀξιώματα συνεκτικὰ τῆς συμπάσης μεθόδου τοῦ προκειμένου θεωρήματος. ἓν μέν, ὅτι τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα ἀλλήλοις, τοῦτο ἁπλῶς ἀληθές, καὶ οὐδενὸς προσδιορισμοῦ δεόμενον, ᾧ χρῆται ὁ στοιχειωτής, ἐπί τε τῆς βάσεως, καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν, ταῦτα γάρ φησι, διότι ἐφαρμόζει ἀλλήλοις. τοῦτο δὲ οὐκ ἐπὶ πάντων ἀληθές, ἀλλ' ἐπὶ τῶν ὁμοιομερῶν. ὁμοιομερῆ δὲ ταῦτα λέγω, οἷον, εὐθεῖαν εὐθείᾳ, περιφέρειαν περιφερείᾳ, τοῦ αὐτοῦ κύκλου, καὶ γωνίας ὑπὸ ὁμοίων ὁμοίως κειμένων περιεχομένας. τούτων δὲ ὅτι τὰ δεδομένα ἴσα ἐφαρμόζει ἀλλήλοις, ὥστε ἐὰν συνελόντι φράσαι τὴν πᾶσαν ἀπόδειξιν τοιαύτην. δέδοται ἴσα τάδε τοῖσδε. πλευραὶ δύο δυσί. καὶ γωνίαι αἱ ἐπ' αὐτῶν περιεχόμεναι. καὶ ἐφαρμόττει ἀλλήλοις ταῦτα. καὶ ἡ βάσις τῇ βάσει, καὶ πᾶσα πᾶσιν. εἰ δὲ ἐφαρμόττει ταῦτα, καὶ ἴσα ἐστίν. εἰ ἄρα δέδοται ἴσα τάδε τοῖσδε, συναποδείκνυται καὶ ὅτι πάντα πᾶσιν ἴσα. καὶ οὗτος πρῶτος ἀναφαίνεται τρόπος τῆς γνώσεως τῶν ἴσων πάντη τριγώνων. ἀλλὰ περὶ μὲν τῆς ἄλλης ἀποδείξεως τοσαῦτα. Κάρπος δὲ ὁ μηχανικός, ἐν τῇ ἀστρολογικῇ πραγματείᾳ τὸν περὶ τῶν προβλημάτων καὶ θεωρημάτων λόγον ἀνακινήσας, εἰ μὲν κατὰ καιρὸν ἢ μή, παρείσθω πρὸς τὸ παρόν, ἐμβαλὼν δὲ ὅμως εἰς τὴν τούτων διάκρισιν, τῇ τάξει πρότερον τὸ προβληματικὸν γένος εἶναί φησι τῶν θεωρημάτων. τὰ γὰρ ὑποκείμενα περὶ ὧν τὰ συμπτώματα ζητεῖται διὰ τῶν προβλημάτων ἀνευρίσκεσθαι, καὶ τοῦ μὲν προβλήματος τὴν πρότασιν ἁπλῆν εἶναι, καὶ πάσης ἐντέχνου συνέσεως ἀπροσδεᾶ. τὸ δὲ γάρ τι φανερῶς ποιῆσαι παρακελεύεται συστήσασθαι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἢ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῇ ἐλάσσονι ἀπὸ τῆς μείζονος ἴσην ἀφελεῖν, τί γὰρ τούτων ἀσαφὲς καὶ περιειργασμένον. τοῦ δὲ θεωρήματος ἐργῶδες καὶ πολλῆς δεομένην ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς κρίσεως. ἵνα μήτε πλεονάζουσα φαίνηται, μήτε ἐλλείπουσα τῆς ἀληθείας, οἷον δὴ καὶ τοῦτο πρώτιστον ὂν τῶν θεωρημάτων. καὶ ἐπὶ μὲν τῶν προβλημάτων, μία τις ἐστὶν ὁδὸς ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως εὑρημένη κοινή. καθ' ἣν προϊόντες δυνάμεθα κατορθοῦν. οὕτω γὰρ τὰ σαφέστερα θηρᾶται τῶν προβλημάτων ἐπὶ δὲ τῶν θεωρημάτων. δυσληπτος ἡ μεταχείρισις, ὡς μέχρι ἡμῶν φησι μηδένα δυνήσασθαι κοινὴν παραδοῦναι μέθοδον τῆς τούτων εὑρέσεως, ὥστε καὶ διὰ τὴν ῥαστώνην ἁπλούστερον ἂν εἴη τὸ προβληματικὸν γένος, τούτων δὲ διωρισμένων, διὰ ταῦτα ἄρα φησὶ καὶ ἐν τῇ στοιχειώσει, τὰ προβλήματα προηγεῖται τῶν θεωρημάτων, καὶ ἀπὸ τούτων ἡ στοιχείωσις ἄρχεται καὶ τὸ πρῶτον θεώρημα, τέταρτόν ἐστι κατὰ τὴν τάξιν. οὐ διότι τὸ πέμπτον ἐξ αὐτῶν δείκνυται, ἀλλ' ὅτι καὶ εἰ μηδὲν τῶν πρὸ αὐτοῦ δεῖται πρὸς τὴν ἀπόδειξιν, ἔδει πρότερον ἐκεῖνα, διότι προβλήματα ἦν, τοῦτο δὲ θεώρημα. παντελῶς γὰρ ἐπὶ τούτοις ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις

χρῆται. καὶ τρόπον τινὰ τὸ αὐτὸ τρίγωνον ἐν διαφόροις λαμβάνει τόποις κείμενον. καὶ γὰρ ἡ ἐφαρμογή, καὶ ἡ διὰ ταύτης ἰσότης δεικνυμένη, παντάπασιν ἔχεται τῆς αἰσθητῆς καὶ ἐναργοῦς ὑπολήψεως. ἀλλ᾽ ὅμως καὶ τοιαύτης οὔσης τῆς τοῦ πρώτου θεωρήματος ἀποδείξεως, εἰκότως προηγήσατο τὰ προβλήματα, διότι καθόλου τὴν προηγουμένην ἐκεῖνα τάξιν ἔλαχεν. καὶ ἴσως τῇ μὲν τάξει τὰ προβλήματα πρὸ τῶν θεωρημάτων ἐστί, καὶ μάλιστα τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὰ αἰσθητὰ στρεφομένων τεχνῶν ἀνιοῦσιν ἐπὶ θεωρίαν, τῇ δὲ ἀξίᾳ τὰ θεωρήματα προϋπάρχει τῶν προβλημάτων. καὶ ἔοικεν ἡ ὅλη γεωμετρία καθὸ μὲν συνάπτει ταῖς πολλαῖς τέχναις ἐνεργεῖν προβληματικῶς, καθὸ δὲ τῇ πρώτῃ ἐπιστήμῃ γειτνιᾷ θεωρητικῶς ἀνάγεσθαι ἀπὸ τῶν προβλημάτων ἐπὶ τὰ θεωρήματα, ἀπὸ δευτέρων, ἐπὶ πρῶτα, καὶ τεχνικωτέρων ἐπιστημονικώτερα. μάταιον οὖν τὸν Γεμῖνον αἰτιᾶσθαι ὡς τὸ θεώρημα τελειότερον εἶναι τοῦ προβλήματος λέγοντα. καὶ γὰρ αὐτὸς ὁ Κάρπος τοῖς προβλήμασι προηγεῖσθαι κατὰ τὴν τάξιν ἀποδέδωκεν. ὁ δὲ Γεμῖνος κατὰ τὴν τελειοτέραν ἀξίαν. καὶ μὴν καὶ περὶ τοῦ τετάρτου θεωρήματος εἴπομεν, ὅπως τρόπον τινὰ δεῖται τῶν πρὸ αὐτοῦ προβλημάτων, ἐν οἷς καὶ τῶν τριγώνων τὰς γενέσεις καὶ τὴν ἰσότητος τὴν εὕρεσιν ἐμάθομεν. προκείσθω δὲ νῦν καὶ ὅτι, ὡς μὲν ἐν θεωρήμασιν ἁπλούστατόν ἐστι καὶ ἀρχοειδέστατον. ἀπ᾽ αὐτῶν γὰρ ὡς εἰπεῖν μόνων, αὐτοφυῶς δείκνυται τῶν πρώτων ἐννοιῶν. σύμπτωμα δέ τι περὶ τὰ τρίγωνα φαινόμενον, τὰ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας, καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀποδείκνυται, εἰκότως μετὰ τὰ προβλήματα τέτακται. δι᾽ ὧν τὰ ὑποκείμενα τῷ συμπτώματι τούτῳ καὶ ὅλως τὰ δεδομένα κατασκευάζεται.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι εἰσίν. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι εἰσί.)

Τῶν θεωρημάτων τὰ μέν ἐστιν ἁπλᾶ, τὰ δέ, σύνθετα. λέγω δὲ ἁπλᾶ μέν, ὅσα καὶ κατὰ τὰς ὑποθέσεις, καὶ κατὰ τὰ συμπεράσματα ἀδιαίρετά ἐστιν, ἓν ἔχοντα τὸ δεδομένον, καὶ τὸ ζητούμενον ἕν. οἷον, εἰ οὕτως ἔλεγεν ὁ στοιχειωτής, πᾶν τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ἴσας ἔχει τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας. σύνθετα δὲ τὰ ἐκ πλειόνων, ἢ τὰς ὑποθέσεις ἔχοντα συγκειμένας, ἢ τὰ συμπεράσματα τῆς ὑποθέσεως οὔσης ἁπλῆς, ἢ καὶ ἀμφότερα. καὶ τούτων τὰ μέν ἐστι συμπεπλεγμένα, τὰ δέ, ἀσύμπλεκτα. ἔστι δὲ ἀσύμπλεκτα ὅσα σύνθετα ὄντα μὴ δύναται θεωρεῖσθαι εἰς ἁπλᾶ θεωρήματα. ὥσπερ τὸ τέταρτον, ἐν ἐκείνῳ γὰρ καὶ τὸ δεδομένον σύγκειται καὶ τὸ ἑπόμενον, ἀλλ᾽ οὐ δύναται θεωρηθῆναι τὸ δεδομένον εἰς ἁπλᾶ, καὶ ποιήσασθαι θεωρήματα. οὐ γὰρ ἐὰν ἴσας ἔχει τὰς πλευρὰς τὰ τρίγωνα, ἢ μόνην τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν συμβαίνει τὰ λοιπά, συμπεπλεγμένα δὲ ὅσα διαιρεῖται εἰς ἁπλᾶ, οἷον ἐκεῖνο τὸ θεώρημα, τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ταῖς βάσεσι. δύναται γὰρ καὶ διελόντα εἰπεῖν, τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ταῖς βάσεσι, καὶ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ὁμοίως. πάντων δὲ τῶν συνθέτων, τὰ μέν, κατὰ τὸ συμπέρασμα συντίθεται ἀπὸ τῆς αὐτῆς ὑποθέσεως ὁρμηθέντα, τὰ δὲ κατὰ τὰς ὑποθέσεις ἔχει τὴν σύνθεσιν, καὶ τὸ αὐτὸ πάσαις ἐπάγει συμπέρασμα, τὰ δὲ κατὰ τὸ συμπέρασμα καὶ τὰς ὑποθέσεις σύνθετά ἐστι. κατὰ μὲν οὖν τὸ συμπέρασμα ἐνταῦθα σύνθεσίς ἐστιν. ἐπὶ τούτου γὰρ τοῦ θεωρήματος, τρία ἐστὶ τὰ συναγόμενα. ὅτι αἱ βάσεις ἴσαι, ὅτι τὰ τρίγωνα ἴσα, ὅτι αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἴσαι ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι. κατὰ δὲ τὰς ὑποθέσεις, ἐπὶ τοῦ κοινοῦ τῶν τριγώνων καὶ παραλληλογράμμων θεωρήματος, τῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντων. καὶ κατ᾽ ἀμφότερα δέ, ὡς ἐπ᾽ ἐκείνου, αἱ διάμετροι τῶν κύκλων καὶ τῶν ἐλλείψεων τά τε χωρία δίχα διαιροῦσι, καὶ τὰς περιεχούσας τὰ χωρία γραμμάς. τῶν δὲ συμπεπλεγμένων, τὰ μέν ἐστι καθολικά, τὰ δέ, ἐκ τῶν ἐπὶ μέρος συνάγει τὸ καθόλου. ἐὰν γὰρ εἴπωμεν ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου καὶ τὴν ἔλλειψιν, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα διαιρεῖ, ἕκαστον τῶν συμπεπλεγμένων οὐ καθόλου λαμβάνομεν, τὸ δὲ ἐκ πάντων καθόλου ποιοῦμεν. ἐὰν δὲ εἴπωμεν ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ διὰ τοῦ κέντρου διχοτομοῦσιν ἀλλήλας, καὶ τὰς τῶν τμημάτων πάντων γωνίας ἴσας ποιοῦσι, καθόλου λέγομεν. ἐπὶ γοῦν τῆς ἐλλείψεως οὔτε πᾶσαι αἱ τῶν τμημάτων γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ μόνον τῶν ὑπὸ τῶν ἀξόνων γιγνομένων. διὰ δὲ τὰς συνθέσεις ταύτας ἐμηχανήσαντο οἱ γεωμέτραι, διά τε τὴν συντομίαν καὶ διὰ τὰς ἀναλύσεις. πολλὰ γὰρ ἀσύνθετα μὲν ὄντα οὐκ ἀναλύεται. σύνθετα δὲ μόνως εὐοδίας παρέχει πρὸς τὴν ἐπὶ τὰς ἀρχὰς ἀνάλυσιν. τούτων δὴ προτεθεωρηθέντων, τὸ πέμπτον θεώρημα σύνθετον πάντως ῥητέον. καὶ κατ᾽ ἀμφότερα σύνθετον,

θεῖον, κατά τε τὸ δεδομένον, καὶ κατὰ τὸ ζητούμενον, ὃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐνδεικνύμενος νῦν οὐ τὸ ἐμέρισε, καὶ χωρὶς ἑκάτερα τέθειτο τά τε δεδομένα, καὶ ζητούμενα, τῶν ἰσοσκελῶν εἰπὼν αἱ πρὸς τῇ βάσει. καὶ πάλιν ἑξῆς, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι. οὐ γὰρ δύο δεῖ νομίζειν εἶναι θεωρήματα, ἀλλ' ἕν, σύνθετον δὲ ὄν, καὶ κατὰ τὸ δεδομένον καὶ κατὰ τὸ ζητούμενον. καὶ τῶν συγκειμένων ἑκάτερον τέλειον καὶ ἀληθές. διὸ καὶ ἡ ἀνάλυσις ἀληθὴς ἐφ' ἑκατέρου. εἴτε γὰρ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον. εἴτε αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, ἴσαι δὲ εἶεν αἱ προσεκβεβλημέναι, καὶ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές. ἀλλ' ὁ στοιχειωτής, πρὸς μὲν τὸ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας εἶναι, ποιεῖται τὴν ἀντιστροφήν, πρὸς δὲ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσας οὐκ ἔτι, καίτοι καὶ τοῦτο ἀληθές. τούτου μὲν τὴν αἰτίαν ὕστερον λέξομεν, νῦν δὲ ἐκεῖνο πρῶτον ζητήσωμεν, διὰ τὴν αἰτίαν τοῦτο προσαπέδειξεν τὸ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσας εἶναι, οὐδαμῶς γὰρ τούτῳ χρήσεται πρὸς ἄλλου ἢ κατασκευὴν, ἢ ἀπόδειξιν προβλημάτων ἢ θεωρημάτων, ἄχρις οὗ ἐσόμεθα, τί ἐστι προσεμβάλλειν τῷ θεωρήματι τούτῳ. ῥητέον δὴ πρὸς ταύτην τὴν ζήτησιν, ὅτι καὶ εἰ μηδαμοῦ χρῆσθαι μέλλοι τῷ καὶ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἴσας εἶναι, ἀλλὰ πρός γε τὰς τῶν ἐνστάσεων ἀνατροπὰς, καὶ τὰς διαλύσεις τῶν ἀντιπιπτόντων τοῖς θεωρήμασιν ἔσται τοῦτο χρήσιμον. ἐπιστημονικὸν δὲ καὶ τεχνικὸν προοικονομεῖσθαι τὰς λύσεις τῶν μαχομένων τοῖς ῥηθησομένοις μέλλουσι, καὶ τῶν ἀπαντήσεων προκαταβάλλεσθαι τὰς ἀφορμάς. ἵνα μὴ μόνον αἱ τῶν ἀληθῶν ἀποδείξεις διὰ τῶν προαποδεδειγμένων, ἀλλὰ καὶ οἱ τῶν ψευδῶν ἔλεγχοι διὰ ἐκείνων γίγνοιντο. καὶ λάβοις ἂν καὶ ἐκ τούτου πρὸς ῥητορικὴν ὄφελος τῆς ἐν γεωμετρίᾳ τάξεως. ὁ γὰρ καὶ ἐν ἐκείνοις τοῖς λόγοις τοῦτο δυνάμενος ποιῆσαι καὶ προϊδεῖν τὰ μαχόμενα τοῖς ἐφεξῆς κεφαλαίοις, καὶ πρὸ τῆς ἐκείνων μεταχειρήσεως, ὃ δὴ πάρεργον ἄλλοις, προηγουμένως κατασκευάσαι τὰς λύσεις αὐτῶν, οὗτος ἀσφαλεστάτην ἂν μάλιστα μέθοδον προΐσταιτο τῶν ἀγώνων. τοῦτο τοίνυν καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἔργῳ διδάσκων ἡμᾶς πρὸ τῶν θεωρημάτων οἷς τὰ ἀντιπίπτοντα διαλυόμεθα, τῶν νῦν δεικνυμένων χρώμενοι, συναποδείκνυσι τὸ καὶ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἴσας εἶναι. καὶ προεμβιβάζει τὸν τοῦ ψεύδους ἐπ' ἐκείνων ἔλεγχον. ἔσται δὲ προϊοῦσι δῆλον ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ ἑβδόμου θεωρήματος καὶ ἐπὶ τοῦ ἐννάτου τὰς φερομένας ἐνστάσεις ἀπὸ τούτου διαλυόμεθα. ἐκ δὴ τούτων, φανερὸν καὶ δι' ἣν αἰτίαν οὐκ ἀντέστρεψεν, καὶ ἀπὸ τούτου τὸ ἔχον ὡς οὐδὲ τούτου προηγουμένην ἔχοντος χρείαν, ἀλλὰ κατὰ συμβεβηκὸς ἡμῖν πρὸς τὴν ὅλην τῶν στοιχείων συντέλειαν. εἰ δέ τις ἡμᾶς ἀπαιτοίη καὶ μὴ προσεκβάλλοντας τὰς εὐθείας, ἴσας ἀποδεικνύναι τῶν ἰσοσκελῶν, ἴσας τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας. οὐ γὰρ χρήζειν διὰ τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν ἀποδεικνύναι καὶ ταύτας ἴσας, τρόπον τινὰ μετατεθέντος τῆς κατασκευῆς, καὶ τὰς ἔξω ποιήσαντες ἐντὸς τοῦ ἰσοσκελοῦς, δείξομεν τὸ προκείμενον. ἔστω γὰρ ἰσοσκελὲς, τὸ αβγ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον τυχὸν ἐπὶ τῆς αβ, τὸ δ, καὶ ἀπὸ τῆς αγ, ἴση τῇ αδ ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε δγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αβ τῇ αγ, καὶ ἡ αδ, τῇ αε, καὶ γωνία ἡ α κοινή, ἔσται καὶ ἡ βε, ἴση τῇ γδ. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ὥστε ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ δβ ἴση τῇ εγ καὶ ἡ βε τῇ δγ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβε, τῇ ὑπὸ εγδ ἴση. καὶ ἡ δε βάσις κοινή, καὶ πάντα ἴσα πᾶσιν. ὥστε ἡ μὲν ὑπὸ εδβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεγ, ἡ δὲ ὑπὸ δεβ, ἴση τῇ ὑπὸ εδγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ δεβ, ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, ὧν ἀφῄρηνται ἴσαι αἱ ὑπὸ δεβ εδγ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βδε γεβ, ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βδ δε πλευραὶ ἴσαι ταῖς γε εβ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ἡ βγ κοινὴ βάσις, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν, ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ δβγ, τῇ ὑπὸ εγβ. ὑποτείνει γὰρ τὴν μὲν ὑπὸ δβγ, ἡ γδ, τὴν δὲ ὑπὸ εγβ, ἡ εβ. τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, καὶ μὴ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν. ἔτι δὲ συντομώτερον ἀποδείκνυσιν ὁ Πάππος, μηδεμιᾶς προσθήκης δεόμενος οὕτως. ἔστω τὸ αβγ ἰσοσκελὲς, καὶ ἴση ἡ αβ, τῇ αγ. νοήσωμεν οὖν τοῦτο τὸ ἕν, ὡς δύο τρίγωνα, καὶ λέγωμεν οὕτως. ἐπεὶ ἴση ἡ αβ ἴση τῇ αγ, καὶ ἡ αγ τῇ αβ, δύο δὴ αἱ αγ αβ ἴσαι δυσί, ταῖς αγ αβ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση τῇ ὑπὸ γαβ, ἡ αὐτὴ γάρ, ἐστιν ἄρα, καὶ πάντα πᾶσιν ἴσα. ἡ μὲν βγ, τῇ βγ, τὸ δὲ αβγ τρίγωνον, τῷ αβγ. ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ αβγ, τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι. καὶ ἔοικεν τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ἀποδείξεως εὑρεῖν, κατανοήσας ὅτι καὶ ὁ στοιχειωτὴς, ἐπὶ τοῦ τετάρτου θεωρήματος ἑνώσας τὰ δύο τρίγωνα καὶ ἐφαρμόσας ἀλλήλοις, καὶ ἐκ δυοῖν ἓν ἀποτελέσας, οὕτως αὐτῶν μὲν ἰσότητα τὴν κατὰ πάντα τίθεται. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν καὶ ἡμᾶς δυνατὸν ἐν τῷ ἑνὶ τούτῳ παρὰ τὴν λῆψιν τὰ δύο τρίγωνα θεωροῦντας ἀποδεικνύναι τὴν ἰσότητα τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν. τῷ μὲν οὖν Θαλῇ τῷ παλαιῷ πολλῶν τε ἄλλων εὑρέ-

σεως ἕνεκα, καὶ τοῦ τῆς τοῦ θεωρήματος χάριτος. λέγεται γὰρ δὴ πρῶτος ἐκεῖνος ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν, ὡς ἄρα παντὸς ἰσοσκελοῦς αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀρχαϊκώτερον δὲ τὰς ἴσας ὁμοίας προσειρηκέναι. μειζόνως δὲ ἄν τις ἀγασθείη τῶν νεωτέρων τῶν ἀποδειξάντων, ὅτι καθολικώτερον, ὃ δεῖ καὶ Γέμινος, τὰς ἀφ' ἑνὸς σημείου προσπιπτούσας εὐθείας ἴσας, ἐπὶ μιᾶς ὁμοιομεροῦς γραμμῆς ἴσας γωνίας ποιῆσαι. ὥστε εἴτε εὐθεῖαν ἔχοι βάσιν, εἴτε περιφέρειαν, εἴτε ἕλικα κυλινδρικὴν, ἴσας αὐτῶν εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας. τούτῳ γὰρ ὁ Γέμινος τῷ θεωρήματι χρώμενος, δείκνυσιν ὅτι μόναι τρεῖς εἰσὶ γραμμαὶ καὶ οὐ πλείους αἱ ὁμοιομερεῖς, ἡ εὐθεῖα, καὶ ἡ περιφερὴς, καὶ ἡ περὶ κύλινδρον ἕλιξ. καὶ ἔστι δὴ τὸ κυρίως καθόλου, ᾧ πρώτῳ τὸ σύμπτωμα ὑπάρχει, καθάπερ δὴ καὶ τὸ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους ἔχειν, τριγώνῳ παντὶ δέδεικται καθ' αὑτὸ ὑπάρχον. οὐκ ἔστιν ἄρα καθόλου τοῦ ἰσοσκελοῦς, εἰ καὶ παντὶ αὐτῷ ὑπάρχει τὸ τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἔχειν, ἀλλὰ τῶν πρὸς ὁμοιομερεῖ γραμμῇ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ἐκείναις γὰρ πρώτως ὑπάρχει, τὸ τὰς ἴσας ὑποτείνειν γωνίας.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ὦσι καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι εἰσίν.) Τοῦτο τὸ θεώρημα δύο ταῦτα ἐπεδείξατο πρῶτα τῶν θεωρημάτων, τήν τε ἀντιστροφὴν, καὶ τὴν εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγήν. ἀντιστρέφει μὲν γὰρ πρὸς τὸ πρὸ αὐτοῦ θεώρημα, δείκνυται δὲ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. δεῖ δὲ περὶ ἀμφοτέρων εἰπεῖν, ὅσα πρὸς τὴν παροῦσαν ἐστὶ πραγματείαν οἰκεῖα. λέγεται τοίνυν ἡ ἀντιστροφὴ παρὰ τοῖς γεωμέτραις, ἡ μὲν προηγουμένως καὶ κυρίως, ὅταν τὰ συμπεράσματα καὶ τὰς ὑποθέσεις ἀλλήλων ἀντιμεταλαμβάνῃ τὰ προβλήματα. καὶ τὸ μὲν τοῦ προτέρου συμπέρασμα, ὑπόθεσις ἐν τῷ δευτέρῳ γίγνεται, ἡ δὲ ὑπόθεσις ὡς συμπέρασμα ἐπάγεται. οἷον, τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι. ὑπόθεσις μὲν τὸ ἰσοσκελὲς ἐνταῦθα τρίγωνον, συμπέρασμα δὲ ἡ τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν ἰσότης τα ἰσοσκελῆ ἐστιν. ὃ δὴ καὶ τὸ ἕκτον λέγει θεώρημα. ὑπόθεσιν μὲν ποιησάμενον, τὸ ἴσας εἶναι τὰς πρὸς τῇ βάσει γωνίας, συμπέρασμα δὲ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ὑποτεινουσῶν τὰς ἴσας ἐκείνας γωνίας. ἡ δὲ ἀντιστροφὴ κατὰ μόνην τὴν ποιὰν τῶν συγκειμένων ἐναλλαγήν. ἐὰν γὰρ ᾖ θεώρημα σύνθετον ἐκ πλειόνων ὑποθέσεων ἀρχόμενον καὶ λῆγον εἰς τὸ συμπέρασμα, λαβόντες τὸ συμπέρασμα, καὶ μίαν τῶν ὑποθέσεων, ἢ καὶ πλείους. καὶ κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον ἐν τῷ τετάρτῳ θεωρήματι, τὸ ὄγδοον ἀντιστρέφει. τὸ μὲν γάρ φησιν ὑπὸ ἴσας πλευρὰς καὶ γωνίας βάσεις ἴσας ὑποτείνουσι. τὸ δὲ, ὑπὸ τῶν ἴσων βάσεων ἴσαι πλευραὶ κείμεναι γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ὧν τὸ μὲν τῶν ἴσων βάσεων συμπέρασμα ἦν τοῦ προτέρου, τὸ δὲ, ἴσαι πλευραὶ κείμεναι μία τῶν ἐν ἐκείνῳ περιειλημμένων ὑποθέσεων. δύο δὴ τούτων οὐσῶν ἀντιστροφῶν, ἡ μὲν προηγουμένη μονοειδής ἐστι καὶ ὡρισμένη· ἡ δὲ ἑτέρα ποικίλη, καὶ εἰς ἀριθμὸν πρόεισι πολλῶν θεωρημάτων. καὶ οὐκ ἐν ἑνὶ ἀντιστρέφουσα, ἀλλ' ἐν πολλοῖς διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐν τοῖς συνθέτοις θεωρήμασιν ὑποθέσεων ἀρχομένων ἐναντιστρεφομένων, ὅταν αἱ ὑποθέσεις μὴ πᾶσαι ὦσιν ὡρισμέναι, ἀλλ' ἔνιαι ἀοριστώδεις. δεῖ δὲ ἐφιστάναι καὶ ἐν τούτοις, ὅτι πολλαὶ ἀντιστροφαὶ γίγνονται ψευδεῖς, καὶ οὐκ εἰσὶ κυρίως ἀντιστροφαί. οἷον, πᾶς ἑξάγωνος ἀριθμὸς, τρίγωνός ἐστι. αἴτιον δὲ, ὅτι τὸ μὲν ἐστὶ κοινότερον, τὸ δὲ, μερικώτερον. καὶ κατὰ παντὸς μὲν λέγεται θατέρου θάτερον. ἐφ' ὧν δὲ τὸ πρώτως ὑπάρχον, καὶ τὸ ᾗ αὐτὸ λαμβάνεται, ἐπ' ἐκείνων καὶ ἡ ἀντιστροφὴ παρακολουθεῖ. καὶ ταῦτα οὐδὲ τοὺς περὶ τὸν Μέναιχμον καὶ Ἀμφίνομον λέληθε μαθηματικούς. αὐτῶν δὲ τῶν ἀντιστρεφόντων θεωρημάτων, τὰ μὲν, εἰώθασι καλεῖν προηγούμενα, τὰ δὲ, ἀντίστροφα. ὅταν μὲν γὰρ ὑποθέμενοι τὸ γένος, ἀποδεικνύωσι τὸ περὶ αὐτὸ σύμπτωμα προηγούμενον τοῦτο λέγουσιν. ὅταν δὲ ἀνάπαλιν, ὑπόθεσιν μὲν ποιῶνται τὸ σύμπτωμα, συμπέρασμα δὲ τὸ γένος ᾧ τοῦτο συμβέβηκεν, ἀντίστροφον τὸ τοιόνδε προσαγορεύουσιν. οἷον, πᾶν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἴσας ἔχει τὰς πρὸς τῇ βάσει, τοῦτο προηγούμενον. ὑπόκειται γὰρ τὸ τῇ φύσει προηγούμενον λέγω δὴ τὸ γένος αὐτὸ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. πᾶν τρίγωνον δύο γωνίας ἔχον ἴσας, καὶ τὰς ὑποτεινούσας πλευρὰς ἴσας ἔχει, καὶ ἔστιν ἰσοσκελὲς, τοῦτο ἀντίστροφον. ἐναλλάττει γὰρ τὸ ὑποκείμενον, καὶ τὸ τούτου πάθος. καὶ τὸ μὲν ὑποτίθησι, τὸ δὲ, ἀπὸ τούτου δείκνυσι. τοσαῦτα περὶ τῶν γεωμετρικῶν ἀντιστροφῶν εἴχομεν λέγειν. αἱ δὲ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαὶ, πάντως μὲν εἰς ἀδύνατον τελευτῶσιν ἐναργὲς, καὶ οὗ τὸ ἀντικείμενον ὁμολογεῖται, συμβαίνει δὲ, τὰς μὲν αὐτῶν ἐπὶ τὰ μαχόμενα ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις ἢ τοῖς αἰτήμασιν,

ἢ ταῖς

Ἀντιστροφή.

ἢ ταῖς ὑποθέσεσι τελευτῶν, τὰς δὲ ἐπὶ τὰ τοῖς προαποδεδειγμένοις ἀντιφάσκοντα. τὸ μὲν γὰρ ἐκτὸς τοῦτο θεώρημα τὸ συμβαῖνον, ἀδύνατον ἐπιδείκνυσι, διὰ τὴν κοινὴν ἔννοιαν ἀνατρέπον, τὴν τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον λέγουσαν. τὸ δὲ ἐντὸς, καταντᾷ μὲν εἰς ἀδύνατον, ἀλλ' οὐ κοινῆς ἐννοίας ἀνατρεπτικόν, ἀλλὰ τοῦ δεδειγμένου διὰ τοῦ ἑβδόμου θεωρήματος. ὃ γὰρ ἀπέφηνε τὸ ἕβδομον, τοῦτο ἐκεῖνο δείκνυσι καταφασκόμενον, τοῖς μὴ συγχωροῦσι τὸ ζητούμενον. πᾶσα γε μὴν ἡ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγὴ λαβοῦσα τῷ ζητουμένῳ τὸ μαχόμενον, καὶ τοῦτο ὑποθεμένη πρόεισιν, ἕως ἂν εἰς ὁμολογούμενον ἄτοπον καταντήσῃ, καὶ διὰ ἐκείνου τὴν ὑπόθεσιν ἀνελοῦσα, βεβαιώσηται τὸ ἐξ ἀρχῆς ζητούμενον. ὅλως γὰρ εἰδέναι χρὴ, ὅτι πᾶσαι αἱ μαθηματικαὶ πίστεις, ἢ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν εἰσίν, ἢ ἐπὶ τὰς ἀρχὰς, ὥσπερ φησὶ καὶ ὁ Πορφύριος. καὶ αἱ μὲν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν διτταὶ καὶ αὐταὶ τυγχάνουσιν. ἢ γὰρ ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν ὁρμῶνται, καὶ τῆς ἐναργείας μόνης τῆς ἀπ' ἴσου, ἢ ἀπὸ τῶν προδεδειγμένων. αἱ δὲ ἐπὶ τὰς ἀρχὰς, ἢ θετικαὶ τῶν ἀρχῶν εἰσιν, ἢ ἀναιρετικαί. ἀλλὰ θετικαὶ μὲν οὖσαι τῶν ἀρχῶν ἀναλύσεις καλοῦνται, καὶ ταύταις αἱ συνθέσεις ἀντίκεινται. δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ἐκείνων προελθεῖν εὐτάκτως ἐπὶ τὸ ζητούμενον, καὶ τοῦτό ἐστιν ἡ σύνθεσις. ἀναιρετικαὶ δὲ οὖσαι εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαὶ προσαγορεύονται. τὸ γὰρ τῶν ὁμολογημένων τι καὶ ἐναργῶν ἀνατρέψαι ταύτης ἔργον τῆς ἐφόδου. καὶ ἔστιν ἐπὶ ταύτης συλλογισμός τις ἀλλ' οὐχ ὁ αὐτὸς, ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. ἐν γὰρ ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαῖς, ἡ πλοκὴ κατὰ τὸ δεύτερόν ἐστι τῶν ὑποθετικῶν. οἷον, εἰ μή εἰσι τῶν ἴσας ἐχόντων γωνίας τριγώνων αἱ ὑποτείνουσαι πλευραὶ τὰς ἴσας γωνίας ἴσαι, τὸ ὅλον ἴσον ἐστὶ τῷ μέρει, ἀλλὰ τοῦτο ἀδύνατον, εἰσὶν ἄρα τῶν ἴσας ἐχόντων δύο γωνίας τριγώνων αἱ ὑποτείνουσαι πλευραὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ αὐταὶ ἴσαι. τοσαῦτα καὶ περὶ τῆς παρὰ τοῖς γεωμέτραις εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. χρῆται δὲ ὅπερ ἔφαμεν ὁ στοιχειωτὴς, τῇ μὲν ἀντιστροφῇ, κατὰ τὴν πρότασιν, τὸ συμπέρασμα τοῦ πέμπτου θεωρήματος ὡς δεδομένον λαβὼν, καὶ τὴν ὑπόθεσιν τὴν ἐκείνου προστιθεὶς ὡς ζητούμενον. τῇ δὲ εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ, περί τε τὴν κατασκευὴν, καὶ τὴν ἀπόδειξιν. εἰσὶ δέ τινες οἳ ἐνίστανται λέγοντες ὅτι τὴν τῇ αβ ἀπὸ τῆς αγ ἴσην ἀφαιροῦντα, οὐ δεῖ πρὸς τῷ γ ποιεῖσθαι τὴν ἀφαίρεσιν, ἀλλὰ πρὸς τὸ α θέμενοι καὶ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν, εἰς τὸ αὐτὸ καταντήσομεν ἀδύνατον. ἔστω γὰρ ἴση ἡ αε, τῇ αδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βα, καὶ κείσθω ἴση ἡ αε τῇ δγ. ὅλη ἄρα ἡ βε, ἴση τῇ αγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. ἐπεὶ οὖν ἡ αγ ἴση τῇ βε, κοινὴ δὲ ἡ βγ δύο δυσὶν ἴσαι. καὶ ἡ πρὸς τῷ β γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ αγβ. οὕτω γὰρ κεῖται. καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα διὰ τὸ τέταρτον. ὥστε καὶ τὸ εβγ τρίγωνον, τῷ αβγ τριγώνῳ ἴσον ὅλον, τῷ μέρει, ὅπερ ἀδύνατον. ἀλλ' ἐπεὶ καὶ τοῦτο δῆλον ἑπόμενόν ἐστι καὶ τὸ λοιπὸν δεῖξαι τῆς ἀντιστροφῆς. ὁ μὲν γὰρ στοιχειωτὴς πρὸς μέρος ἀντέστρεψε τοῦ πέμπτου θεωρήματος ὅλον τὸ ἐκτὸς. δεῖ δὲ καὶ τὴν λοιπὴν ἀντιστροφὴν προσθεῖναι. αὕτη δέ ἐστι λαμβάνουσα μὲν ὡς ὑπόθεσιν τὸ εἶναι τριγώνου τινὸς τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας, δεικνῦσα δὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνον. ἔστω τοίνυν τὸ αγβ τρίγωνον, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ αβ αγ, καὶ ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι, λέγω ὅτι ἰσοσκελές ἐστι τὸ αβγ. εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς αε σημεῖον τὸ ε. καὶ ἴση τῇ βε, ἡ γζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ βζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ βε τῇ γζ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δυσὶν ἴσαι. καὶ ἡ ὑπὸ εβγ γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ ζγβ. καὶ γὰρ ὑπὸ τὴν βάσιν. καὶ πάντα ἄρα πᾶσι, διὰ τὸ τέταρτον. ἴση ἄρα καὶ ἡ εγ βάσις, τῇ ζβ καὶ ἡ ὑπὸ βεγ, τῇ ὑπὸ ζβ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ γβζ, τῇ ὑπὸ βγε. ὑπὸ γὰρ αὐτὰς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἐπεὶ δὲ ὅλη ἡ ὑπὸ εβγ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζγβ ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ζβγ ἴση τῇ ὑπὸ εγβ. λοιπὴ δὲ ἄρα, ἡ ὑπὸ εβζ, ἴση τῇ ὑπὸ ζγε. ἔστι δὲ ἡ βε τῇ γζ ἴση, καὶ ἡ βζ, τῇ εγ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βεζ τῇ ὑπὸ γζε ἴση. ὥστε καὶ ἡ αε τῇ αζ ἴση διὰ αὐτὸ τὸ ἕκτον. δέδεικται γὰρ ἀφ' ὧν ἡ βε τῇ γζ ἴση. οὕτως γὰρ ἀφῄρηται. λοιπὴ ἄρα ἡ αβ τῇ αγ ἴση, ἰσοσκελὲς ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον. ἐάν τε ἄρα τὰς δύο γωνίας ἴσας ἔχῃ, καὶ οὕτως ἰσοσκελὲς ἔσται τὸ δοθὲν τρίγωνον. τί οὖν αἴτιον δι' ὃ οὐκ ἀντέστρεψεν ὁ στοιχειωτὴς καὶ τὸ λοιπὸν μέρος; ἢ ὅτι καὶ ἐπὶ τοῦ πέμπτου θεωρήματος τὸ τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίας ἴσας εἶναι παρέργως ἦν ἄλλων ἕνεκα ἀπόρων διαλύσεων ἐκβεβλημένον. τὸ δὲ τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν συντελεῖ τῷ ζητουμένῳ, πρὸς τὸ διὰ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων ἀποφαίνεσθαι, τοῦτο καὶ ἀφορμὰς αὐτῷ κἀκεῖνα παρέχειν τοῦ τῶν ἀπὸ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσων οὐσῶν, δείκνυσθαι καὶ τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές. εἰ γὰρ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας σταθεῖσα, καὶ ποιοῦσα δύο γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν γωνιῶν δεδομένων ἴσων, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει

πάντως

πάντως ἴσαι, τούτῳ τοίνυν χρώμενος ἐν πάσῃ τῇ στοιχειώσει, ἠδύνατο λαμβάνειν, ὅτι τῶν ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσων οὐσῶν, τὸ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστι, εἴπερ ἐδεῖτο. καὶ τοῦτο πρὸς τινῶν θεωρημάτων ἀπόδειξιν. οὐ γὰρ μετὰ πολλὰ φανήσεται δεικνύμενον, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἢ δύο ὀρθὰς, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ. καὶ τὰ μὲν πρὸ τούτου οὐδὲν δεῖ τῆς ἀντιστροφῆς ταύτης, τὰ δὲ ἑξῆς ἐδεῖτο, διὰ τοῦτο τὴν θέσιν ἔχει τοῦ θεωρήματος.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι οὐ σταθήσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.)

Ἔστι μὲν τὸ θεώρημα τοῦτο σπανίῳ τι πεπονθὸς, καὶ οὐ πάνυ ταῖς ἐπιστημονικαῖς προτάσεσιν εἰωθός. τὸ γὰρ ἀποφατικῶς σχηματίζεσθαι καὶ μὴ καταφατικῶς, οὐ σφόδρα αὐταῖς οἰκεῖον. τὰ γοῦν πολλὰ καταφάσεις εἰσὶν αἱ προτάσεις, τῶν τε γεωμετρικῶν, καὶ τῶν ἀριθμητικῶν θεωρημάτων. αἴτιον δὲ ὥς φησιν Ἀριστοτέλης, ὅτι τὸ καθόλου καταφατικὸν, ταῖς ἐπιστήμαις ἐστὶ μάλιστα προσῆκον, ὡς αὐταρκέστερον καὶ μηδὲν τῆς ἀποφάσεως προσδεόμενον. τὸ δὲ καθόλου ἀποφατικὸν, δεῖται καὶ τῆς καταφάσεως. ἐκ γὰρ τῶν ἀποφατικῶν μόνων, οὔτε ἀπόδειξίς ἐστιν, οὔτε συλλογισμὸς οὐδείς. καὶ διὰ τοῦτο αἱ ἀποδεικτικαὶ τῶν ἐπιστημῶν, τὰ μὲν πλεῖστα καταφατικὰ δεικνύουσι, σπανίως δὲ χρῶνται καὶ τοῖς ἀποφατικοῖς συμπεράσμασι. θαυμαστῆς δὲ ἀκριβείας ἐστὶν ἡ πρότασις τοῦ θεωρήματος πλήρης, καὶ πάσαις ἠσφάλισται ταῖς προσθήκαις, δι᾽ ὧν ἀνέλεγκτος ἀποτέλεσται, καὶ ἀναμφισβήτητος τοῖς συκοφαντεῖν ἐπιχειροῦσι. πρῶτον μὲν γὰρ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἴληπται, ἵνα μὴ ἀπ᾽ ἄλλης δύο δυσὶν ἴσας δεικνύωμεν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ παραλογιζώμεθα τῇ προτάσει χρώμενοι. ἔπειτα μιᾶς εὐθείας οὔσης οὔ φησιν ἐπὶ ταύτην συστήσεσθαι τὰς δύο ταῖς δυσὶν ἴσας ἁπλῶς. τοῦτο γὰρ δυνατὸν, ἀλλ᾽ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τί γὰρ θαυμαστὸν ἀμφοτέρας ἀμφοτέραις ἴσας λαβεῖν τῶν ἐπισυνισταμένων τὴν μὲν ἐκτείναντα, τὴν δὲ συστείλαντα, ἀλλ᾽ ἑκατέρας ἑκατέραις φησὶν ἀδύνατον. τρίτον προστίθησι τὸ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ. τί γὰρ εἴ τις ταῖς προυφεστώσαις δύο ποιήσας ἴσας ἄλλας δύο, καὶ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἐφαρμόσειε ταύτας ἐκείναις, καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ τῷ κορυφαίῳ τὰς ὑποκειμένας εὐθείας, καὶ ταύτας συστήσαιτο. πάντως γὰρ ἴσων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν, καὶ τὰ πέρατα ἐφαρμόσει. τέταρτον τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. τί γὰρ εἰ μιᾶς εὐθείας ὑποκειμένης τὰς ἐπὶ τὸ ἕτερον αὐτῆς μέρος ποιησαίμεθα τῶν εὐθειῶν, τὰς δὲ ἐπὶ τὸ ἕτερον, ὥστε τὴν εὐθεῖαν κοινὴν εἶναι βάσιν τριγώνων δυεῖν τὰς κορυφὰς ἀντικειμένας ἐχόντων. ἵνα οὖν μὴ τοῦτο παθόντος τῇ αὐτῇ ἀπάτῃ ἐπὶ τὸν στοιχειωτὴν ἐπαγάγωμεν, προσέθηκεν τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. πέμπτον ἐπήνεγκεν τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, καὶ γὰρ ἦν δυνατὸν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο δυσὶν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ συστήσασθαι, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅλῃ τῇ εὐθείᾳ χρησάμενον, καὶ ἐπὶ ταύτης, τὰς δύο συνιστάντα τῶν συνισταμένων, οὐ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐκείναις ἐχουσῶν, ἀλλὰ ἕτερα. ἐὰν γὰρ νοήσωμεν ἐν τετραγώνῳ δύο διαγωνίους ἐπὶ μιᾶς τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν, ἔσονται δύο δυσὶν ἴσαι, πλευρὰ καὶ διάμετρος τῇ παραλλήλῳ πλευρᾷ καὶ τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἀλλ᾽ οὐχ αἱ ἴσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν. οὔτε γὰρ αἱ παράλληλοι οὔτε αἱ διάμετροι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἀλλήλαις, αὗται δὲ ἦσαν ἴσαι. τούτων οὖν πάντων τῶν διορισμῶν φυλαττομένων, ἥ τε πρότασις ἀληθὴς, καὶ ὁ συλλογισμὸς ἀναμφισβήτητος ἀποδείκνυται. τάχα δ᾽ ἄν τινος καὶ ἐπὶ τούτοις ἅπασι τοῖς ἐπιστημονικοῖς ὅροις ἐνίστασθαι τολμήσειεν λέγοντος, ὅτι καὶ τούτων ὑποκειμένων δυνατόν ἐστιν ὃ φησιν ὁ γεωμέτρης ἀδύνατον εἶναι. ἔστω γὰρ ἡ αβ εὐθεῖα, καὶ ἐπὶ ταύτης δύο ταῖς αγ γβ, δύο ἴσαι αἱ αδ, δβ, καὶ ἔστωσαν αὗται ἐκτὸς ἐκείνων, ἵνα καὶ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ γ καὶ τῷ δ ὦσι, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, τὸ α καὶ τὸ β, καὶ ἡ μὲν αγ, τῇ αδ ἴση, ἡ δὲ βγ τῇ βδ. πρὸς δὴ τοὺς οὕτως ἐνισταμένους ἀπαντησόμεθα, τὴν μὲν δγ ἐπιζεύξαντες, τὰς δὲ αγ καὶ αδ ἐκβάλλοντες. τούτων γὰρ κατασκευασθέντων πρόδηλον ὅτι ἰσοσκελὲς μέν τὸ αγδ τρίγωνον ἴσης οὔσης ὡς ὁ ἐκείνου λόγος, τῆς αδ τῇ αγ. αἱ δὲ ὑπὸ τὴν βάσιν ἴσαι, ἡ ὑπὸ εγδ τῇ ὑπὸ γδζ. μείζων ἄρα τῆς ὑπὸ βδζ ἡ ὑπὸ εγδ, πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ βγδ τῆς ὑπὸ βδγ. ἀλλ᾽ ἐπεὶ ἡ πάλιν ἴση ἡ δβ τῇ βγ, ἴσαι καὶ αἱ

πρὸς

πρὸς τῇ βάσει ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἡ αὐτὴ ἄρα καὶ μείζων πολλῷ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ τοῦτο ἦν ἄρα ὅπερ διηγημένοι τὸ πέμπτον ἐλέγομεν, ὅτι τὰς ὑπὸ τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. καὶ εἰ μὴ πρὸς τὰς ἀποδείξεις τῶν ἑξῆς θεωρημάτων ἀλλὰ πρὸς γε τὰς τῶν ἐνστάσεων διαλύσεις ἐστὶ χρήσιμον. καὶ γὰρ νῦν τὴν ἔνστασιν διηλέγξαμεν λαβόντες ὅτι τῶν ΑΓ ΑΔ ἴσων οὐσῶν, ἔσονται καὶ αἱ ὑπὸ ΓΔΕ ΖΓΔ γωνίαι ἴσαι. φανήσεται δὲ ὡσαύτως καὶ ἐπ᾽ ἄλλων θεωρημάτων ἡμῖν τοῦτο συντελοῦν εἰς τὰς τῶν ἀπορημένων διαλύσεις. εἰ δὲ λέγοι τις ὅτι ἔσωσπερ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας ταῖς ΑΓ ΑΔ ἴσαι αἱ ΒΔ ΒΓ, ὧν ἡ μὲν ΒΓ ἴση τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΒΔ, τῇ ΑΔ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, τῷ Α καὶ τῷ Β τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ΑΓ ΑΔ τό Γ καὶ τὸ Δ σημεῖον. τί ἐροῦμεν πρὸς τοῦτον τὸν λόγον, ἢ ὅτι δεῖ καὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ΑΔ εὐθείας συνισταμένας, καὶ τὰς ταύτας ἴσας ἐπὶ τῆς αὐτῆς συνίστασθαι, τῆς ΑΒ εὐθείας. οὕτω γὰρ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐν τῇ προτάσει λέγει. αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΑΔ εὐθεῖαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας, ἀλλὰ πρός τινι σημείῳ τῆς ΑΒ εὐθείας τὴν σύστασιν ἔχουσι, καὶ οὐκ ἐπ᾽ αὐτῆς. ὥστε ἄλλαι μέν εἰσιν αἱ ἐπὶ τῆς εὐθείας οἷον αἱ ΑΓ ΓΒ, καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἄλλαι αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι, καὶ αἱ ταύταις ἴσαι δεῖ ὄντως τὰς συνισταμένας εὐθείας. τοσαῦτα καὶ πρὸς ταῦτα, καὶ πρὸς ταύτην εἰρήσθω τὴν ζήτησιν. ἔτι δὲ τὸ θεώρημα τοῦτο δείκνυται παρὰ τῷ στοιχειωτῇ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, καὶ ὅτι τὸ ἀδύνατον μάχεται πρὸς κοινὴν ἔννοιαν τὴν λέγουσαν τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον, καὶ τὸ αὐτὸ μεῖζον καὶ ἴσον εἶναι ἀδύνατον, πρόδηλον. ἔοικεν δὲ εἶναι τοῦτο τὸ θεώρημα λῆμμα προλαμβανόμενον τοῦ ὀγδόου θεωρήματος. εἰς γὰρ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἐκείνου συντελεῖ, καὶ οὔτε στοιχεῖόν ἐστιν ἁπλῶς, οὔτε στοιχειῶδες. οὐ γὰρ ἐπὶ πολλὰ διατείνει τὴν ἑαυτοῦ χρείαν. συνειωτάτην γοῦν αὐτοῦ παρὰ τοῖς γεωμέτραις τὴν χρῆσιν εὑρήκαμεν.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.) τὸ ὄγδοον θεώρημα ἀντιστρέφον ἐστὶ τοῦ τετάρτου, οὐ κατὰ τὴν προηγουμένην ἀντιστροφὴν ληφθέν. οὐ γὰρ ὅλην τὴν ὑπόθεσιν ἐκείνου ποιεῖται συμπέρασμα, καὶ ὅλον τὸ συμπέρασμα ὑπόθεσιν, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ὑποθέσεως τοῦ τετάρτου, τὸ δὲ τῶν ἐκείνου ζητουμένων συμπλέκον, δείκνυσιν ἕν τι τῶν ἐκεῖ δεδομένων. τὸ μὲν γὰρ τὰς δύο πλευρὰς ἴσας εἶναι ταῖς δύο πλευραῖς, ὑπόθεσίς ἐστιν ἀμφοτέροις, τὸ δὲ τὴν βάσιν ἴσην τῇ βάσει, ἐν ἐκείνῳ μετὰ τῶν ζητουμένων ἦν, ἐν τούτῳ δὲ δέδοται. τὸ δὲ τὴν γωνίαν ἴσην τῇ γωνίᾳ, δεδομένον μὲν ἐν ἐκείνῳ, ζητούμενον δὲ ἐν τούτῳ. μόνη τοίνυν ἡ ἐναλλαγὴ τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων, ποιεῖ τὴν ἀντιστροφήν. εἰ δέ τις ἐπιποθείη μαθεῖν τὴν αἰτίαν δι᾽ ἣν ὄγδοον τέτακται, καὶ οὐ μετὰ τὸ τέταρτον εὐθὺς ὡς ἀντιστρόφως ὂν τὸ πέμπτον. καὶ γὰρ τὰ πλεῖστα τῶν ἀντιστρεφόντων ἕπεται τοῖς προηγουμένοις, καὶ ἐπ᾽ αὐτοῖς ἀμέσως δείκνυται, λεκτέον ὅτι τοῦ μὲν ἑβδόμου τὸ ὄγδοον ἐδεῖτο. δείκνυται γὰρ τὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. τὸ δὲ ἀδύνατον ὅτι τοιοῦτον ἀπὸ τοῦ ἑβδόμου γνώριμον γίγνεται. τοῦτο δὲ αὖ πάλιν εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἐδεῖτο τοῦ πέμπτου. προείληπται τοίνυν ἀναγκαίως τὸ ἕβδομον καὶ τὸ πέμπτον τοῦ δεικνυμένου νυνὶ θεωρήματος. ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ πέμπτου ῥᾴδιον εἶχε καὶ ἀπὸ τῶν πρώτων τὴν ἀπόδειξιν, εἰκότως εὐθὺς μετὰ τὸ πέμπτον ἐτάχθη, διότι τὴν πρὸς ἐκεῖνο συγγένειαν, καὶ ὅτι διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεικνύμενον, ἀπὸ τῶν κοινῶν ἐννοιῶν ἐλέγχει τὸ ἀδύνατον. καὶ οὐχ ὡς τὸ ὄγδοον ἀπ᾽ ἄλλου θεωρήματος, ἐναργέστεροι γάρ εἰς ἔλεγχον τὰ ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις μαχόμενα, τοῖς τῶν θεωρήμασιν ἀντιφασκομένων. ταῦτα γὰρ δι᾽ ἀποδείξεως εἴληπται, ἐκείνων δὲ ἡ γνῶσις κρείττων ἀποδείξεως. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς διὰ τοῦ προαποδειχθέντος ἑβδόμου θεωρήματος τὸ προκείμενον δείκνυσιν. οἱ δὲ περὶ Φίλωνα μηδὲν τούτου φασὶ προσδεηθέντες ἀποδείξειν τὸ ὄγδοον. ἐννοείσθωσαν γάρ φασι δύο τριγώνων ὄντων τῶν ΑΒΓ, καὶ ΔΕΖ, καὶ ἐχόντων δύο πλευρὰς δυσὶν ἴσας, καὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῇ ΕΖ ἐφαρμοζομένην, τὴν βάσιν τῇ βάσει. καὶ τεθειμένον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ τὸ ΔΕΖ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν μερῶν ἐπὶ τῆς, ἵνα μὴ κλίσις ἡ ἡ βάσις τῶν δύο, ἐπὶ θάτερα δὲ τῆς ΕΖ τυχὸν εὐθείας, ὥστε ἀντικειμένας εἶναι αὐτῶν τὰς κορυφάς, καὶ ἀντὶ τοῦ ΑΒΓ, ἔσω τεθὲν οὕτως τὸ ΕΖΗ. καὶ ἴση τῇ μὲν ΔΕ, ἡ ΕΗ, τῇ δὲ ΔΖ, ἡ ΖΗ. ἡ τοίνυν ΖΗ, ἢ ἐπ᾽ εὐθείας κεῖσεται τῇ ΔΖ, ἢ οὐκ ἐπ᾽ εὐθείας, καὶ εἰ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας,

ἢ κατ

ἢ ἐπὶ τὸ ἐντὸς ποιήσει γωνίαν πρὸς αὐτήν, ἢ ἐπὶ τὸ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐπ' εὐθείας. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δε, τῇ εκ, καὶ μία εὐθεῖα ἡ δζκ, ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ δεκ τρίγωνον, καὶ ἴση ἡ πρὸς τῷ δ γωνία, τῇ πρὸς τῷ κ. εἰ δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας ἐστίν, ἐντὸς ποιείτω τὴν γωνίαν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη. ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ εδ εκ, καὶ ἡ βάσις ἡ δη ἴση ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ εδη γωνία, τῇ ὑπὸ εηδ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δζ τῇ ζη, καὶ βάσις ἡ δη ἴση ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ ζδη γωνία τῇ ὑπὸ ζηδ, ἦν δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εηδ, ἴση τῇ ὑπὸ εδη. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζηε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ δὴ λοιπόν, ἐπὶ τὸ ἐκτός, ποιείτω γωνίαν πρὸς τῇ δζ, ἡ ζη, καὶ ἐπεζεύχθω ἐκτὸς ἡ δη. ἐπεὶ δὴ ἴσαι εἰσὶν αἱ δε, εη, καὶ βάσις ἡ δη, ἴσαι αἱ ὑπὸ εδη δηε γωνίαι. πάλιν ἐπεὶ ἴσαι αἱ δζ ζη, καὶ βάσις ἡ δη, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ζδη γωνία, τῇ ὑπὸ ζηδ. ἦσαν δὲ καὶ ὅλαι αἱ ὑπὸ εδη δηε γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ εδζ ζηε, γωνίαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσί, καὶ εὕρηται τὸ προτεθὲν ἐπὶ πᾶσαν θέσιν τῆς ζη εὐθείας, ἡμῶν τὸ θεώρημα ἀποδεδειχότων, καὶ οὐδαμοῦ τῷ ἑβδόμῳ προσχρησαμένων. μήποτε οὖν φασὶ περιττῶς ἐκεῖνο παρεισκέκληται τῇ στοιχειώσει. εἰ γὰρ μόνου τοῦ ὀγδόου ἕνεκα αὐτὸ παρειλήφαμεν, δέδεικται δὲ καὶ ἄνευ ἐκείνου τὸ ὄγδοον, πῶς οὐχὶ παντελῶς ἄχρηστον ἀναφαίνεται τὸ ἕβδομον. πρὸς δὴ ταῦτα λεκτέον, ἃ καὶ οἱ πρὸ ἡμῶν, ὅτι τὸ ἕβδομον ἀποδειχθέν, χρησιμώτατόν ἐστι τοῖς τὰ ἀστρονομικὰ δεινοῖς, εἰς τὴν περὶ τῶν ἐκλείψεων τόπον. τούτῳ γάρ φησι χρώμενοι δεικνύναι ὅτι τρεῖς ἐφεξῆς ἐκλείψεις ἴσον ἀπέχουσαι ἀλλήλων, οὐκ ἂν γένοιντο. λέγω δέ, ὥστε τοσούτῳ χρόνῳ τὴν δευτέραν διεστάναι τῆς πρώτης, ὅσῳ τὴν τρίτην τῆς δευτέρας. οἷον, εἰ μετὰ τὴν πρώτην ἡ δευτέρα γέγονεν ἓξ μηνῶν παρελθόντων καὶ εἴκοσιν ἡμερῶν, οὐκ ἂν γενέσθαι τὴν τρίτην ὕστερον τοσούτῳ χρόνῳ τῆς δευτέρας, ἀλλ' ἤτοι πλείονι, ἢ ἐλάττονι. τοῦτο δὲ οὕτως ἔχον ἀποδείκνυσθαι διὰ τοῦ ἑβδόμου θεωρήματος. καὶ οὐ τοῦτο μόνον τὸν στοιχειωτήν, ὡς πρὸς ἀστρονομίαν ἡμῖν συντελοῦν, ὁδοῦ πάρεργον δεικνῦναι, ἀλλὰ καὶ ἄλλα θεωρήματα πολλά τε καὶ προβλήματα. τὸ γοῦν τελευταῖον ἐν τῷ τετάρτῳ, καθ' ὃ τὴν τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰν ἐγγράφει τῷ κύκλῳ, τίνος ἕνεκά φησί τις αὐτὸν προβάλλειν, ἢ τῆς πρὸς ἀστρονομίαν τούτου τοῦ προβλήματος ἀναφορᾶς; ἐγγράψαντες γοῦν εἰς τὸν διὰ τῶν πόλων κύκλον τὸ πεντεκαιδεκάγωνον ἔχουσι τὴν ἀπόστασιν τῶν πόλων τοῦ τε ἰσημερινοῦ, καὶ τοῦ ζωδιακοῦ. πεντεκαιδεκαγωνικὴν γὰρ ἀλλήλων πλευρὰν ἀφεστήκασιν. ἔοικεν οὖν στοιχειωτής, καὶ πρὸς τὴν ἀστρονομίαν βλέπων, πολλὰ προδεικνῦσαι, προευτρεπίζων ἡμᾶς, καὶ εἰς ἐκείνην τὴν ἐπιστήμην συντελῶν. δῆλον δὲ ὅτι τοῦτο τὸ ἕβδομον δείκνυται ἀπὸ τοῦ πέμπτου, καὶ δείκνυσι χωρὶς ἁπάσης ποικιλίας τὸ ὄγδοον, ταύτην αὐτῷ τὴν τάξιν δέδωκεν. ἐπεὶ ἥ γε τοῦ Φίλωνος ἐπιβολή, καλὴ μὲν τῇ δὲ ποικιλίᾳ τῶν πτώσεων, πρὸς στοιχείωσιν ἀνεπιτήδειος. πρὸς μὲν οὖν τὴν ζήτησιν ταύτην εἰρήσθω τοσαῦτα. εἰ δέ τις ἀποροίη, πῶς οὐχὶ καὶ ἐπὶ τοῦ ὀγδόου προσέθηκεν ὥσπερ ἐπὶ τοῦ τετάρτου, λέγω δὴ καὶ τὰ τρίγωνα ἴσα εἶναι, καὶ τὰς λοιπὰς γωνίας; ἐροῦμεν ὅτι τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίας ἴσης ἀποδειχθείσης εἴπετο καὶ τὸ πάντα εἶναι πᾶσιν ἴσα, διὰ τὸ τέταρτον, τοῦτο οὖν ἔδει μόνον καθ' αὐτὸ ἀποδεικνῦσαι, τὰ δὲ ἄλλα ὡς ἑπόμενα λαμβάνειν. ἔοικε δὲ τὴν ἰσότητα τῶν πρὸς ταῖς κορυφαῖς γωνιῶν ἡ τῶν περιεχουσῶν πλευρῶν τὰς γωνίας, καὶ ἡ τῶν βάσεων ἰσότης ποιεῖν. οὔτε γὰρ ἀνίσων οὐσῶν τῶν βάσεων, αἱ αὐταὶ γωνίαι μένουσι τῶν περιεχουσῶν ὑποκειμένων, ἀλλὰ τῆς βάσεως ἐλαττουμένης, συνελαττοῦται ἡ γωνία, καὶ αὐξομένης συναύξεται. οὔτε τῶν αὐτῶν βάσεων οὐσῶν, τῶν δὲ πλευρῶν ἀνισουμένων μένει ἡ γωνία, ἀλλ' ἐλαττουμένων μὲν αὔξεται, αὐξομένων δέ, ἐλαττοῦται. πάσχουσι γὰρ ἐναντίον πάθος αἱ γωνίαι ταῖς περιεχούσαις. καὶ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰ νοήσαις εἰς τὸ κάτω διελκομένας τὰς πλευράς, αὐτὰς μὲν ἐλάττους, αὔξεις δὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην. καὶ πλείω ποιεῖς αὐτῶν τὴν ἀπ' ἀλλήλων διάστασιν. εἰ δὲ ἀναγομένας καὶ προσθήκην δεχομένας ἐλάττονα τὴν γωνίαν, ἣν περιλαμβάνουσι. συμπίπτουσι γὰρ ἐπὶ πλέον τῆς κορυφῆς αὐτῶν πορρωτέρω γιγνομένης τῆς βάσεως. ἀσφαλὲς οὖν λέγειν, καὶ τὴν βάσιν αὐτὴν οὖσαν καὶ τὰς πλευρὰς ἴσας οὖν ὑπαρχούσας, τὴν ἰσότητα τῆς γωνίας ἀφορίζειν.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν, δίχα τεμεῖν.) Τοῖς προβλήμασιν ἀναμίγνυσι τὰ θεωρήματα, καὶ τοῖς θεωρήμασι, συμπλέκει τὰ προβλήματα. καὶ δι' ἀμφοτέρων, τὴν ὅλην συμπεραίνει στοιχείωσιν. τότε μὲν τὰ ὑποκείμενα ὁριζόμενος, τότε δὲ τὰ περὶ

αὐτὰ

αὐτὰ συμπτώματα θεωρεῖν. δείξας τοίνυν διὰ τῆς προσθέσεως καὶ πρὸς ἓν τρίγωνον τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ἑπομένην, τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν, καὶ ἀνάπαλιν, καὶ πρὸς δύο τρίγωνα ὡσαύτως. πλὴν ὅτι τῆς ἀντιστροφῆς ὁ τρόπος διαφέρων ἦν, ἐπί τε τοῦ ἑνὸς τριγώνου καὶ τοῖν δυοῖν, μετάστασιν ἐπὶ τὰ προβλήματα, καὶ ἐπιτάττει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν, καὶ δῆλον, ὅτι δέδοται μὲν ἐνταῦθα καὶ τὸ εἶδος ἡ γωνία. εὐθύγραμμος γὰρ εἴρηται, καὶ οὐχ ἡ τυχοῦσα. τὸ γὰρ πᾶσαν γωνίαν δίχα τεμεῖν, οὐκ ἔστι κατὰ στοιχείωσιν, ὅπου καὶ ἀμφισβητήσιμον ἐὰν δύναται εἰ πᾶσαν δεῖ διχοτομῆσαι γωνίαν. τὴν γὰρ κερατοειδῆ γωνίαν εἰ δυνατὸν δίχα διελεῖν, ἀπορήσειας ἄν. ἀφώρισται γὰρ μὴν ὁ λόγος τῆς τομῆς, καὶ ἴσως πάλιν εἰκότως. τὸ γὰρ εἰς τὸν τυχόντα λόγον διελεῖν ἐκβαίνει τὴν παροῦσαν κατασκευήν, οἷον, εἰς τρία ἴσα ἢ τέσσαρα, ἢ πέντε. τὴν μὲν γὰρ ὀρθήν, τρίχα τεμεῖν δυνατὸν ὀλίγοις χρησάμενον τῶν ἑξῆς, τὴν δὲ ὀξεῖαν ἀδύνατον μὴ ἐπ' ἄλλας μεταβάντα γραμμάς, αἳ τοῦ μικτοῦ εἰσιν εἴδους. δηλοῦσι δὲ οἱ πρόθεσιν ποιησάμενοι ταύτην, τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν τρίχα τεμεῖν. Νικομήδης μὲν γὰρ ἐκ τῶν κογχοειδῶν γραμμῶν, ὧν καὶ τὴν γένεσιν καὶ τὴν τάξιν, καὶ τὰ συμπτώματα παραδέδωκεν αὐτὸς εὑρετὴς ὢν τῆς ἰδιότητος αὐτῶν, πᾶσαν εὐθύγραμμον γωνίαν ἐτριχοτόμησεν. ἕτεροι δὲ ἐκ τῆς ἱππίου καὶ Νικομήδους, τετραγωνιζουσῶν πεποιήκασι τὸ αὐτό, μικταῖς χρησάμενοι γραμμαῖς, ταῖς τετραγωνιζούσαις. ἄλλοι δὲ ἐκ τῶν ἀρχιμηδείων ἑλίκων ὁρμηθέντες, εἰς τὸν δοθέντα λόγον, ἔτεμον τὴν εὐθύγραμμον γωνίαν. ὧν τὰς ἐπινοίας δυσθεωρήτους οὔσας, τοῖς εἰσαγομένοις παραλείπομεν ἐν τῷ παρόντι. μᾶλλον γὰρ ἂν κατὰ καιρὸν ἐξετάσαι μὲν ἴσως ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ τοῦ στοιχειωτοῦ, τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνοντος. καὶ γὰρ ἐκεῖ, ὁ αὐτὸς τρόπος τῆς ζητήσεως, μὴ δίχα μόνον, ἀλλὰ καὶ τρίχα τεμεῖν. καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν αἱ ἐπιβολαὶ τοῖς παλαιοῖς γεγόνασι, τῆς εἰς τρία ἴσα πάσης περιφερείας διαιρέσεως. εἰκότως ἄρα καὶ ὁ μεμνημένος εὐθείας καὶ περιφερείας, τὰ δὲ ἐκ τούτων ὑφιστάμενα κατὰ μίξιν ἢ διὰ δυσεξέλικτα ὄντα, καὶ δυσαξιώματα μὴ περιεργαζόμενος πάσας τὰς τοιαύτας ζητήσεις παρῄεισιν, ὅσαι τῶν μικτῶν προσδέονται γραμμῶν, ἐπὶ τῶν πρώτων καὶ ἁπλουστάτων εἰδῶν, καὶ τὰ ἐκ τούτων μόνον, ἢ ποιεῖσθαι δυνάμενα, ἢ θεωρεῖσθαι προστεθεὶς εἰς ζήτησιν ὁποῖον δή ἐστι τὸ νῦν ζητούμενον πρόβλημα τὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν δίχα τεμεῖν. χρῆται γὰρ ἐν τούτῳ, πρὸς μὲν τὴν κατασκευήν, αἰτήματι ἑνί, καὶ τῷ πρώτῳ καὶ τρίτῳ θεωρήματι, πρὸς δὲ τὴν ἀπόδειξιν, τῷ τρίτῳ μόνῳ θεωρήματι. δέονται γὰρ πάντως ἀποδείξεως καὶ τὰ προβλήματα, ὡς καὶ πρότερον εἴπομεν. καὶ τὸ ἐπισημαντικόν, ἀπὸ ταύτης προσλαμβάνει. ἴσως δ' ἄν τινες ἐνσταῖεν τῷ γεωμέτρῃ τὸ συνιστάμενον ἰσόπλευρον ἐπ' αὐτοῦ λέγοντες τὴν κορυφὴν οὐκ ἐντὸς ἔχειν τῶν δύο εὐθειῶν, ἀλλ' ἤτοι ἐπὶ τῆς ἑτέρας, ἢ καὶ ἐκτὸς ἀμφοτέρων *γίγνεσθαι δὲ σαφὲς ἀμφοτέρων *γίγνεσθαι δὲ σαφὲς τὸ λεγόμενον διὰ τῶν στοιχείων. ἔστω γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἣν δεῖ διχοτομῆσαι. καὶ ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον τὸ β, καὶ ἴση τῇ βα, ἡ γα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἐπὶ ταύτης ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ βγδ. ἔσται δὴ τὸ δ σημεῖον, ἢ μεταξὺ τῶν αβ αγ εὐθειῶν, ἢ ἐπὶ τῆς αβ, ἢ ἐπὶ τῆς αγ, ἢ ἐκτὸς ἑκατέρας. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς μεταξὺ ἔλαβεν αὐτό, καὶ διὰ τοῦτο οἱ κωλύοντες καὶ τὴν ἀπόδειξιν ἐμποδίζοντες φασὶν ἢ ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτὸ κεῖσθαι τῶν εὐθειῶν, ἢ καὶ ἐκτὸς ἀμφοτέρων. κείσθω τοίνυν ἐπὶ τῆς αβ τὸ δ, ὥστε εἶναι ἰσόπλευρον τὸ βγδ. ἴση ἄρα ἡ δβ τῇ δγ, καὶ αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, ἡ ὑπὸ γβδ, καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, μείζων ἄρα ὅλη ἡ ὑπὸ βγε, τῆς ὑπὸ γβδ γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ αβ τῇ γα, ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, καὶ ἴσας ἕξει, τὰς ὑπὸ βγ βάσεις. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βγε τῇ ὑπὸ γβδ, ἦν δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατόν, ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου κορυφὴ ἐπὶ τῆς εὐθείας εἶναι τῆς αβδ. ὁμοίως δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τῆς αγε. κείσθω οὖν ἐκτὸς ἀμφοτέρων εἰ δυνατόν, ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ βδ τῇ γδ, ἴσαι αἱ πρὸς τῇ βάσει ἡ ὑπὸ βγδ καὶ ἡ ὑπὸ γβδ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, τῆς ὑπὸ γβε, πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ βγε, τῆς ὑπὸ γβε. ἀλλὰ καὶ ἴση. ἐστὶ γὰρ ὑπὸ τὴν βγ βάσιν τοῦ αβγ ἰσοσκελοῦς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ δ σημεῖον, ἔξω κείσεται κατὰ ταῦτα τὰ μέρη τῶν δύο εὐθειῶν. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι οὐδὲ κατὰ τὰ ἕτερα. καὶ ὁρᾷς πάλιν ὅτι τὸν ἔλεγχον πεποιήμεθα τῶν ἐνστάσεων προσχρώμενοι τῷ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰς ὑπὸ τῇ βάσει γωνίας ἴσας ἔχειν, τοῦτο ἐκεῖνο ὃ πρότερον ἐλέγομεν ὅτι πολλὰ τῶν τῇ ἐπιστήμῃ μαχομένων, στερρὰ καὶ εὐέλεγκτα διὰ τούτου δείκνυνται τοῦ θεωρήμα-

τος. καὶ ὡς ταύτην ἀποπληροῖ τῷ γεωμέτρῃ τὴν χρείαν. εἰ δὲ λέγοι τις τόπον μὴ εἶναι ὑπὸ τὴν βγ βάσιν, δέον δὲ εἶναι συστήσασθαι τὸ ἰσόπλευρον ἐπὶ τὰ αὐτὰ ταῖς βα αγ, ἀνάγκη τοίνυν ἢ αὐταῖς ταῖς βα αγ τὰς συνισταμένας ἐφαρμόζειν, εἴπερ καὶ αὐταὶ ἴσαι τῇ γβ, ἢ ἐκτὸς αὐτῶν πίπτειν, εἰ αὐταὶ ἐλάσσους εἰσὶ τῆς βγ, ἢ ἐντὸς, εἰ μείζους αἱ βα αγ εἰσὶ τῆς βγ. ἐφαρμοζέτωσαν πρῶτον, καὶ ἰσόπλευρον αὐτὸ τὸ βαγ, καὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς αβ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τῆς αγ τῇ αδ ἴση ἀφαιρείσθω, ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δε βε γδ, αζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αβ τῇ αγ, καὶ ἡ αδ τῇ αε, δύο αἱ βα αε δυσὶν ἴσαι ταῖς γα αδ. καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν, ὥστε πάντα ἴσα πᾶσι, καὶ ἡ ὑπὸ δβε γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εγδ, ἴση δὲ καὶ ἡ δβ τῇ εγ καὶ ἡ βε τῇ γδ, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ δεβ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδγ, ὑπὸ γὰρ τὰς ἴσας πλευρὰς ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ δζ τῇ εζ διὰ τὸ ἕκτον. ἐπεὶ οὖν ἡ αε ἴση τῇ αδ, καὶ ἡ αζ κοινὴ, καὶ ἡ δζ τῇ εζ ἴση, τέτμηται ἡ ὑπὸ δαε γωνία εἰς ἴσα ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. εἰ δὲ ἐκτὸς πίπτοιεν τῶν βα αγ δύο εὐθεῖαι αὐτοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευραὶ ἔστωσαν, αἱ βδ δγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ βδ δγ, κοινὴ δὲ ἡ δα, καὶ αἱ βα αγ ἴσαι, καὶ ἡ ὑπὸ βδα γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδα διὰ τὸ ὄγδοον. πάλιν ἐπεὶ αἱ βδ δγ ἴσαι, καὶ ἡ δε κοινὴ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν ὡς δέδεικται, ἴση καὶ ἡ βε τῇ εγ βάσις διὰ τὸ τέταρτον. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ τῇ αγ ἴση, καὶ ἡ αε κοινὴ, καὶ ἡ ὑπὸ βαε γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γαε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. εἰ δὲ ἐντὸς τῶν βα αγ πίπτοιεν αἱ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευραὶ ὡς αἱ βδ δγ, ἐπεζεύχθω πάλιν ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ αγ, καὶ ἡ αδ κοινὴ, βάσις δὲ ἡ βδ βάσει τῇ γδ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γαδ ἴση διὰ τὸ ὄγδοον. δίχα ἄρα τέμνεται ἡ πρὸς τῷ α γωνία ὅπως ἂν συνιστῆται τὸ ἰσόπλευρον. ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ ταύτας συνεκεφαλαιωσάμεθα, τῶν ἑξῆς ἐχώμεθα θεωρημάτων, κἀκεῖνο προστιθέντες περὶ τοῦ δεδόσθαι τὴν γωνίαν, ὅτι τετραχῶς δύναται δίδοσθαι. καὶ γὰρ θέσει, ὡς ὅτε λέγομεν πρὸς τῇ δε τῇ εὐθείᾳ καὶ πρὸς τῷ ε τῷ σημείῳ κεῖσθαι τὴν γωνίαν, καὶ εἶναι δεδομένην αὐτὴν οὕτως. καὶ εἴδει, οἷον ὅτε ὀρθὴν λέγομεν ἢ ὀξεῖαν ἢ ἀμβλεῖαν, ἢ ὅλως εὐθύγραμμον, ἢ μικτήν. καὶ λόγῳ, ὅταν διπλασίαν λέγωμεν τῆς δε καὶ τριπλασίαν, ἢ ὅλως μείζονα καὶ ἐλάσσονα. καὶ μεγέθει ὥσπερ ὅταν τρίτον ὀρθῆς λέγωμεν. ἡ δὲ νῦν κατὰ τὸ εἶδος δέδοται μόνον.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.) Πρόβλημα καὶ τοῦτο, πεπερασμένην μὲν εὐθεῖαν ὑποτιθέμενον, ἐπειδὴ κατ' ἀμφότερα ἄπειρον οὐδαμῶς ἐστὶν τεμεῖσαι. τὴν δὲ ἐπὶ θάτερα μόνον ἀπείρου ὅπου περ ἂν ληφθῇ σημεῖον, εἰς ἄνισα ἡ τομὴ γίγνεται, μείζων γὰρ ἐξ ἀνάγκης ἡ ἐφ' ἃ ἡ ἄπειρος τῆς λοιπῆς πεπερασμένης οὔσης. λείπεται οὖν ἐπ' ἀμφω περασμένην λαμβάνειν τὴν δίχα τέμνεσθαι μέλλουσαν. ἴσως δ' ἄν τινες ἐκ τούτου κινούμενοι τοῦ προβλήματος ὑπονοήσειαν ὅτι προείληπται παρὰ τοῖς γεωμέτραις ὡς ὑπόθεσις τὸ μὴ εἶναι τὴν γραμμὴν ἐξ ἀμερῶν. εἰ γὰρ εἴη, ἢ ἐκ περιττῶν ἐστὶ πεπερασμένη, ἢ ἐξ ἀρτίων. ἀλλ' εἰ ἐκ περιττῶν, ἔοικεν καὶ τὸ ἀμερὲς τέμνεσθαι δίχα τῆς εὐθείας τεμνομένης. ἐπεὶ θάτερον αὐτῆς μέρος ἐκ πλειόνων ἀμερῶν ὑπάρχον, ἔσται μεῖζον τοῦ λοιποῦ. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμεῖν εἴπερ ἐξ ἀμερῶν τὸ μέγεθος. εἰ δὲ μὴ ἐξ ἀμερῶν, ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖται. ἔοικεν οὖν φασὶν ὁμολογεῖσθαι τοῦτο, καὶ εἶναι ἀρχὴν γεωμετρικὴν τὸ μέγεθος τῶν εἰς ἄπειρον εἶναι διαιρουμένων. ἡμεῖς δὲ τὸ τοῦ Γεμίνου ἐνταῦθα ἐροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν διαιρετὸν εἶναι τὸ συνεχὲς ὡς κοινὴν ἔννοιαν οἱ γεωμέτραι προσλαμβάνουσι. τοῦτο γὰρ εἶναι φαμὲν συνεχὲς τὸ ἐκ μερῶν συνημμένων ὑφεστός, πάντως δὲ τοῦτο καὶ διαιρεῖσθαι δυνατόν. ὅτι δὲ καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖται συνεχὲς οὐ προλαμβάνουσιν, ἀλλ' ἀποδεικνύουσιν ἐκ τῶν οἰκείων ἀρχῶν. ὅταν γὰρ δεικνύωσιν ὅτι ἔστι τὸ ἀσύμμετρον ἐν τοῖς μεγέθεσι καὶ οὐ πάντα σύμμετρα ἀλλήλοις τί ἄλλο δεικνύναι φήσειεν ἄν τις, ἢ ὅτι πᾶν μέγεθος εἰς ἀεὶ διαιρεῖται, καὶ οὐδέποτε ἥξομεν εἰς τὸ ἀμερὲς, ὅτι ἐστὶ κοινὸν μέτρον τῶν μεγεθῶν ἐλάχιστον. τοῦτο οὖν ἀποδεικτόν ἐστιν, ἐκεῖνο δὲ ἀξίωμα, ὅτι πᾶν συνεχὲς διαιρετὸν, ὥστε καὶ ἡ πεπερασμένη γραμμὴ συνεχὴς διαιρετή ἐστι. καὶ ἀπὸ ταύτης τῆς ἐννοίας ὁ στοιχειωτὴς διχοτομεῖ τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν, ἀλλ' οὐχ ὡς προλαμβάνων ὅτι εἰς ἄπειρον διαιρετή ἐστιν. οὐ γὰρ ταὐτὸν διαιρετόν ἐστι, καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρετόν. ἐλέγχοιτο δ' ἂν διὰ τοῦ προβλήματος τούτου καὶ ὁ ξενοκράτειος λόγος ὁ τὰς ἀτόμους εἰσάγων γραμμάς, ὅλως γὰρ εἰ ἔστι γραμμή, εὐθεῖά ἐστι καὶ δυνατὸν αὐτὴν δίχα τεμεῖν,

μεῖν,

μεῖζον, ἢ περιφερὴς, καὶ μείζων ἐστὶν εὐθείας τινός. πᾶσα γὰρ περιφερὴς, πάντως ἔχει τὴν εὐθεῖαν ἐλάσσονα, ἢ μικτὴ καὶ πολλῷ πλέον αὕτη διαιρετή ἐστιν εἴπερ ἡ ἁπλῶς ἐστι διαιρετῶν. ἀλλὰ ταῦτα μὲν εἰς ἄλλην ἀναβεβλήσθω θεωρίαν. τέμνει δὲ δίχα τὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν ὁ γεωμέτρης, εἰς μὲν τὴν κατασκευὴν, τῷ πρώτῳ, καὶ τῷ ἐνάτῳ χρώμενος, εἰς δὲ τὴν ἀπόδειξιν τῷ τετάρτῳ μόνον. διὰ γὰρ τῶν γωνιῶν δείκνυσιν ἴσας τὰς βάσεις. Ἀπολλώνιος δὲ ὁ Περγαῖος τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τοῦτον τὸν τρόπον. ἔστω φησὶν ἡ αβ εὐθεῖα πεπερασμένη ἣν δίχα τεμεῖν μέλλομεν, καὶ κέντρῳ τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αβ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν, κέντρῳ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα ἕτερος κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς τῶν κύκλων ἡ γδ. αὕτη δίχα τέμνει τὴν αβ εὐθεῖαν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ γα γβ, ἑκατέρα γάρ ἴση τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, καὶ ἡ δα τῇ δβ ἴση διὰ ταὐτά, ἡ ἄρα ὑπὸ αγδ γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βγδ. ὥστε δίχα τέμνεται ἡ αβ διὰ τὸ τέταρτον. τοιαύτη τίς ἐστι καὶ ἡ τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ προκειμένου προβλήματος ἀπόδειξις. ἀπὸ μὲν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ αὐτὴ ληφθεῖσα, ἀντὶ δὲ τοῦ λαβεῖν δίχα τεμνομένην τὴν πρὸς τῷ γ γωνίαν δεικνῦσα, ὅτι δίχα τέμνεται διὰ τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων. πολλῷ δὴ οὖν κρείττων ἡ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀπόδειξις ἁπλουστέρα καὶ ἀπὸ τῶν ἀρχῶν.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.) ια Εἴτε πεπερασμένην τὴν εὐθεῖαν λάβοιμεν κατ᾽ ἀμφότερα, εἴτε ἄπειρον, εἴτε ὡδὶ μὲν ἄπειρον, ὡδὶ δὲ πεπερασμένην, καὶ τὸ σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς, τῷ γεωμέτρῃ προχωρήσει κατασκευὴ τοῦ προκειμένου προβλήματος. κἂν γὰρ ἐπ᾽ ἄκρας τῆς εὐθείας ᾖ δοθὲν σημεῖον προσεκβάλλοντες τὴν εὐθεῖαν τὰ αὐτὰ ποιήσομεν. δῆλον δὲ ὅτι τὸ μὲν σημεῖον ἐνταῦθα τῇ θέσει δέδοται, ἐπὶ τῆς εὐθείας κείμενον μοναχῶς ἔχει τὴν θέσιν. ἡ δὲ εὐθεῖα ἔχει τὸ εἶδος δέδοται, μέγεθος γὰρ αὐτῆς ὁ λόγος, ἡ θέσις οὐκ ἀφώρισε. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς τῷ πρώτῳ χρησάμενος θεωρήματι καὶ τῷ τρίτῳ, καὶ ἑνὶ τῶν αἰτημάτων, καὶ τῷ πρώτῳ καὶ τῷ ὀγδόῳ πρὸς τούτοις θεωρήματι, καὶ τῷ ὅρῳ τῆς πρὸς ὀρθάς, δείκνυσι τὸ προκείμενον. εἰ δέ τινες τὸ σημεῖον ἐπ᾽ ἄκρας τῆς εὐθείας τιθέντες ἀξιοῖεν μὴ προσεκβάλλοντας ἡμᾶς ἄγειν ἀπὸ τούτου τὴν πρὸς ὀρθάς, δῆλα ταῦτα καὶ τοῦτο δείξομεν. ἔστω γὰρ ἡ αβ, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ α, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν τὸ γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς ὡς ἐν τῷ στοιχείῳ μεμαθήκαμεν ἡ γε, καὶ ἴση ἀπὸ τῆς γε, ἀφῃρήσθω τῇ αγ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ γ γωνία ὑπὸ τῆς γζ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ζγ ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἡ ζα, λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ α γωνία. ἐπεὶ γὰρ ἡ δγ τῇ γα ἴση, κοινὴ δὲ ἡ γζ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. δίχα γὰρ τέμνεται ἡ πρὸς τῷ γ γωνία, καὶ ἡ δζ τῇ ζα ἴση. καὶ πάντα ὁμοίως πᾶσι διὰ τὸ τέταρτον. ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ α τῇ πρὸς τῷ δ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ α. δέδεικται μὲν οὖν τὸ προβληθέν. ὁ δὲ στοιχειωτὴς οὐδὲν δεῖται τῆς ἐπινοίας ταύτης. ἐπέταξε γὰρ πρὸς ὀρθὰς γωνίας ἀγαγεῖν γραμμήν, ἀλλ᾽ οὐ πρὸς μίαν ὀρθήν. δεῖ οὖν καὶ ἐπ᾽ ἄκρας τῆς εὐθείας λαμβάνειν τὸ σημεῖον, ἵνα ἡ ἀγομένη εὐθεῖα γωνίας ποιῇ πρὸς τὴν ὑποκειμένην εὐθεῖαν, ἀλλὰ μὴ μίαν γωνίαν. Ἀπολλώνιος δὲ, τὴν πρὸς ὀρθὰς ἄγει τὸν τρόπον τοῦτον. ἐπὶ τῆς αγ τυχὸν τὸ δ, καὶ ἀπὸ τῆς γε τῇ γδ ἴση ἡ γε, καὶ κέντρῳ τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ εδ γεγράφθω κύκλος, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ δε κύκλος γεγράφθω, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ ἐπὶ τὸ γ ἤχθω, λέγω ὅτι αὕτη ἐστὶν ἡ πρὸς ὀρθάς. ἐὰν γὰρ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ζδ ζε ἴσαι ἔσονται. ἴσαι δέ, καὶ δγ γε, καὶ κοινὴ ἡ ζγ, ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ γ γωνίαι ἴσαι διὰ τὸ ὄγδοον. ὀρθαὶ ἄρα εἰσίν. πάλιν οὖν ὁρᾷς ὅτι ποικιλωτέρα ἡ ἀπόδειξις αὕτη τῆς παρὰ τῷ στοιχειωτῇ, ἣ καὶ προσδεηθεῖσα τῆς τῶν κύκλων γραφῆς, δέον αὐτόθεν ἐπὶ τῆς δε γράψαι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, καὶ δεῖξαι τὸ προκείμενον. πάντα γὰρ τὰ ἄλλα κοινὰ ταῖς ἀποδείξεσίν ἐστι. τὴν δὲ διὰ τοῦ ἡμικυκλίου δεῖξιν οὐδὲ λέγειν ἄξιον. πολλὰ γὰρ προλαμβάνει τῶν ὕστερον, καὶ τῆς ἐν τῇ στοιχειώσει τάξεως, ἀποπίπτει παντελῶς.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.) ιβ Τοῦτο τὸ πρόβλημα πρῶτον Οἰνοπίδης ἐζή

τὸ δὲ χρήσιμον αὐτὸ πρὸς ἀστρολογίαν οἰόμενος. ὀνομάζει δὲ τὴν κάθετον ἀρχαϊκῶς κατὰ γνώμονα, διότι καὶ ὁ γνώμων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὁρίζοντι, τῇ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἡ κάθετός ἐστι ταὐτόν, διαφέρουσα τῇ σχέσει μόνον, περὶ τὸ ὑποκείμενον ἀδιάφορος οὖσα, ὥσπερ φησί, καὶ ἡ κάθετος. διττὴ δὲ αὖ κάθετός ἐστιν, ἡ μὲν, ἐπίπεδος, ἡ δὲ, στερεά. καὶ ὅτε μὲν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἦν τὸ σημεῖον, ἀφ' οὗ ἡ κάθετος δοθεῖσα, ἐπίπεδος λέγεται κάθετος, ὅτε δὲ μετέωρον τὸ σημεῖον καὶ ἔξω τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, στερεά. καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος πρὸς δοθεῖσαν ἄγεται, ἡ δὲ στερεὰ πρὸς ἐπίπεδον. διὸ καὶ ἀναγκαῖον ἐκείνην οὐ πρὸς μίαν εὐθεῖαν ποιεῖν γωνίας ὀρθάς, ἀλλὰ πρὸς πάσας τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. πρὸς γὰρ τὸ ἐπίπεδον ἦν ἠγμένη κάθετος. ἐν τούτῳ μὲν οὖν ὁ στοιχειωτὴς ἐπὶ τοῦ προβλήματι κάθετον ἄγειν ἐπίπεδον προστίθεται. πρὸς γὰρ εὐθεῖαν ἡ ἀγωγὴ προστίθεται. καὶ ὡς ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ πάντων ὑποκειμένων ὁ λόγος πρόεισιν. ἐπὶ μὲν οὖν τῆς πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ἐπ' αὐτῆς εἴληπται τῆς εὐθείας, οὐδὲν ἐνδεόμεθα τῆς ἀπειρίας. ἐπὶ δὲ τῆς καθέτου τὴν δοθεῖσαν ἄπειρον ὑποτίθεται, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον ἀφ' οὗ κάθετος ἀχθήσεται ἔξω που κεῖται τῆς εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ ἦν ἄπειρος, ἐξῆν οὕτω τὸ σημεῖον λαβεῖν, ὥστε ἔξω μὲν εἶναι τῆς δοθείσης ἐπ' εὐθείας, ταύτῃ κείμενον ὡς ἐκβαλλομένην τὴν εὐθεῖαν ἐπ' αὐτὸ πίπτειν, καὶ οὐ προχωρεῖ τὸ πρόβλημα. διὸ ἄπειρον ἔθετο τὴν εὐθεῖαν, ἐὰν ἐφ' ἑκάτερα αὐτῆς ὅπου λαμβάνηται τὸ σημεῖον, μηδαμοῦ χώρας ὑπολειπομένης αὐτῷ, καθ' ἣν ἐπ' εὐθείας ἔσται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, εἰ μὴ μέλλοι πρὸς αὐτῇ κεῖσθαι, καὶ οὐκ ἔξω αὐτῆς. ἄπειρος οὖν ἡ εὐθεῖα δέδοται διὰ τοῦτο ἐφ' ἣν ἡ κάθετος ἀχθήσεται. πῶς δὲ ὅλως ὑπόστασιν ἔχει τὸ ἄπειρον, ἄξιον θεωρῆσαι. δῆλον γὰρ ὅτι δοθείσης ἀπείρου οὔσης ἔσται καὶ ἐπίπεδον ἄπειρον, καὶ ταῦτα κατ' ἐνέργειαν, εἴπερ ἐστὶ τὸ προβληθέν. ὅτι μὲν οὖν ἐν τοῖς αἰσθητοῖς οὐδέν ἐστι μέγεθος ἄπειρον κατ' οὐδεμίαν διάστασιν, φανερόν. οὔτε γὰρ τὸ κύκλῳ κινούμενον ἄπειρον εἶναι ἐνδέχεται οὔτε τῶν ἄλλων σωμάτων τῶν ἁπλῶν οὐδέν. ἔστι γὰρ ἑκάστου τόπος ὡρισμένος. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ἐν τοῖς χωριστοῖς καὶ ἀμερέσι λόγοις εἶναι τὸ τοιοῦτον ἄπειρον δυνατόν. εἰ γὰρ μηδὲ διάστασίς ἐστιν ἐν ἐκείνοις, μήτε μέγεθος, σχολῇ γ' ἂν ἄπειρον εἴη μέγεθος. λείπεται δὴ οὖν ἐν τῇ φαντασίᾳ τὸ ἄπειρον ὑφίστασθαι μόνον, οὐ νοούσης τὸ ἄπειρον τῆς φαντασίας, ἅμα γὰρ νοεῖ, καὶ μορφὴν ἐπάγει τῷ νοουμένῳ, καὶ πέρας, καὶ τῇ νοήσει τοῦ φαντάσματος ἵστησι διέξοδον, καὶ διέξεισιν αὐτὸ καὶ περιλαμβάνει. οὐ νοούσης τοίνυν ἐστὶ τὸ ἄπειρον, ἀλλ' ἀοριστευούσης περὶ τὸ νοούμενον, καὶ μὴ νοούσης μᾶλλον. καὶ ὅσον ἀκαταμέτρητον ἀφίησι, καὶ ἀπερίληπτον νοήσει, τοῦτο ἄπειρον λεγούσης. ὥσπερ γὰρ τὸ σκότος τῷ μὴ ὁρᾶν ὄψις γιγνώσκει, οὕτως ἡ φαντασία τὸ ἄπειρον τῷ μὴ νοεῖν. γεννᾷ μὲν οὖν αὐτὸ τῷ δύναμιν ἔχειν ἀμερῆ, προϊέναι δυναμένην ἀκαταλήκτως. νοεῖ δὲ ὡς ὑποστᾶν, ὅτι μὴ νοεῖ τὸ ἄπειρον. ὃ γὰρ ἀφῆκεν ὡς ἀδιεξίτητον, τοῦτο ἄπειρον λέγει. ὥστε τὴν ἄπειρον γραμμὴν τὴν δοθεῖσαν ἐν τῇ φαντασίᾳ θέμενοι, καθάπερ δὴ καὶ τὰ ἄλλα ἅλα πάντα γεωμετρίας εἴδη, τὰ τρίγωνα τοὺς κύκλους, τὰς γωνίας, τὰς γραμμάς, οὐ θαυμάζομεν, πῶς κατ' ἐνέργειαν ἄπειρός ἐστι γραμμή, καὶ προστίθησιν ἀοριστευούσας ταῖς ὡρισμέναις νοήσεσιν. ἡ δὲ διάνοια περὶ ἣν οἱ λόγοι καὶ αἱ ἀποδείξεις, οὐ πρὸς τὴν ἐπιστήμην χρῆται τῷ ἀπείρῳ. τὸ γὰρ ἄπειρον ὅλως ἐπιστήμῃ περιληπτὸν οὐκ ἔστιν, ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως περιλαμβάνουσα, τῷ πεπερασμένῳ μόνῳ χρῆται, πρὸς τὴν ἀπόδειξιν. καὶ οὐ τοῦ ἀπείρου ἕνεκα τὸ ἄπειρον, ἀλλὰ τοῦ πεπερασμένου λαμβάνει. ἐπεὶ εἴ γε δοθείη μήτε ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι τῇ πεπερασμένῃ τὸ δοθὲν σημεῖον, μήτε ἀφεστάναι τῆς εὐθείας, ὥστε μηδὲν μέρος αὐτῆς ὑποκεῖσθαι τῷ σημείῳ, οὐδὲν ἔτι τοῦ ἀπείρου δεήσεται. ἵνα οὖν τῇ πεπερασμένῃ χρωμένη ἀνελέγκτως χρήσηται καὶ ἀναμφισβητήτως, εἶναι τὸ ἄπειρον ὑποτίθεται, τῇ τῆς φαντασίας ἀοριστίᾳ τῆς τοῦ ἀπείρου γενέσεως ὑποβάθρᾳ χρωμένη. περὶ μὲν οὖν τῆς ὑποθέσεως τοῦ ἀπείρου τοσαῦτα πρὸς τὸ παρὸν ἀρκέσει. μετὰ δὲ ταῦτα χωρῶμεν ἐπὶ τὰς ἐνστάσεις τὰς πρὸς τὴν κατασκευὴν τοῦ ιβ΄ τοῦ προβλήματος. εἰλήφθω γάρ φησι δοθείσης οὔσης ἀπείρου τῆς αβ, καὶ σημείου δοθέντος, ἀφ' οὗ δεῖ τὴν κάθετον ἀγαγεῖν τοῦ γ ἐπὶ θάτερον σημεῖον τὸ δ, καθά φησιν ὁ γεωμέτρης. ἀλλ' ὁ κύκλος ὁ τέμνων τὴν αβ εὐθεῖαν, κατά τε τὸ αβ καὶ τὸ ζ θέσιν ἐχέτω τὴν ὑπογεγραμμένην. πρὸς δὴ τοῦτον τὸν λόγον ἐροῦμεν, ὅτι ἀδύνατον λέγει. τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ αβ κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γε, καὶ ἐκβεβλήσθω μέχρι τῆς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γα γβ, καὶ ἡ αθ τῇ θβ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ γθ, καὶ ἐκβεβλήσθω

μέχρι

μέχρι τῆς περιφερείας. ἐπεὶ οὖν αὗται ἐκ κέντρου, καὶ ἡ αθ τῇ θβ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ γθ, πάντα ἴσα πᾶσιν, ὀρθὰς ἄρα ποιεῖ πρὸς τῷ θ γωνίας ἡ γθ. πάλιν ἐπεὶ αἱ γα γβ ἴσαι, γωνίας ἴσας ποιοῦσι πρὸς τοῖς α καὶ β, σημείοις. ἀλλὰ καὶ ἡ γα τῇ γζ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ γαζ, ἴση τῇ ὑπὸ γζα. ἐπεὶ οὖν πρὸς τῷ α καὶ β ἴσαι, καὶ ἡ ὑπὸ γζα, τῇ ὑπὸ γζβ ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς, ὀρθαὶ ἄρα εἰσίν. ἔστι δὲ ὀρθὴ ἡ ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ θ, ἴση ἄρα ἡ γθ, τῇ γζ. ἀλλὰ καὶ ἡ γζ τῇ γδ, ἴση δήπου ἡ γθ ἄρα τῇ γδ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κατ' ἄλλο σημεῖον ὁ κύκλος τέμνει τὴν αβ εὐθεῖαν. εἰ γὰρ λέγοι τις, ὅτι ὁ γραφόμενος κύκλος ἐπὶ τὸ ζ διχοτομεῖ τὴν αβ, πάλιν τὸ αὐτὸ δείξομεν ἀδύνατον. γεγράφθωσαν γάρ, καὶ ἡ ζβ δίχα τετμήσθω ἐπὶ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ ζθ θβ, κοινὴ δὲ ἡ γθ, καὶ βάσις ἡ γζ τῇ γβ ἴση, πάντα ἴσα πᾶσιν. ὥστε ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ θ γωνίαι. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ζθ τῇ θβ καὶ κοινὴ γθ ἐπεζεύχθωσαν, καὶ ἡ γζ βάσις ἴση τῇ γβ, ἐκ κέντρου γάρ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ θ γωνίαι, ἴσαι γάρ εἰσι καὶ ἐφεξῆς. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ γζθ, γθζ, ἴση δήπου ἡ γζ τῇ γθ, ἀλλὰ ἡ γζ τῇ γε ἴση, ἐκ κέντρου γάρ εἰσιν, ἴση ἄρα δήπου ἡ γθ τῇ γε, ὅπερ ἀδύνατον. λείπεται δὲ τὴν τρίτην ἔνστασιν διελθεῖν. τεμνέτω γάρ φασιν ὁ γραφόμενος κύκλος τὴν εὐθεῖαν, κατὰ τὰ α β καὶ ἐπὶ τὰ ζ θ σημεῖα. τεμόντων οὖν ἡμῶν δίχα τὴν αβ ἐπὶ τὸ κ καὶ ἐπιζευξάντων τὰς γα γζ γκ, δείξομεν τὸ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι αἱ ακ κβ, καὶ κοινὴ ἡ γκ. καὶ αἱ βάσεις αἱ γα γβ ἴσαι, καὶ αἱ πρὸς τοῖς α β γωνίαι ἴσαι. ἀλλ' ἴση ἑκατέρα τῇ γζ, ὀρθαὶ ἄρα καὶ αἱ πρὸς τῷ ζ, ἴσαι γάρ εἰσιν ἐφεξῆς οὖσαι, ἴση ἄρα ἡ γζ, τῇ γκ. ὀρθὰς γὰρ ὑποτείνουσιν, ἀλλὰ ἡ κζ ἴση δήπου τῇ γδ, ἐκ κέντρου γάρ εἰσιν, ἡ ἄρα γδ τῇ γκ ἴση δήπου, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα δυνατόν, οὔτε καθ' ἓν σημεῖον, οὔτε ἐπὶ δύο ἀλλὰ τὸν γραφόμενον κύκλον τέμνειν τὴν αβ εὐθεῖαν παρὰ τὰ α β σημεῖα. αἱ μὲν οὖν ἐνστάσεις αὗται. εἰσὶ δὲ καὶ πτώσεις τῆς τοῦ προβλήματος κατασκευῆς, ἃς δεῖ χωρίζειν ἀπὸ τῶν ἐνστάσεων. οὐ γὰρ ταυτὸν πτῶσις καὶ ἔνστασις, ἀλλ' ἡ μὲν τὸ αὐτὸ δείκνυσιν ἄλλως, ἡ δέ, εἰς ἀτοπίαν ἐπάγει τὸν ἐνστάμενον. οἱ δὲ ἐξηγηταὶ μὴ διακρίνοντες ταῦτα ἀπ' ἀλλήλων πάντα φέρουσιν εἰς τὸ αὐτό, καί εἰσιν ἄδηλοι πότερον πτώσεις ἡμῖν ἢ ἐνστάσεις ἀπαγγέλλονται γράφειν. ἡμεῖς δὲ διελόμενοι χωρίς, μετὰ τὰς ἐνστάσεις ἀπαγγελλόντων γράφειν τὰς πτώσεις συνάγομεν. ἔστω οὖν εὐθεῖα ἄπειρος ἡ βα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ γ. λέγει οὖν τις ὅτι οὐκέτι τόπος ἐπὶ θάτερα τῆς εὐθείας, ἀλλ' ἐφ' ᾧ κεῖται τὸ σημεῖον τὸ δ, κέντρῳ τῷ γ, καὶ διαστήματι τῷ γδ κύκλου περιφέρειαν γραφομένην τῇ δεζ, καὶ τεμνόντων δίχα ἐπὶ τὸ θ τὴν δζ ἐπιζεύξομεν τὰς γδ γθ γζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ δθ τῇ θζ, κοινὴ δὲ ἡ γθ τῇ γδ ἡ γζ ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, αἱ πρὸς τῷ θ ἄρα γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν ἐφεξῆς, ὀρθαὶ ἄρα εἰσί, κάθετος ἄρα ἡ γθ ἐπὶ τὴν δζ. καὶ μήν, καὶ εἴ τις λέγοι τὸν γραφόμενον κύκλον μὴ τέμνειν τὴν αβ εὐθεῖαν, ἀλλ' ἐφάπτεσθαι, ὡς τὸν δε, λαβόντες ἕτερον σημεῖον τὸ ε κέντρῳ τῷ γ γραφόμενοι, καὶ διαστήματι τῷ γε, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ λεχθέντος ἕξομεν τὸ ζητούμενον. τοσαῦτα καὶ περὶ τῶν τοῦ προβλήματος πτώσεων εἰρήσθω γυμνασίας ἕνεκα τῶν ἐντυγχανόντων. εἰ δὲ δεῖ καὶ θεωρίαν προσθεῖναι τοῖς δυσὶ τούτοις προβλήμασιν, ἔοικεν ἡ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀναγομένη μιμεῖσθαι ζωὴν ἐγειρομένην εἰς ὕψος ἀπὸ τῶν χειρόνων, καὶ ἀχράντως ἀνιοῦσαν καὶ μένουσαν ἄκλιτον πρὸς τὰ χείρονα· ἡ δὲ κάθετος ζωῆς μὲν εἰκὼν εἶναι κατιούσης τὴν κάθοδον καὶ τῆς ἐπὶ γένεσιν ἀχράντως οὐκ ἀναπιμπλαμένης· ἡ γὰρ ὀρθὴ γωνία τοῦ ἀκλινοῦς ἐστι, καὶ τῇ ἰσότητι καὶ τῷ ὅρῳ, καὶ τῷ πέρατι συνεχομένης ἐνεργείας σύμβολον. ὅθεν δὴ καὶ ὁ Τίμαιος τὸν θατέρου κύκλον τὸν τοὺς λόγους ἔχοντα τῶν αἰσθητῶν, ἐπὶ τῆς θείας ψυχῆς ὀρθὸν προσείρηκεν. ὑπὸ γὰρ τῶν ἡμετέρων κλᾶται παντοίας κλάσεις, καὶ διαστροφὰς ὑπομένει ποικίλας ἀπὸ τῆς γενέσεως. ἐπὶ δὲ τῶν ὅλων ἀχράντως καὶ ἀρρεπῶς ἵδρυται πρὸ τῶν αἰσθητῶν. ἡ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ἄπειρος σύμβολόν ἐστι τῆς γενέσεως ὅλης, τῆς ἀπείρως καὶ ἀορίστως κινουμένης, καὶ αὐτῆς τῆς ὕλης τῆς μηδένα ὅρον μηδὲ μορφὴν λαχούσης. τὸ δὲ ἔξω κείμενον σημεῖον, τῆς ἀμεροῦς οὐσίας καὶ τῶν ὅλων ἐξῃρημένης εἰκόνα φέρει πάντως πον καὶ ἡ ἀγομένη κάθετος ἀποτυποῖτο ἂν τὴν ἐκ τοῦ ἑνὸς καὶ ἀμεροῦς πρόοδον ζωὴν ἀχράντως εἰς τὴν γένεσιν. εἰ δὲ καὶ οὐκ ἄλλως δείκνυται ὅτι ἡ κάθετος, ἢ ἀπὸ τῶν κύκλων ἔχοι ἂν ἔνδειξιν, καὶ αὐτὸ τῆς διὰ τὸν νοῦν ταῖς ζωαῖς ὑπαρχούσης ἀσφαλείας. αὕτη μὲν οὖν καθ' ἑαυτὴν ἡ ζωὴ ἅτε κίνησις οὖσα ἀόριστός ἐστιν, ὁρίζεται δὲ καὶ ἀχράντου πληροῦται δυνάμεως νοῦ μεταλαβοῦσα, καὶ νῷ συμπροϊοῦσα.

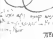
Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθάς, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.) Πάλιν ἐνταῦθα τὰ θεωρήματα μεταβέβηκεν ἑπόμενα τοῖς διὰ τῶν προβλημάτων δεδειγμένοις. ἐπεὶ γὰρ ἦκται κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ πρὸς ὀρθάς, ἑπόμενον ἦν ζητῆσαι εἰ μὴ κάθετος εἴη τίνας ποιήσει γωνίας, ἢ δύο ποιεῖ ὀρθάς, εἰ ἀπήλλακτο αὐτῆς ἡ στάσις ἡ καὶ ἀρρεπὴς ἐφ᾽ ἑκάτερα, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας, εἰ τῇ μὲν ἐπικλίνοιτο, τῇ δὲ πλέον ἀφεστήκοι τῆς ὑποκειμένης εὐθείας. ὅσον γὰρ ἀφαιρεῖ τῆς μιᾶς ὀρθῆς διὰ τὴν ἐπὶ θάτερα κλίσιν, τοσοῦτον προστίθησι τῇ λοιπῇ κατὰ τὴν ἀπόστασιν. δεῖ δὲ ἀφιστάνειν ὅπως καὶ ἐνταῦθα τῇ προτάσει τῆς ἀκριβείας ὁ γεωμέτρης ἐφρόντισεν. οὐ γὰρ ἁπλῶς εἶπεν, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας σταθεῖσα, ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, ἀλλ᾽ ἐὰν γωνίας ποιῇ. τί γὰρ ἐπ᾽ ἄκρας ἱσταμένη τῆς εὐθείας μίαν ποιεῖ γωνίαν, ἣν ἐνδέχεται ταύτην ἴσην εἶναι δύο ὀρθαῖς ἀδύνατον δήπου. πᾶσα γὰρ εὐθύγραμμος γωνία, δύο ὀρθῶν ἐλάσσων ἐστίν, ὥσπερ πᾶσα στερεὰ τεττάρων ὀρθῶν ἐλάσσων. κἂν τὴν ἀμβλυτάτην οὖν δεικνύναι ἂν λαμβάνῃς, αὔξησις καὶ ταύτην, ὡς οὔπω τὸ μέτρον ἀπολαμβάνουσαν τῶν δύο ὀρθῶν. δεῖ τοίνυν οὕτως ἐφιστάναι τὴν εὐθεῖαν, ὥστε γωνίας ποιεῖν. τοῦτο μὲν οὖν ὅπερ ἔφην τῆς ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας. τί δὲ βουλόμενος προστέθηκεν τό, ἢ δύο ὀρθάς, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας, καὶ γὰρ ὅταν ποιῇ δύο ὀρθάς, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. ἑαυταῖς γὰρ ἴσαι αἱ ὀρθαί. ἢ τὸ μὲν ἐστὶ κοινόν, καὶ τῶν ἴσων γωνιῶν, τὸ δὲ ἴδιον τῶν ἴσων μόνων. εἰώθαμεν δὲ ὅτε μὴ καὶ τὸ ἴδιον ἀληθεύῃ καὶ τὸ κοινόν, ἀπὸ τοῦ ἰδίου σημαίνειν ἕκαστον. ὅταν δὲ ἐκείνου μὴ τυγχάνωμεν ἀρκεῖσθαι τῷ κοινῷ πρὸς τὴν δήλωσιν τῶν ὑποκειμένων πραγμάτων. τὸ μὲν οὖν ἴσας ὀρθαῖς εἶναι τὰς ἐφεξῆς, κοινόν ἐστι καὶ τῶν ὀρθῶν, ἀλλ᾽ οὐ μόνον αὐτῶν κατηγορεῖται, τὸ δὲ ὀρθὰς εἶναι, τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἐξαίρετον ὑπάρχει. μόνον δὴ οὖν ἔνθεν, τὸ ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς, τὰς ἀνίσους σημαίνει. ταύταις γὰρ ἐπαληθεύεται μόναις, ταῖς δὲ ἴσαις οὔ. καὶ τοῦτο ὁ στοιχειωτὴς ἀντιδιαιρεῖται ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς. αὐτὸ γοῦν καθ᾽ αὑτὸ τοῦτο λεγόμενον τῶν ἐφ᾽ ἑκάτερα ἀνίσων ἐστὶ σημαντικόν. ἔξεστι γε μὴν καὶ διὰ τούτου συνορᾶν ὅπως ἡ ἰσότης καὶ τῆς ἀνισότητός ἐστι μέτρον καὶ ὅρος. εἰ γὰρ ἀόριστός ἐστι, καὶ ἄπειρος ἡ τῆς ἀμβλείας γωνίας καὶ τῆς ὀξείας μείωσίς τε καὶ αὔξησις, ὅμως περαίνεσθαι καὶ ἀφορίζεσθαι λέγεται παρὰ τῆς ὀρθῆς, καὶ ἑκατέρα μὲν χωρὶς ἀφίσταται, καὶ ἀφίσταται τῆς πρὸς ἐκείνην ὁμοιότητος. ἀμφότεραι δὲ κατὰ μίαν ἕνωσιν ἐπανάγονται πρὸς τὸν ὅρον τὸν ἐκείνης. ἐπειδὴ δὲ πρὸς τὴν ἁπλότητα τῆς ὀρθῆς ἀδυνατοῦσιν ἐξισοῦσθαι, διπλασιαζομένης αὐτῆς, τὴν ἰσότητα καταδέχονται παράδειγμα τῆς ἀπειρίας αὐτῶν, ἡ δυὰς ἀόριστος οὖσα καθ᾽ αὑτήν, καὶ τοῦτο ἐναργῆ φέρειν ἔοικεν εἰκόνα τῶν πρωτουργῶν αἰτίων καὶ καθ᾽ ἕνα ὅρον ἑστώτων ἀεὶ ὡσαύτως πρὸς τὴν ἀπειρίαν τῆς γενέσεως πρόοδον. πῶς γοῦν ἂν ἄλλως ἡ γένεσις ἡ τοῦ μᾶλλον μετέχουσα καὶ ἧττον, καὶ ἀορίστως φερομένη συναρμόζεται τοῖς νοητοῖς, καὶ συνεξισοῦταί πως αὐτοῖς διὰ τῆς μεθέξεως, ἢ ταῖς γονίμοις δυνάμεσιν ἐκείνων προϊόντων, καὶ ἑαυτὰ πολλαπλασιαζόντων μόνον. τὰ γὰρ ἐν τῇ ἑαυτῶν ἁπλότητι καὶ ἀμερείᾳ παντελῶς ἐξῄρηται τῶν γενητῶν. τοσαῦτα καὶ ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος εἰς τὴν τῶν ὅλων γνῶσιν παραληπτέον.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι ἑξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.) Τοῦτο τὸ θεώρημα τοῦ ὑποδειχθέντος ἐστὶν ἀντίστροφον. ἐπειδὴ γοῦν ἀεὶ τὰ ἀντίστροφα τοῖς προηγουμένοις θεωρήμασιν, ἐκείνου τοίνυν συστάντος εὐθεῖαν ἐπ᾽ εὐθείας, καὶ δείξαντος ὅτι τὰς ἐφεξῆς ἢ δύο ὀρθὰς ποιεῖ, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, τοῦτο λαμβάνει μὲν πρὸς εὐθείᾳ τινὶ δύο γιγνομένας ὀρθάς, δείκνυσι δὲ ὅτι μία ἐστὶν εὐθεῖα, ἡ ταῦτα ποιοῦσα, πρὸς τῇ εἰρημένῃ εὐθείᾳ, τὸ τοίνυν ἐν ἐκείνῳ δεδομένον ἐν τούτῳ ζητεῖται, καὶ δείκνυται διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. οὕτω γὰρ φιλεῖ τὰ ἀντίστροφα δείκνυσθαι τῶν θεωρημάτων, ἐν δὲ τοῖς προβλήμασι καὶ προηγουμένας δείκνυσθαι τὰς κατασκευάς. ἔξεστι δὲ κἂν τούτῳ τὴν ἀκροτάτην ἀκρίβειαν καὶ ἀνυπέρβλητον τῆς ἐπιστημονικῆς ἑρμηνείας ὁρᾶν. πρῶτον μὲν γοῦν εἰπών, ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ προστίθησι, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ. τί γὰρ εἰ δύο περάτων ὄντων τῆς εὐθείας, ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἤχθη, ἡ δέ, ἀπὸ τοῦ λοιποῦ, καὶ δύο ἐποίουν ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ εὐθείᾳ γωνίας, ἆρα διὰ τοῦτο ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι ἠδύναντο. καὶ πῶς αἱ ἀπὸ διαφόρων τῆς

ρων τῆς αὐτῆς εὐθείας ἠγμένας σημείων, διὰ δὴ τοῦτο προστέθεικε τό, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, ἀμφοτέρας πρὸς ἑνὶ σημείῳ κεῖσθαι βουλόμενος. δεύτερον δέ, ἐπειδὴ καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ τῆς εὐθείας ὄντι σημείῳ τὰς ἀγομένας εἶναι δυνατὸν ἦν, καὶ μὴ οὔσας ἐφεξῆς, μυρίας γὰρ εὐθείας πρὸς ἑνὶ σημείῳ λαβεῖν ἐνδέχεται, προστέθεικε δύο εὐθεῖαι ἑξῆς. τρίτον δὲ τὸ ἑξῆς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐφ' ἑκάτερα θεωρεῖται. τὰς δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κειμένας ἑξῆς ἐπ' εὐθείας ἀλλήλαις ἀδύνατον εἶναι, τοῦτο μὲν ἀπέφηνε. παρέχει δὲ ἡμῖν ἐννοεῖν ὅτι ἐφ' ἑκάτερα ληπτέον τῇ θέσει τὰς ἐφεξῆς. αὗται γὰρ ληφθήσονται, καὶ ἐπ' εὐθείας δείκνυνται. ἔστωσαν πρὸς τῇ αβ εὐθείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αἱ βγ βδ. αὗται τοίνυν ἑξῆς μέν εἰσιν ἀλλήλαις. οὐδεμία γὰρ αὐτῶν οὐκ ἔστιν εὐθεῖα μεταξύ, ταῦτα δὲ ἦν ἐφεξῆς, ὧν μηδέν ἐστιν ὅμοιον μεταξύ. καὶ γὰρ κίονας τούτους ἐφεξῆς λέγομεν, ὧν μή ἐστιν ἄλλος κίων ἐν μέσῳ. καίτοι γε ἀὴρ ἐστὶ πάντως μέσος, ἀλλ' οὐδὲν ὁμογενὲς μεταξύ. διὰ δὴ οὖν τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κεῖσθαι, τὸ ἐπ' εὐθείας οὐκ ἔχουσιν, εἰ καὶ δύο ποιοῦσι γωνίας ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ αβ γωνίᾳ. κωλύει γὰρ οὐδὲν μιᾶς μὲν εἶναι, καὶ τρίτου τὴν ὑπὸ αβδ, τοῦ δὲ λοιποῦ διμοίρου τὴν ὑπὸ αβγ τοσαῦτα περὶ τῆς προτάσεως. ἐν δὲ τῇ κατασκευῇ χρῆται ἑνὶ αἰτήματι τῷ δευτέρῳ, τῷ πᾶσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν ἀξιουμένῳ, καθάπερ ἐν τῇ ἀποδείξει τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι. καὶ δυσὶν ἀξιώμασιν τῷ τε τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα, καὶ τῷ ἐὰν ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ λοιπὰ ἐστὶν ἴσα. πρὸς δὲ τὴν τοῦ ἀδυνάτου συναγωγήν, ὅτι τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν. ἦν δὲ καὶ ἴσον μιᾶς τῆς κοινῆς γωνίας ἀφῃρημένης, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὅτι δὲ ἄρα δυνατὸν πρὸς τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθείας ἑξῆς κειμένας, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέν τοι μέρη, δύο ποιεῖν ὀρθαῖς ἴσας τὰς πρὸς τῇ μιᾷ εὐθείᾳ γωνίας, δείξομεν οὕτως ὥσπερ Πορφύριος. ἔστω τις εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ σημεῖον τυχὸν ἐπ' αὐτῆς τὸ γ, καὶ τῇ αβ ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ δγβ τῇ γε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε κάθετος ἡ εβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γβ, καὶ κείσθω τῇ εβ ἴση ἡ βζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ εβ τῇ βζ, κοινὴ δὲ ἐστὶν ἡ βγ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ὀρθαὶ γάρ εἰσιν. βάσις ἄρα ἡ εγ βάσει τῇ γζ ἴση, καὶ πάντα δὴ πᾶσιν, ἡ ἄρα ὑπὸ εγβ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζγβ, ἡμίσεια δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ εγβ. δίχα γὰρ τέμνεται ὀρθὴ ἡ εγζ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστι. καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ δγζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δγε ἡμίσεια ὀρθῆς. πρὸς τῇ γδ ἄρα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ, δύο εὐθεῖαι ἑξῆς κεῖνται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, αἱ γε γζ ποιοῦσαι δύο ὀρθαῖς ἴσας γωνίας, ἡμίσειαν μὲν ἡ γε, μίαν δὲ καὶ ἡμίσειαν ἡ γζ. ἵνα οὖν μὴ ζητῶμεν ἀδύνατον πῶς αἱ γε γζ ποιοῦσαι τὰς πρὸς τῇ δγ γωνίας, δύο ὀρθαῖς ἴσας, ἀλλήλαις εἰσὶν ἐπ' εὐθείας, καθ' ἧς τὰς ποιούσας πρὸς αὐτὴν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας τὰς γωνίας ἀφ' ἑνὸς μὲν ὡρισμένας σημείου, φερομένας δὲ τὴν μὲν ἐπὶ τάδε, τὴν δὲ ἐπ' ἐκεῖνα τῆς εὐθείας.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσι.) Τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τῶν κατὰ κορυφὴν διαφέρειν φαμέν. τῶν μὲν γὰρ ἡ γένεσις κατὰ τὴν τομὴν γίγνεται τῶν δύο εὐθειῶν, τῶν δὲ τῆς ἑτέρας μόνον περὶ τὴν ἑτέραν διαιρουμένης. ἐὰν γὰρ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ μὲν ἄτμητος, τέμνουσα δὲ τῷ ἑαυτῆς πέρατι ἐκείνην, δύο ποιεῖ γωνίας, ταύτας καλοῦμεν ἐφεξῆς, ἐὰν δὲ ὑπ' ἀλλήλων τμηθῶσι δύο εὐθεῖαι, κατὰ κορυφὴν ἀποτελοῦνται γωνίαι. καλοῦνται δὲ οὕτως ὅτι τὰς κορυφὰς εἰς ταὐτὸ συμβαλλούσας ἔχουσι σημεῖον. κορυφαὶ δὲ αὐτῶν τὰ σημεῖα, πρὸς ἃ συναγόμενα τὰ ἐπίπεδα, τὰς γωνίας ποιεῖ. τοῦτο τοίνυν τὸ θεώρημα, δείκνυσιν ὅτι δύο εὐθειῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εὑρημένον μὲν ὥς φησιν Εὔδημος ὑπὸ Θαλοῦ πρώτου. τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως ἠξιωμένον παρὰ τῷ στοιχειωτῇ. δείκνυται δὲ οὐκ ἐκ πάντων τῶν κεφαλαίων. ἡ μὲν γὰρ κατασκευὴ, ἐκλέλοιπεν ἐνταῦθα. ἡ δὲ ἀπόδειξις ἦν πάντως ἀναγκαῖον ὑπάρχειν, εἴρηται τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματος. προσχρῆται καὶ ἀξιώμασι δυσίν, ὧν τὸ μέν ἐστι, τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα, τὸ δὲ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν Εὐκλείδειον θεώρημα φανερόν, ἀντιστρέφει δὲ τῷ θεωρήματι ἄλλο τοιοῦτον. ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ληφθεῖσαι, ποιῶσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας, ἐπ' εὐθείας ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ἔστω γάρ τις εὐθεῖα, ἡ αβ, καὶ ἐπ' αὐτῆς

τυχὸν σημεῖον τὸ γ, καὶ πρὸς αὐτῷ τῷ γ δύο εὐθεῖαι αἱ γδ, γε. ἐπεὶ γὰρ ἡ γδ ἐπὶ τὴν αβ ἐφέστηκεν δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, τὰς ὑπὸ δγα, δγβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δγα, ἴση ἐστὶ, τῇ ὑπὸ βγε, αἱ ἄρα ὑπὸ δγε δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ οὖν πρός τινι εὐθείᾳ τῇ βγ δύο εὐθεῖαι ἑξῆς, αἱ γδ, γε, οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἀλλήλαις, αἱ γδ, γε. δέδεικται οὖν τὸ ἀντίστροφον τῷ προκειμένῳ θεωρήματι. ἔοικεν δὲ ὁ γεωμέτρης αὐτὸ παραλιπεῖν, ὡς ῥᾴδιον κατὰ τὴν αὐτὴν ἔφοδον, διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς δεικνῦσθαι, καὶ ὥσπερ, καθ' ἣν τὸ πρὸ αὐτοῦ δεδείχαμεν. τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων, λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ γδ, τῇ γε. εἰ γὰρ μή ἐστιν εἰλήφθω τῇ γδ ἐπ' εὐθείας ἡ γζ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας, ἡ αβ, καὶ δζ, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ποιοῦσιν ἴσας, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ αγδ, βγζ, ἀλλ' ἦσαν ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ αγδ, βγε, ἡ ἄρα ὑπὸ βγε, ἴση τῇ ὑπὸ βγζ ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἐστὶν εὐθεῖα τῇ γδ ἐπ' εὐθείας, αἱ ἄρα γδ, γε ἐπ' εὐθείας εἰσὶ τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν ἴσων τῶν ὑποκειμένων. τῆς οὖν αὐτῆς ἀποδείξεως οὔσης ἥτις ἐπὶ τοῦ τρισκαιδεκάτου θεωρήματος προείληπται, πῶς οὐ περίεργον ἦν ταύτην ἐπάγειν τὴν ἀντιστροφήν; γυμνασίας δὲ ἕνεκα, καὶ διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς αὐτὸ, καὶ διὰ τῆς δεικτικῆς ἐφόδου κατασκευάσαμεν. ἔοικεν δὲ ὥσπερ τὸ τρισκαιδέκατον θεώρημα, τῇ ὁμοιομερείᾳ τῶν εὐθειῶν, καὶ τῇ ἐπ' ἄκρον τάσει θαρρεῖν. διότι τὰς οὕτως ἐχούσας γραμμὰς καὶ φερομένας δι' ἀλλήλων ἀναγκαῖον ὁμοίας ἔχειν τὰς κλίσεις πρὸς ἀλλήλας ἐφ' ἑκάτερα καὶ πρὸς αὐτάς. αἱ γοῦν περιφέρειαι καὶ ὅλως αἱ μὴ εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας οὐ ποιοῦσιν ἐξ ἀνάγκης ἴσας, ἀλλὰ ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους. ἐὰν γὰρ δύο ἴσοι κύκλοι διὰ τῶν κέντρων τέμνωσιν ἀλλήλους, ἢ καὶ μὴ διὰ τῶν κέντρων, τὰς μηνοειδεῖς γωνίας ἴσας ποιοῦσι κατὰ κορυφὴν οὔσας, ἀλλ' οὐκέτι τὰς λοιπάς, τήν τε ἀμφικυρτον, καὶ τὴν ἀμφίκοιλον, ἀλλὰ μείζω τὴν ἑτέραν. ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν, ἡ ἐπ' ἄκρον τάσις ἴσων τῶν ἑτέρας τμημάτων, πρὸς τὰς τῶν ἑτέρας τμήματα ποιεῖ τὴν ἀπόστασιν. ἐκ δὴ τούτων φανερὸν ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὰς τέτταρας γωνίας, τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἔστι τῶν γεωμετρικῶν ἐστὶν ὀνομάτων τὸ πόρισμα. ὥσπερ σημαίνει



Περὶ πορισμάτ.

διττόν. καλοῦσι γὰρ πορίσματα, καὶ ὅσα θεωρήματα συγκατασκευάζεται ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, οἷον ἕρμαια καὶ κέρδη τῶν ζητούντων ὑπάρχοντα, καὶ ὅσα ζητεῖται μὲν, εὑρέσεως δὲ χρήζει, καὶ οὔτε γενέσεως μόνης, οὔτε θεωρίας ἁπλῆς. ὅτι μὲν γὰρ τῶν ἰσοσκελῶν αἱ πρὸς τῇ βάσει ἴσαι, θεωρῆσαι δεῖ, καὶ οὕτως δὴ τῶν πραγμάτων ἐστὶν ἡ τοιαύτη γνῶσις, τὴν δὲ γωνίαν δίχα τεμεῖν ἢ τρίγωνον συστήσασθαι, ἢ ἀφελεῖν ἢ θέσθαι, ταῦτα πάντα ποίησίν τινος ἀπαιτεῖ, τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν, ἢ δύο δοθέντων συμμέτρων μεγεθῶν, τὸ μέγιστον καὶ κοινὸν μέτρον εὑρεῖν, ἢ ὅσα τοιάδε μεταξύ πώς ἐστι προβλημάτων καὶ θεωρημάτων. οὔτε γὰρ γενέσεις εἰσὶν ἐν τούτοις τῶν ζητουμένων, ἀλλ' εὑρέσεις, οὔτε θεωρία ψιλή. δεῖ γὰρ ὑπ' ὄψιν ἀγαγεῖν καὶ πρὸ ὀμμάτων ποιήσασθαι τὸ ζητούμενον. τοιαῦτα ἄρα ἐστὶ καὶ ὅσα πορίσματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημάτων συντάξας. ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων πορισμάτων, παρείσθω λέγειν. τὰ δὲ ἐν τῇ στοιχειώσει πορίσματα, συναναφαίνεται μὲν ταῖς ἄλλων ἀποδείξεσιν, αὐτὰ δὲ προηγουμένης τυγχάνει ζητήσεως. οἷον καὶ τὸ νῦν προκείμενον. ἐζητεῖτο μὲν γὰρ δύο εὐθειῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας, αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι εἰσί. τούτῳ δὲ δεικνυμένῳ συναποδείκνυται, τὸ καὶ τὰς τέτταρας γωνίας εἶναι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας. ὅτε γὰρ ἐλέγομεν ἔστωσαν εὐθεῖαι δύο αἱ αβ, γδ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. ἐπεὶ οὖν ἡ αε ἐπὶ τῇ γδ ἐφέστηκεν, ποιεῖ τὰς ἐφεξῆς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, τό τε συναποδείκνυμεν τῷ ζητουμένῳ, ὅτι αἱ περὶ τὸ ε σημεῖον γωνίαι, τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἔστιν οὖν τὸ πόρισμα, θεώρημα διὰ τοῦ ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἀποδείξεως, ἀπραγματεύτως ἀναφαινόμενον. οἷον γὰρ κατὰ τύχην περιπίπτειν ἐοίκαμεν τοῖς πορίσμασιν. οὐ γὰρ προτεθειμένοις οὐδὲ ζητήσασιν ἀπαντᾷ. ὅθεν αὐτὰ καὶ τοῖς ἑρμαίοις εἰκάσαμεν. καὶ ἴσως οἱ δεινοὶ τὰ μαθηματικά, κατὰ ταύτην αὐτοῖς ἔθεντο τὴν ἐπωνυμίαν, ἐνδεικνύμενοι τοῖς πολλοῖς καὶ ἐπὶ τὸ φαινόμενον κέρδος ἐπτοημένοις, ὅτι ἄρα τὰ ἀληθῆ θεοῦ δῶρα καὶ τὰ ἕρμαια ταῦτά ἐστιν, οὐχ οἷα ἐκείνοις δοκεῖ. ταῦτα γὰρ ὁ ἐν ἡμῖν πόρος ἀπογεννᾷ, καὶ ἡγούμενος δύναμις τῆς ἐπιστήμης προσβάλλει ταῖς προηγουμέναις ζητήσεσιν εὐπορίας ἀφθόνους θεωρή-

θεωρημάτων ἀναφαίνεται. ἡ μὲν οὖν ἰδιότης τῶν πορισμάτων, τοιαύτα ἐστὶν λεκτέον. διαι-
ρετέον δὲ αὐτὰ πρῶτον μὲν κατὰ τὰς ἐπιστήμας. ἔστι γὰρ τὰ μὲν γεωμετρικά, τὰ δὲ, ἀριθμητικὰ
τῶν πορισμάτων. τὸ μὲν γὰρ προκείμενον πόρισμα γεωμετρικόν ἐστι. τὸ δὲ ἐπὶ τέλει τοῦ δευ-
τέρου θεωρήματος τοῦ ἑβδόμου βιβλίου τῶν ἀριθμητικῶν. ἔπειτα δὲ κατὰ τὰ προηγούμενα ζητή-
ματα, τὰ μὲν, προβλήμασιν ἕπεται, τὰ δέ, θεωρήμασι. τοῦτο μὲν γὰρ θεωρήματός ἐστι, τὸ δ᾽ ἐν
τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ κείμενον προβλήματος. τρίτον δὲ αὖ κατὰ τὰς δείξεις. τὰ μὲν γὰρ ταῖς
δεικτικαῖς ἐφόδοις, τὰ δέ, ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαῖς συγκατασκευάζεται. τὸ μὲν προ-
κείμενον τῇ ἐπ᾽ εὐθείας δείξει, τὸ δὲ ἐν τῷ πρώτῳ τοῦ τρίτου βιβλίου συναποδεδειγμένον τῇ
εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῇ συναναφαίνεται. πολλαχῶς δὲ καὶ ἄλλως τὰ πορίσματα διαιρεῖν δυ-
νατόν, ἀλλ᾽ ἡμῖν γε ἀρκέσει καὶ ταῦτα πρὸς τὸ παρόν. τοῦτο δὲ τὸ πόρισμα, περὶ οὗ πρόκει-
ται λέγειν, διδάσκει ἡμᾶς, ὅτι ὁ περὶ ἓν σημεῖον τόπος εἰς τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσας γωνίας δια-
νέμεται, παρέχει ἀφορμὴν κἀκείνῳ τῷ παραδόξῳ θεωρήματι, τῷ δεικνύντι μόνα τρία ταῦ-
τα πολύγωνα πληρούμενα τὸν περὶ ἓν σημεῖον ὅλον τόπον, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τε-
τράγωνον, καὶ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ἑξάγωνον τὸ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. ἀλλὰ τὸ μὲν ἰσό-
πλευρον τρίγωνον ἑξάκις παραληφθέν, ἓξ γὰρ δίμοιρα, ποιήσει τὰς τέτταρας ὀρθάς. τὸ δὲ
ἑξάγωνον τρὶς γενόμενον, ἑκάστη γὰρ ἑξαγωνικὴ γωνία, ἴση ἐστὶ μιᾷ ὀρθῇ καὶ τρίτῳ. τὸ δὲ
τετράγωνον τετράκις. ἑκάστη γὰρ τετραγωνικὴ γωνία, ὀρθή ἐστιν. ἓξ οὖν ἰσόπλευρα τρίγω-
να συντεθέντα κατὰ τὰς γωνίας, τὰς τέσσαρας ὀρθὰς συμπληροῖ, καὶ τρία ἑξάγωνα καὶ
τετράγωνα τέσσαρα. καὶ ἕκαστον δὲ τῶν ἄλλων πολυγώνων ὁποσωνοῦν συντιθέμενον κατὰ
τὰς γωνίας, ἢ ἐλλείπει τῶν τεσσάρων ὀρθῶν ἢ πλεονάζει. μόνα δὲ ταῦτα κατὰ τοὺς εἰρημένους ἀ-
ριθμοὺς ἐξισοῦνται ταῖς τέτταρσιν ὀρθαῖς. καὶ ἔστι τὸ θεώρημα τοῦτο πυθαγόρειον. διὰ τοῦτο δὲ
τὸ πόρισμα κἂν πλείους εὐθεῖαι, τῶν δυοῖν διὰ ἑνὸς σημείου τέμνωσιν ἀλλήλας, οἷον, τρεῖς ἢ
τέτταρες ἢ ὁποσαιοῦν, αἱ γινόμεναι γωνίαι πᾶσαι τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι δείκνυνται. μερί-
ζονται γὰρ τὸν τῶν τεσσάρων τόπον. δῆλον δὲ ὅτι διπλάσιαι ἀεὶ γίνονται τῶν εὐθειῶν αἱ
γωνίαι. καὶ οὕτω δύο μὲν εὐθειῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας ἔσονται γωνίαι, τέσσαρες ἴσαι, τέσ-
σαρσιν ὀρθαῖς, τριῶν δὲ ἓξ γωνίαι, τεσσάρων δὲ ὀκτώ, καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον ὁμοίως. ἀεὶ γὰρ διπλα-
σιάζεται μὲν τὸ πλῆθος τῶν εὐθειῶν, αἱ δὲ γωνίαι, κατὰ μὲν τὸ πλῆθος αὔξονται, κατὰ δὲ τὸ μέγε-
θος, ἐλαττοῦνται. διότι τὸ διαιρούμενον ἀεὶ ταὐτόν ἐστιν αἱ τέσσαρες ὀρθαί.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.) Ταύτην τὴν πρότασιν
οἱ μὲν ἐλλιπῶς προσφερόμενοι χωρὶς τοῦ μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης ἀφορμὴν παρέ-
σχον, ἴσως μὲν καὶ ἄλλοις τισίν, αὐτὰρ καὶ Φιλίππῳ καθάπερ φησὶν ὁ μηχανικὸς Ἥρων διαβο-
λῆς. οὐ γὰρ πάντως ἡ τρίγωνόν ἐστι, καὶ ἐκτὸς ἔχει γωνίαν. ὅσοι δὲ περιγράφειν τὴν αἰτίασιν
ταύτην ἠθέλησαν μετὰ τῆς εἰρημένης προσθήκης ταύτην παραδεδώκασι, συνήθους οὔσης τῷ
γεωμέτρῃ. καὶ γὰρ ἐν τῷ πέμπτῳ θεωρήματι τὰς ὑπὸ τὴν βάσιν τῶν ἰσοσκελῶν γωνίας ἀ-
ποδεῖξαι βουλόμενος, προσέθηκεν, ὅτι καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βά-
σιν γωνίαι ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰ ἐν ἄλλοις οὖν ἐλλιπὴς ἦν, ἀλλὰ παρὰ τῷ στοιχειωτῇ τὸ πλῆρες ἔχου-
σα γέγραπται. τί δὴ οὖν φησὶν ἡ πρότασις ὅτι παντὸς τριγώνου εἰ μίαν τινὰ τῶν πλευρῶν
προσεκβάλλοις τὴν ἐκτὸς αὐτοῦ συνισταμένην γωνίαν εὑρήσεις, μείζονα τῶν ἐντὸς καὶ ἀπε-
ναντίον ἑκατέρας. ἀμφοτέραις μὲν γὰρ ἴση δειχθήσεται μικρὸν ὕστερον, ἑκατέρας δὲ μείζων
ἐκ τούτου δείκνυται. καὶ ἀναγκαίως πρὸς τὰς ἀπεναντίον αὐτὴν συνέκρινεν, ἀλλ᾽ οὐ πρὸς
τὴν ἐφεξῆς. αὕτη μὲν γὰρ καὶ ἴση δύναται εἶναι καὶ ἐλάσσων αὐτῆς. ἐκείνη δὲ, ἑκατέρας μεί-
ζων ἐκ παντός. ἐὰν οὖν ὀρθογώνιον ᾖ τὸ τρίγωνον, καὶ νοήσῃς μίαν ἐκβαλλομένην τῶν περὶ τὴν
ὀρθήν, ἡ ἐκτὸς ἴση ἔσται τῇ ἐφεξῆς. ἐὰν δ᾽ ἀμβλυγώνιον ᾖ, ἔσται δυνατὸν τὴν ἐντὸς μείζονα εἶναι
τῆς ἐκτός. ἀλλὰ πρὸς τὰς ἀπεναντίον. τῶν γὰρ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου μία μέν ἐστιν ἐφεξῆς αὐ-
τῇ, δύο δὲ ἀπεναντίον. τούτων οὖν ἑκατέρας μείζων ἡ ἐκτὸς ἀλλ᾽ οὐ τῆς ἐφεξῆς αὐτῇ κειμέ-
νης. ἤδη δέ τινες συνάπτοντες τὰ δύο θεωρήματα, τό, τε παρὸν καὶ τὸ ἑξῆς ἀποδεικνύ-
μενον, οὕτω προφέρονται τὴν πρότασιν, παντὸς τριγώνου μιᾶς προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου
γωνία

γωνίας ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων δεῖ, καὶ δύο ὁποιαιοῦν τῶν ἐντὸς γωνιῶν
δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἔχουσι δὲ ἀφορμὴν τῆς συμπλοκῆς τῶν θεωρημάτων. ἐπειδὴ δὲ αὐ-
τὸς ὁ γεωμέτρης ἑξῆς ἐπὶ τῶν ἴσων οὕτως ἐποίησεν, παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία δύο ταῖς
ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση. καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. κἂν τοῦθ᾽ ἑ-
τοίμως ἀξιοῦσιν ἐν τοῖς ὁμοίοις συμπλέκειν τὰ ζητούμενα καὶ ποιεῖν τὴν πρότασιν σύνθετον.
καὶ δῆλον ὅτι τὸ μὲν προκείμενον εἰς ἀπόδειξιν ἔσται σύνθετον. τὸ δὲ δεδειγμένον εἰ μὴ μετὰ
τῆς εἰρημένης προσθήκης ἐκφέροιτο καὶ αὐτὸ σύνθετον, δεῖ γὰρ δύο νοεῖν τρίγωνον ὑποκεί-
μενον καὶ μίαν πλευρὰν ἐκβεβλημένην, εἰ δὲ ἐν ταύτῃ, δυνάμει μὲν σύνθετον, κατ᾽ ἐνέργειαν
δὲ ἁπλοῦν. πάντως γὰρ δεῖ συμπαραλαμβάνειν καὶ τοῦτο ὡς δεδειγμένον. αὐτὸ γὰρ τὸ τὴν ἐκτὸς
ὑποθέσθαι γωνίαν ὡς οὖσαν τῆς πλευρὰν ἐκβεβλημένην προείληφε. τοσαῦτα περὶ τούτων.
λάβωμεν δ᾽ αὖ ἀπὸ τοῦ προκειμένου θεωρήματος ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τρεῖς εὐθείας ἴσας
ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν προσπίπτειν ἀδύνατον. ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς σημείου τρεῖς αἱ αβ αγ
αδ ἴσαι ἐπὶ τὴν βδ εὐθεῖαν ἠγμέναι. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αβ τῇ αγ, ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῇ βάσει
γωνίαι. ἡ ἄρα ὑπὸ αβδ ἴση τῇ ὑπὸ αγδ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ αγ τῇ αδ, ἴση ἡ ὑπὸ αγ τῇ
ὑπὸ αδβ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου
τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀχθήσονται. διὰ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἐκεῖνο ἀπο-
δείξομεν. ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην ποιῇ τῇ ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον οὐ ποιήσουσι τρίγωνον αἱ εὐθεῖαι, οὐδὲ συμπεσοῦνται. ἐπεὶ ἔσται αὕτη καὶ μεί-
ζων καὶ ἴση ὅπερ ἀδύνατον οἷον, ἔστωσαν αἱ αβ γδ εὐθεῖαι, καὶ εἰς αὐτὰς ἡ βε ἐμπίπτουσα
ποιείτω ἴσας τὰς ὑπὸ αβε γδε, οὐ συμπεσοῦνται δὴ αἱ αβ γδ. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται μενου-
σῶν τῶν ἴσων γωνιῶν, ἔσται ἡ ὑπὸ γδε τῇ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐκτὸς οὖσα, καὶ μείζων τῆς ἐντὸς καὶ
ἀπεναντίον. ἀνάγκη ἄρα οὐ συμπίπτουσι, μηκέτι μενούσας ἴσας τὰς γωνίας, ἀλλ᾽ ἐκ παντὸς αὐ-
ξεσθαι τὴν πρὸς τῷ δ. εἴτε γὰρ μενούσης ἀκινήτου τῆς αβ νοήσεις κινουμένην ἐπ᾽ αὐτὴν τὴν γδ,
ἵνα συμπίπτωσι, πλείονα ποιήσεις διάστασιν τῆς γδ γωνίαν, ὅσῳ γὰρ πρόσεισιν ἡ γδ τῇ αβ,
τοσοῦτον μᾶλλον ἀφίσταται τῆς δε. εἴτε καὶ ἄμφω κινουμένας ποιήσεις πρὸς ἀλλήλας, τὴν μὲν
αβ εὑρήσεις, ὡς ἐπὶ τὴν αδ φερομένην, καὶ συνάγουσαν τὴν γωνίαν, τὴν δὲ γδ τῆς δε ἀφι-
σταμένην, διὰ τὴν ἐπὶ τὴν αβ κίνησιν, καὶ αὔξουσαν τὴν ὑπὸ γδε γωνίαν. ἐξ ἀνάγκης ἄρα εἴ
γε τρίγωνον ἔσται καὶ συμπεσοῦνται αἱ αβ γδ, καὶ μείζων ἡ ἐκτὸς ἔσται γωνία, τῆς ἐντὸς, καὶ
ἀπεναντίον. ἢ γὰρ τῆς ἐντὸς μενούσης αὔξεται ἡ ἐκτός, ἢ εἰ καὶ ἡ ἐντὸς συνάγεται, καὶ ἡ ἐκ-
τὸς ἐπὶ πλέον διΐσταται. αἰτία δὲ τούτων ἡ κίνησις τῶν εὐθειῶν, τῆς μὲν ἐφ᾽ ἃ ποιεῖ τὴν ἐντὸς
γωνίαν ἀπὸ τούτων φερομένης. καὶ ἔχεις ἐκ τούτου συλλογίζεσθαι πῶς αἱ γενέσεις τῶν πραγμά-
των ὑπ᾽ ὄψιν ἡμῖν τὰς ἀληθινὰς ἄγουσι τῶν ζητουμένων αἰτίας.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμ-
βανόμεναι.) Νῦν μὲν ἀορίστως δείκνυσιν ὁποιασοῦν τοῦ τριγώνου γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάτ-
τονας, ἐν δὲ τοῖς ἐφεξῆς, καὶ ἀφορισθήσεται πόσῳ ἐλάττους, ὅτι τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου γω-
νίᾳ, αἱ τρεῖς ἴσαι ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς εἰσίν, ὥστε αἱ δύο τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου γωνίᾳ. αἱ
γὰρ τρεῖς ἴσαι ταῖς δυσὶν ὀρθαῖς εἰσίν, ὥστε αἱ δύο τῇ λοιπῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλαττοῦνται.
καὶ ἡ μὲν τοῦ στοιχειωτοῦ λέξις, φανερὰν ἔχει τὴν ὁδόν. χρῆται γὰρ τῷ πρὸ τούτου θεωρή-
ματι. δεῖ δὲ καθάπερ ἐν τοῖς πρόσθεν εἰς τὴν γένεσιν ἀπιδόντα τῶν τριγώνων τὴν αἰτίαν
εὑρεῖν, τοῦ προκειμένου συμπτώματος. ἔστωσαν οὖν αἱ αβ πάλιν, καὶ γδ τῇ βδ πρὸς
ὀρθάς. εἰ οὖν μέλλοι τρίγωνον ἔσεσθαι δεῖ συννεῦσαι τὰς αβ γδ πρὸς ἀλλήλας. ἡ δὲ σύν-
νευσις αὐτῶν ἐλαττοῖ τὰς ἐντὸς γωνίας, ὥστε ἐλάττους γίγνονται δυοῖν ὀρθῶν. εἰσὶ γὰρ
ὀρθαὶ πρὸ τῆς συννεύσεως. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆς αβ αδ νοήσωμεν ἑστώσας ὀρθάς, τὰ αὐ-
τὰ συμβήσεται κατὰ τὴν σύννευσιν τῶν εὐθειῶν, καὶ ἔσονται αἱ πρὸς τῇ αβ γωνίαι δύο
ὀρθῶν ἐλάσσονες, καὶ ἐπὶ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς ὡσαύτως. τοῦτο οὖν τὸ αἴτιον ἐστίν, ἀλλ᾽ οὐχὶ
τὸ μείζονα εἶναι τὴν ἐκτὸς ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν. ἐκβεβλῆσθαι μὲν
γὰρ τὴν πλευρὰν, οὐκ ἀναγκαῖον, οὐδὲ ἔξω τινὰ συστῆναι γωνίαν. τῶν δὲ ἐντὸς γωνιῶν δύο
ὁποιασοῦν εἶναι ὀρθῶν ἐλάττους ἀναγκαῖον. τὸ δὲ μὴ ἀναγκαῖον τοῦ ἀναγκαίου πῶς αἴ-

τιον

τίου ἂν εἴη, ὅλας ἦπερ εἶπον, τὸ μὲν αἴτιον ἐστὶ τὸ ῥηθὲν ἡ σύννευσις τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τὴν βάσιν ἐλαττόνων τὰς ὀρθάς. τοῦ δὲ στοιχειωτοῦ διὰ τῆς ἐκτὸς γωνίας δείξαντος τὸ ζητούμενον, φέρε καὶ προσεκβάλλοντες τινὰ τῶν πλευρῶν, τὸ αὐτὸ κατασκευάσωμεν. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς βγ τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αβδ μία προσεκβέβληται ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αδγ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ αβδ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αδγ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ γδ, ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αδβ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς τῆς ὑπὸ αγδ. ἀλλὰ μὴν αἱ πρὸς τὴν αδ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, διὰ τὸ δεκατρίτον, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ αγβ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους. ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, καὶ βγα γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάττους, ἐπὶ τῆς αγ σημεῖον λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ β ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον, καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ γαβ αβγ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους ἀποφανοῦμεν ἐπὶ τῆς αβ σημεῖον λαβόντες καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ γ εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ σημεῖον. δέδεικται ἄρα τὸ προκείμενον διὰ τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος μὴ προσεκβληθείσης τινος τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. διὰ τούτου τοίνυν δυνατὸν κἀκεῖνο δεικνύναι, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν δύο κάθετοι οὐκ ἀναχθήσονται. ἔστωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου ἐπὶ τὴν βγ δύο κάθετοι αἱ αβ αγ. ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ αβγ αγβ γωνίαι. ἀλλ' ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ αβγ, δύο αἱ τοιαῦται γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσους εἰσίν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς διὰ τὰς καθέτους ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἀχθήσονται.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.) ιη

Ὅτι μὲν ἡ τῶν πλευρῶν ἰσότης ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων ἴσας ἀποτελεῖ τὰς ὑπὸ τούτων ὑποτεινομένας γωνίας, καὶ ἡ τῶν γωνιῶν ἰσότης ὡσαύτως τὰς ὑποτεινούσας αὐτὰς πλευρὰς ἴσας ἀποφαίνει, μεμαθήκαμεν διὰ τοῦ πέμπτου καὶ ἕκτου θεωρήματος. ὅτι δὲ καὶ ταῖς ἀνισότησι τῶν πλευρῶν ἡ τῶν ὑποτεινομένων γωνιῶν ἀνισότης ἀκολουθεῖ, καὶ ἀνάπαλιν διὰ τούτων διδασκόμεθα τῶν θεωρημάτων τοῦ τε ιη λέγω, καὶ τοῦ ιθ. τὸ μὲν γὰρ δείκνυσι τὴν μείζονα γωνίαν ὑπὸ τὴν μείζονα πλευρὰν, τὸ δὲ, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, τὴν μείζονα πλευράν. ἀντιστρέφοντα μὲν ἀλλήλοις. ἐπὶ δὲ τῶν ἐναντίων πραγμάτων τὰ αὐτὰ θεωροῦντα συμπτώματα, τῷ τε πέμπτῳ καὶ τῷ ἕκτῳ θεωρήματι. φανερὸν δὲ ὅτι τὴν μείζονα καὶ τὴν ἐλάσσονα πλευρὰν, ἀνάλογον ληψόμεθα, καὶ διαιρήσομεν τῇ μεγίστῃ καὶ μέσῃ καὶ ἐλαχίστῃ, καὶ τὰς γωνίας ὡσαύτως ἐπὶ τῶν σκαληνῶν τριγώνων. ἐπὶ δὲ τῶν ἰσοσκελῶν ἀρκέσει τὸ μεῖζον ἁπλῶς καὶ ἔλασσον. μία γάρ ἐστιν ἡ ταῖς δυσὶν ἄνισος, ἤτοι μείζων οὖσα, ἢ ἐλάττων, ὡς ἐπί γε τῶν ἰσοπλεύρων, οὐκ ἔχει ταῦτα τὰ θεωρήματα χώραν. καὶ ὁρᾷς ὅπως τὰ μὲν ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν δεικτικὰ τοῖς ἰσοπλεύροις καὶ ἰσοσκελέσιν ἐφήρμοττεν. τὰ δὲ τῆς ἀνισότητος τοῖς σκαληνοῖς καὶ τοῖς ἰσοσκελέσιν, αἴτιον δὲ ὅτι τὰ μὲν τῶν τριγώνων ἰσότητός ἐστι μόνης ἔκγονα, τὰ δὲ, ἀνισότητος μόνης. τὰ δὲ, ἀμφοτέρων, ὧδε μὲν διὰ τῆς ἰσότητος, ὧδε δὲ διὰ τῆς ἀνισότητος ὑφιστάμενα. καὶ τὰ μὲν ὄντα τῷ πέρατι συγγενῆ, τὰ δὲ τῇ ἀπειρίᾳ, τὰ δὲ περὶ τὴν μίξιν ἀμφοτέρων ἀπογεννώμενα. ὥστε διὰ πάντων ἡ μίξις αὕτη περιφοίτηκεν, οἷον, γραμμῶν γωνιῶν σχημάτων. καὶ ἐν τοῖς σχήμασι τριπλεύρων τετραπλεύρων ἐφεξῆς ἁπάντων. ἀλλὰ καὶ τὸ πέρας, οὗ μὲν διὰ τῆς ὁμοιότητος ἐμφαντάζεται τοῖς γεωμετρικοῖς εἴδεσι, καὶ τὸ ἄπειρον, οὗ μὲν διὰ τῆς ἀνομοιότητος, οὗ δὲ, διὰ τῆς ἀνισότητος. καὶ τὸ μικτὸν, ὁ γε μὲν ἐξ ὁμοιοτήτων, ὅτε δὲ ἐξ ἰσοτήτων. αἴτιον δὲ καὶ τούτων ὅτι τὰ εἴδη τὰ γεωμετρικὰ τῷ ποσῷ προσήκει καὶ τῷ ποιῷ * διότι τῶν δύο τούτων ἐπισημαινομένων ἡμῖν, καὶ ὅτι παντὸς τριγώνου λέγων ὁ στοιχειωτὴς οὐχὶ καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου λέγει, ἀλλὰ τοῦ ἔχοντος μείζω καὶ ἐλάττω πλευράν. δεῖ γὰρ τὸ δεδομένον ἡγούμενον νομίζειν ἑπόμενον, ὃ δ' ἂν τὸ ζητούμενον μείζονα τὴν πλευρὰν ἔχει καὶ ἐλάσσονα τούτῳ ὑπὸ τὴν μείζονα πλευρὰν, τὴν μείζονα γωνίαν. ἐπειδὴ δὲ ὁ γεωμέτρης ἐν τῇ κατασκευῇ λαβὼν τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ μείζονα τὴν αγ τῆς αβ ἵνα δείξῃ τὴν πρὸς τῷ γ γωνίας τῆς πρὸς τῷ β μείζονα, ἀφεῖλεν ἀπὸ τῆς αγ τῇ αβ ἴσην τὴν αδ. φαίη δ' ἄν τις ὅτι πρὸς τῷ γδ δεῖ γενέσθαι τὴν ἀφαίρεσιν, φέρε καὶ ἐπὶ ταύτης τῆς ὑποθέσεως δείξομεν τὸ προκείμενον ὡς ὁ Πορφύριος. ἔστω γὰρ ἡ δγ ἴση τῇ αβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ ἐπὶ τὸ ε καὶ κείσθω ἡ βε τῇ δα ἴση, ὅλη ἄρα ἡ αε ἴση τῇ αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. ἐπεὶ οὖν ἡ αε τῇ αγ ἴση, καὶ

ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεγ ἴση τῇ ὑπὸ αγε διὰ τὸ πέμπτον. ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ μείζων τῆς ὑπὸ αγβ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ μείζων τῆς ὑπὸ αεγ, τοῦ γὰρ γβε μιᾶς πλευρᾶς ἐκβέβληται ἡ βε, καὶ ἡ ὑπὸ αβγ ἐκτὸς οὖσα τῆς ἀπεναντίον καὶ ἐντὸς μείζων ἐστί, πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ὑπὸ αβγ τῆς ὑπὸ αγβ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. αἱ μὲν οὖν γεωμετρικαὶ δείξεις τοιαῦται. δῆλον δὲ ὅτι τὸ αἴτιον τούτου τοῦ συμπτώματός ἐστιν ἡ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τῆς ὑποτεινούσης τὴν γωνίαν ὑπεροχὴ κατὰ τὸ μέγεθος, ἢ ἐλάττωσις. μείζων μὲν γὰρ οὖσα διίστησιν ἐπὶ πλέον τὴν γωνίαν, ἐλαττουμένη δὲ συνελαττοῖ κἀκείνην καὶ ἐπὶ μᾶλλον συνάγει. ὥσπερ δὲ διὰ τὴν ἐπ' ἄκρον τάσιν τῆς εὐθείας. ἐπ' ἄκρον γὰρ αὐτὴ τεταγμένη ἐστὶ τῶν γωνιῶν τὰ μεγέθη κατὰ τὴν ἑαυτῆς αὔξησιν καὶ μείωσιν συμμετατίθησι. καὶ ταῦτα λεγόμενα ἐφ' ἑνὸς τριγώνου, ἐπεὶ δυνατὸν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὑπὸ μείζονος καὶ ἐλάσσονος ὑποτείνεσθαι, καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μείζω ἐστὶ ἐλάττω γωνίαν ὑποτείνειν. ἔστω γὰρ εἰ τύχοι τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τὸ δ σημεῖον, καὶ ἴση ἡ αε, τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε. τὴν οὖν πρὸς τῷ α γωνίαν ὑποτείνουσιν αἱ δε βγ, ὧν ἡ μὲν μείζων, ἡ δὲ ἐλάσσων. καὶ μυρίας ὅσας λαβεῖν δυνατὸν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὴν α γωνίαν ὑποτεινούσας μείζους καὶ ἐλάσσους εὐθείας. πάλιν ἔστω τὸ αβγ ἰσοσκελές, καὶ ἐλάσσων ἡ βγ, τῶν βα αγ, ἔστω ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐπὶ τῆς βγ τὸ βγδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, ἔστω ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. ἐπεὶ οὖν τοῦ αβδ τριγώνου ἐκτός ἐστιν ἡ ὑπὸ βδε γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαδ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ μείζων τῆς βαγ. καὶ ὑποτείνει ἀμφοτέρας ἡ αὐτὴ εὐθεῖα. μείζονα καὶ ἐλάσσονα γωνίαν. δέδεικται δὲ ὅτι τὴν αὐτὴν γωνίαν μείζους εὐθεῖαι καὶ ἐλάσσους ὑποτείνουσιν. ἀλλ' ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τριγώνου μία εὐθεῖα ὑποτείνει γωνίαν, καὶ ἡ μὲν μείζων τὴν μείζονα ἐκ παντός, ἡ δὲ ἐλάσσων, τὴν ἐλάσσονα. καὶ τὸ αἴτιον ἐθεωρήσαμεν.

19

Παντὸς τριγώνου, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.)

Τοῦτό ἐστι τὸ ἀντίστροφον τῷ εἰρημένῳ θεωρήματι. ἔστιν ἁπλοῦν ἑκατέρων τό, τε δεδομένον, καὶ τὸ ζητούμενον. καὶ τὸ μὲν ἐκεῖ συμπέρασμα ὑπόθεσις ἐστὶν ἐνταῦθα, ἡ δὲ ἐκεῖ ὑπόθεσις, τοῦτο συμπέρασμα. προτέτακται δὲ ἐκεῖνο, διότι δεδομένην ἔχει τὴν ἀνισότητα τῶν πλευρῶν, ἕπεται δὲ τούτῳ τὰς γωνίας ἀνίσους ὑποθέμενον. δοκοῦσι γὰρ αἱ μὲν πλευραὶ τὰ εὐθύγραμμα περιέχειν, αἱ δὲ γωνίαι περιέχεσθαι. καὶ ὁ τρόπος δὲ τῆς ἀποδείξεως ἐπ' ἐκείνου μὲν δεικτικός, ἐπὶ δὲ τούτου διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. ὁ μὲν οὖν γεωμέτρης ἐκ διαιρέσεως τὸ ἀδύνατον συλλογίζεται. τῶν γὰρ γωνιῶν οὐσῶν ἀνίσων, λέγω φησὶν ὅτι καὶ αἱ ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἄνισοι. καὶ ἡ μείζων ὑποτείνει τὴν δεδομένην μείζονα γωνίαν. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν, ἡ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνουσα ἢ μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων. ἀλλ' εἰ μὲν ἴση, καὶ αἱ γωνίαι ἃς ὑποτείνουσιν ἴσαι διὰ τὸ πέμπτον. εἰ δὲ ἐλάττων καὶ ἡ γωνία ἣν ὑποτείνει ἐλάσσων, διὰ τὸ πρὸ τούτου. δέδεικται γὰρ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνουσα, καὶ ὑπὸ τὴν ἐλάσσονα, ἡ ἐλάσσων. ἔχουσι δὲ ἀνάπαλιν αἱ γωνίαι, μείζων ἄρα ἡ πλευρὰ τῆς πλευρᾶς. δυνατὸν δὲ καὶ ἄνευ ταύτης τῆς διαιρέσεως δεῖξαι τὸ προκείμενον, προαποδείξαντας λημμάτιόν τι τοιοῦτον, ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, καὶ ἡ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεῖσα, εἰς ἄνισα αὐτὴν διαιρεῖ, αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ ἄνισοι ἔσονται. καὶ μείζων μέν, ἡ τῷ μείζονι τμήματι τῆς βάσεως συμπίπτουσα, ἐλάσσων δέ, ἡ ἐλάσσονι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ α γωνία, καὶ ἡ αδ εἰς ἄνισα τεμνέτω τὴν βγ, καὶ μείζων ἡ γδ τῆς βδ, λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ. ἐκβεβλήσθω ἡ αδ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ κείσθω ἴση ἡ δε, τῇ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ δγ τῆς δβ, κείσθω ἴση τῇ βδ ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ὡς ἐπὶ τὸ η. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αδ τῇ δε, καὶ ἡ βδ τῇ δζ, δύο δυσὶν ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς κατὰ κορυφήν, βάσις ἄρα ἡ βα βάσει τῇ εζ ἴση, καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν. ὥστε καὶ γωνία, ἡ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ δαβ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ αὕτη τῇ ὑπὸ δαη ἴση ἐστίν, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αη, τῇ εη ἴση διὰ τὸ ἕκτον. μείζων ἄρα ἡ αγ τῆς αβ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τούτου προληφθέντος δείξομεν ὅτι ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ μείζονα ἔχον τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν τῆς πρὸς τῷ γ, λέγω ὅτι ἡ αγ τῆς αβ μείζων ἐστί. τετμήσθω δίχα ἡ βγ κατὰ τὸ δ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἤχθω ἡ δε, ἴση τῇ αδ

καὶ ἐπε-

καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ βδ τῇ δγ, καὶ ἡ αδ τῇ δε, δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ. ἴση ἄρα καὶ βάσις ἡ βε τῇ αγ, καὶ πάντα πᾶσιν, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ δεβ γωνία ἴση τῇ πρὸς τῷ γ, ἐλάσσων δὲ τῆς ὑπὸ αβδ. τετμήσθω οὖν δίχα καὶ ἡ ὑπὸ αβε τῇ βζ εὐθείᾳ. μείζων ἄρα ἡ εζ τῆς ζα. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αβε ἡ πρὸς τῷ β γωνία δίχα ἐτμήθη τῇ βζ, καὶ μείζων ἡ εζ τῆς ζα, διὰ τὸ προδειχθὲν μείζων ἡ βε τῆς βα, ἡ δὲ βε τῇ αγ δέδεικται ἴση, μείζων ἄρα ἡ αγ τῆς αβ. δέδεικται ἄρα τὸ ζητούμενον. καὶ φανερὸν ὅτι τὴν ποικιλίαν τῆς ἀποδείξεως παραιτούμενος ὁ στοιχειωτής, τὸν τρόπον τοῦτον ἐφυλάττετο. καὶ τῇ ἐκ διαιρέσεως εἰς τὸ ἀδύνατον ἀγούσῃ δείξει προσεχρήσατο, βουλόμενος τὸ ἀντίστροφον ποιῆσαι τοῦ προηγουμένου μηδενὸς μεταξὺ παρεμπίπτοντος, ἐπεὶ καὶ τὸ ὄγδοον ἀντίστροφον πρὸς τὸ τέταρτον πολλὴν ἐποίησε ταραχὴν δυσεπίγνωστον ποιῆσαν τὴν ἀντιστροφήν. αἱρετώτερον γὰρ τὸ δι' ἀδυνάτου δεικνῦναι τὰ ἀντιστρέφοντα μετὰ τοῦ τὴν συνέχειαν φυλάττειν, ἢ τὸ διακόπτειν τὴν συνέχειαν μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποδείξεως. διὸ δὴ τὰ ἀντίστροφα ταῦτα σχεδὸν δι' ἀδυνάτου δείκνυσι.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. κ

Τοῦτο τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἰώθασιν οἱ περὶ τὸν Ἐπικούρειοι καὶ ὄνῳ λέγοντες αὐτὸ δῆλον εἶναι καὶ μηδεμιᾶς δεῖσθαι κατασκευῆς, ὁμοίως δὲ ἀνεπιστήμονός ἐστιν ἔργον τὰ ἐμφανῆ παραμυθίας ἀξιοῦν, καὶ τοῖς ἀδήλοις αὐτόθεν πιστεύειν. ὁ γὰρ ταῦτα συγχέων, φανερός ἐστι, τό, τε ἀναπόδεικτον ἀγνοῶν. ὅτι δὲ καὶ ὄνῳ τὸ προκείμενον θεώρημα γνώριμον, κατασκευάζουσιν ἐκ τοῦ τεθέντος χόρτου ἐπὶ τὸ ἕτερον πέρας τῶν πλευρῶν τὸν ὄνον τὴν μίαν ὁδεύειν πλευράν, ἀλλὰ μὴ τὰς δύο τροφῆς ὀρεγόμενον. πρὸς δὴ ταῦτα λεκτέον, ὅτι σαφὲς μὲν ἐπὶ τὴν αἴσθησιν ἐστὶ τὸ θεώρημα, οὔπω δὲ σαφὲς ἐπὶ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον. πολλὰ γὰρ τοῦτο πέπονθε τῶν πραγμάτων. οἷον θερμαίνει τὸ πῦρ, καὶ τοῦτο τῇ αἰσθήσει σαφές, ἀλλὰ πῶς θερμαίνει τοῦ ἐπιστήμης ἔργον ἐλέγειν, πότερον, ἀσωμάτῳ δυνάμει, ἢ σωματικαῖς τομαῖς, σφαιρικοῖς μορίοις ἢ πυραμοειδέσι. πάλιν ὅτι κινούμεθα τῇ αἰσθήσει δῆλον, πῶς δὲ κινούμεθα παραστῆσαι τῷ λόγῳ, χαλεπόν, πότερον ἐπὶ ἀμερές, ἢ ἐπὶ διάστημα, πῶς δὲ ἄπειρα δίιμεν εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν πᾶν μέγεθος. ἔστω τοίνυν καὶ τοῦ τριγώνου τὸ μείζους εἶναι τὰς δύο τῆς μιᾶς τῇ αἰσθήσει καταφανές, ἀλλὰ πῶς τοῦτο γίγνεται, τοῦ ἐπιστήμης ἔργον εἰπεῖν. ἀλλὰ πρὸς τοὺς Ἐπικουρείους ταῦτα ἀρκούντως ἀντειρήσθω. δεῖ δὲ καὶ τὰς ἄλλας ἀποδείξεις τοῦ προκειμένου θεωρήματος συντόμως ἱστορῆσαι, ὅσας οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πορφύριον ἀνέγραψαν τῆς εὐθείας μὴ προσεκβαλλομένης ὃ πεποίηκεν ὁ στοιχειωτής. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, δεῖ δὴ δεῖξαι τὰς αβ αγ μείζους. τετμήσθω δίχα ἡ πρὸς τῷ α γωνία. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αβε γωνία ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαε, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βαε τῇ ὑπὸ εαγ ἴση, ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ μείζων τῆς ὑπὸ εαγ, ὥστε καὶ ἡ αγ πλευρὰ τῆς γε μείζων. διὰ ταῦτα δὴ καὶ ἡ αβ τῆς βε μείζων. τριγώνου γὰρ τοῦ αεγ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεβ καὶ μείζων τῆς ὑπὸ γαε, τουτέστι τῆς ὑπὸ εαβ, ὥστε καὶ ἡ αβ, τῆς βε μείζων. αἱ ἄρα αβ αγ τῆς βγ ὅλης μείζους. ὁμοίως δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων. πάλιν ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ. εἰ μὲν οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ πάντως αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς. τριῶν γὰρ οὐσῶν δύο ποιοῦσι διπλασίαν τοῦ ἑνός. εἰ δὲ ἰσοσκελές, ἤτοι ἐλάσσονα ἔχει τῶν ἴσων ἑκατέρας τὴν βάσιν, ἢ μείζονα. εἰ μὲν οὖν ἐλάσσων ἡ βάσις, πάλιν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς. εἰ δὲ μείζων ἡ βάσις, ἔστω ἡ βγ μείζων. καὶ ἀφῃρήσθω ἴση ἑκατέρᾳ ἐκείνων ἡ βε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ αεβ, ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αεγ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αεβ τῆς ὑπὸ γαε μείζων, αἱ ἄρα περὶ τὴν α καὶ ε γωνίαι μείζους ὅλης τῆς πρὸς τῷ α, ὧν ἡ ὑπὸ βεα ἴση τῇ ὑπὸ βαε. ἐπεὶ καὶ ἡ αβ τῇ βε ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ γαε μείζων. ὥστε καὶ ἡ αγ τῆς γε μείζων. ἦν δὲ καὶ ἡ αβ τῇ βε ἴση. αἱ ἄρα αβ αγ, μείζους τῆς βγ. εἰ δὲ σκαληνὸν τὸ αβγ, ἔστω μεγίστη ἡ αβ, μέση ἡ αγ, ἐλαχίστη ἡ βγ. ἡ μὲν οὖν μεγίστη μεθ' ἑκατέρας ληφθεῖσα πάντως μείζων τῆς λοιπῆς, καὶ γὰρ καθ' ἑαυτὴν ἑτέρας μείζων. εἰ δὲ τὴν αγ καὶ γβ δεῖξαι ζητοῖμεν τῆς αβ μεγίστης οὔσης μείζονας, ὡς ἐπὶ τοῦ ἰσοσκελοῦς ποιήσομεν ἀπὸ τῆς μεγίστης ἀφελόντες τῇ ἑκατέρᾳ ἴσην, καὶ ἐπιζεύξαντες ἀπὸ τοῦ γ, καὶ ἀποχρησάμενοι ταῖς ἐκτὸς τῶν τριγώνων γωνίαις. πάλιν ἔστω τρίγωνον τυχὸν

 τὸ αβγ,

τὸ αβγ, λέγω ὅτι αἱ αβ αγ, μείζους εἰσὶ τῆς βγ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσαι εἰσίν, ἢ ἐλάττους. ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἀφῃρήσθω τῆς αβ ἴση ἡ βε, λοιπὴ ἄρα ἡ εγ, τῇ αγ ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ τῇ βε ἴση, γωνίας ἴσας ὑποτείνουσιν. αἱ ἄρα πρὸς τῷ ε γωνίαι ἴσαι, καὶ αἱ πρὸς τῷ α, ὅπερ ἀδύνατον. πάλιν δὲ ἔστωσαν ἐλάσσους αἱ αβ αγ τῆς βγ καὶ ἀφῃρήσθω τῇ μὲν αβ ἴση, ἡ βδ, τῇ δὲ αγ, ἡ γε. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ αβ, τῇ βδ, ἴση ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ βαδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ αγ τῇ γε, ἴση ἡ ὑπὸ γεα, τῇ ὑπὸ εαγ, δύο ἄρα αἱ βδα γεα, ἴσαι δυσὶ ταῖς ὑπὸ βαδ, καὶ εαγ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αδγ, καὶ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ αβε ἐκτὸς ἡ ὑπὸ γεα, μείζων τῆς ὑπὸ βαδ, καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ βαε μείζων, αἱ ὑπὸ βδα γεα μείζους ἐκεῖ δύο τῶν ὑπὸ βαγ εαγ, ἦσαν δὲ καὶ ἴσαι αὐταῖς ὅπερ ἀδύνατον. αἱ ἄρα αβ αγ, οὔτε ἴσαι εἰσὶ τῇ βγ, οὔτε ἐλάσσους, οὔτε μείζους. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν δύο εὐθεῖαι σταθῶσιν ἐντὸς ἀπὸ τῶν περάτων ἀρξάμεναι αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἐλάττους μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.) Τὸ μὲν δηλούμενον ὑπὸ τῆς προτάσεως φανερόν, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ ἐπὶ τῷ στοιχειωτῇ, τὸ ἐναργὲς ἔχει. καὶ ταῖς πρώταις ἀρχαῖς ἑπόμενον τὸ θεώρημα. ἐκ γὰρ δύο θεωρημάτων εἴρηται, τοῦ τε πρὸ τούτου δειχθέντος καὶ τοῦ ις. πρὸς μὲν γὰρ τὸ δεῖξαι, τὰς συσταθείσας ἐντὸς ἐλάσσονας τῶν ἐκτός, ἐκείνου δεῖται τοῦ θεωρήματος, παντὸς τριγώνου αἱ δύο μείζονές εἰσι τῆς λοιπῆς, πρὸς δὲ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν, ἀποφῆναι μείζονα τῆς ὑπὸ τῶν ἐκτὸς περιεχομένης, ἐκεῖνο αὐτῷ συντελεῖ, τὸ παντὸς τριγώνου τὴν ἐκτὸς γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. λάβοις δ' ἂν ἅμα τῆς γεωμετρικῆς ἀκριβείας πίστιν, καὶ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι παραδόξων ὑπόμνησιν, εἰ δείξαιμεν ὅτι δυνατὸν ἐντὸς τριγώνου τινὸς ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν, οὐχ ὅλης ἀλλὰ μέρους αὐτῆς συστῆναι δύο εὐθείας μείζους τῶν ἐκτός, καὶ πάλιν ἄλλας μείζονα γωνίαν περιεχούσας τῆς ὑπὸ τῶν ἐκτὸς περιεχομένης. τούτου γὰρ δειχθέντος, ἅμα μὲν δῆλον, ὅτι ἀναγκαίως ὁ στοιχειωτὴς προσέθηκεν τὸ ἀπὸ τῶν περάτων ἄρχεσθαι δεῖν τῆς κοινῆς βάσεως τὰς ἐντὸς συνισταμένας. καὶ τὸ ἐπὶ μιᾶς ὅλης συνίστασθαι, ἀλλὰ οὐκ ἐπὶ μέρους τῆς ὅλης. ἅμα δὲ καὶ ὅπερ εἴπομεν, ἕν τι τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδόξων ἀναφανήσεται, πῶς γὰρ οὐ παράδοξον, εἰ αἱ μὲν ἐπὶ τῆς ὅλης συνιστάμεναι τῶν ἐκτὸς ἐλάσσους εἰσίν, αἱ δὲ ἐπὶ μέρους μείζονες. ἔστω δὴ οὖν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν, καὶ εἰλήφθω σημεῖον τυχὸν τὸ δ ἐπὶ τῆς βγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, μείζων ἄρα ἡ αδ τῆς αβ. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αδ ἴση τῇ αβ, ἡ δε, καὶ ἡ εα διῃρήσθω δίχα, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου δὴ τοῦ αζγ αἱ αζ ζγ, μείζους εἰσὶ τῆς αγ, ἀλλ' ἡ αζ, ἴση τῇ ζε, αἱ ἄρα ζε ζγ, μείζους τῆς αγ, ἴση δέ, ἡ δε, τῇ αβ. αἱ ἄρα ζγ ζδ, μείζους τῶν αβ αγ καί, εἰσὶν ἐντός. πάλιν ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελές, τὸ αβγ μείζονα τὴν βάσιν ἔχον τὴν βγ ἑκατέρας τῶν ἴσων. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς βγ ἴση τῇ αβ ἡ βδ, καὶ ἐπεζεύχθω, ἡ αδ, καὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς αδ τυχόν, εἰλήφθω τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ, ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αβ τῇ βδ, ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαδ, τῇ ὑπὸ βδα, καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ εδγ, ἐκτός ἐστιν ἡ ὑπὸ εδα, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός, καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ δεγ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, μείζων τῆς ὑπὸ δεγ, καὶ περιέχεται ἡ μὲν ὑπὸ βαγ ὑπὸ τῶν ἐκτός, ἡ δὲ ὑπὸ δεγ, ὑπὸ τῶν ἐντός. συνέστησαν ἄρα ἐντὸς τοῦ τριγώνου, αἱ δε, εγ γωνίαν περιέχουσαι ἐλάσσονα τῶν ἐκτός, καὶ δέδεικται τὸ προκείμενον οὗ προεχρηζόμενον ἡμῶν ταῖς παραλλήλοις τῶν ἐξηγητῶν. ἀναγκαῖον ἄρα, τὰς συνισταμένας εὐθείας ἀπὸ τῶν περάτων ἄρχεσθαι τῆς βάσεως. αἱ γὰρ ἐπὶ μέρους αὐτῆς συνιστάμεναι, καὶ μείζους δείκνυνταί ποτε τῶν ἐκτός, καὶ ἐλάσσονα περιέχουσαι γωνίαν. οὕτω δὲ καὶ συνισταμένων ἀπὸ τῶν περάτων, ἀναφαίνεται καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀκιδοειδῶν τριγώνων ἓν καὶ τοῦτο τῶν ἐν γεωμετρίᾳ παραδόξων τρίγωνον τετράπλευρον εὑρεῖν οἷον τὸ αβγ. περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν τεττάρων πλευρῶν, τῶν βα αγ γε εβ, τρεῖς δὲ ἔχει γωνίας, μίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ β, ἑτέραν δὲ πρὸς τῷ α, λοιπὴν δὲ πρὸς τῷ γ. τετράπλευρον ἄρα ἐστὶ τρίγωνον τὸ προκείμενον σχῆμα.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ἴσαι, τρίγωνον

συστήσα

συστήσασθαι. δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἐπὶ τὰ προβλήματα μετεληλύθαμεν αὖθις, καὶ παρασκευάζεται τριῶν ἐκκειμένων εὐθειῶν, ὧν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς, συστήσασθαι τρίγωνον ἐξ ἴσων πλευρῶν ταῖς δοθείσαις εὐθείαις. πρῶτον μὲν γὰρ συμπιπτόντων ἐξ αὐτῶν ἐκείνων θέσιν ἤδη λαμβανουσῶν εἰρημένην, συστῆναι τρίγωνον ἀδύνατον, ἀλλ' ἐκ τῶν ἴσων αὐταῖς δυνατόν. ἔπειθ' ὅτι δεῖ τὰς εὐθείας τὰς συμπληρούσας μελλούσας τὸ τρίγωνον τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζους εἶναι, ὡς δέδεικται. καὶ διὰ ταύτην τὴν αἰτίαν προσθεὶς, ὡς ἄρα ἀναγκαῖον καὶ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, πρὸς δὲ τούτοις καὶ τὰς ἐνστάσεις ἁπάσας ἀνελὼν, τὰς πρὸς τὴν κατασκευὴν φερομένας, διὰ τῆς προσθήκης ταύτης μόνης κἀκείνας λύεσθαι δυναμένας. ἔστιν οὖν τὸ πρόβλημα τῶν διωρισμένων, ἀλλ' οὐ τῶν ἀδιορίστων. καὶ γὰρ τῶν προβλημάτων, ὥσπερ τῶν θεωρημάτων, τὰ μέν ἐστιν ἀδιόριστα, τὰ δὲ διωρισμένα. ἐὰν μὲν γὰρ εἴπωμεν ἁπλῶς οὕτως, ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων τρισὶ ταῖς δοθείσαις συστήσασθαι τρίγωνον, ἀδιόριστον καὶ ἀδύνατον. ἐὰν δὲ προσθῶμεν, ὧν αἱ δύο μείζους εἰσὶ τῆς λοιπῆς, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, διωρισμένον τε καὶ δυνατόν. γίγνεται γὰρ καὶ ἐπὶ τούτων, ὥσπερ τῶν θεωρημάτων, ἐπὶ τὸ ἀληθὲς καὶ ψεῦδος ἡ διαίρεσις, οὕτω καὶ τῶν προβλημάτων ἐπὶ δυνατὸν ἀποφανθέν. ὅτι δὲ καὶ αἱ πρὸς τὴν κατασκευὴν ἐνστάσεις ἐντεῦθεν λύονται, μάθοιμεν ἂν μικρὸν εἰς αὐτὴν ἀποβλέψαντες. ἐπακολουθήσομεν γὰρ τοῖς τοῦ γεωμέτρου ῥήμασιν. ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ α β γ, ὧν αἱ δύο μείζους τῆς λοιπῆς πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, καὶ δέον ἐστὶ ποιῆσαι τὸ προσταχθέν. ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, ἐπὶ θάτερα μὲν πεπερασμένη, οἷον ἐπὶ τὸ δ, ἐπὶ θάτερα δὲ ἄπειρος. καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἡ ηθ, καὶ κέντρῳ τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ κύκλος γεγράφθω ὁ κ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ κύκλος γεγράφθω ὁ λ. καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ κύκλοι. πόθεν γὰρ ἔλαβεν ὁ στοιχειωτὴς, πόθεν οὖν τοῦτο φησί τις; μή ποτε γὰρ ἢ ἐφάπτονται μόνον ἀλλήλων, ἢ οὐδὲ ἐφάπτονται. τῶν γὰρ τριῶν ἕν τι πάσχειν αὐτοὺς ἀναγκαῖον, ἢ τέμνειν ἀλλήλους, ἢ ἐφάπτεσθαι, ἢ διεστάναι ἀπ' ἀλλήλων. λέγω δὴ οὖν ὅτι τέμνουσιν ἐξ ἀνάγκης ἀλλήλους. ἐφαπτέσθωσαν γὰρ πρότερον ἀλλήλων. ἐπεὶ τοίνυν τὸ ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ κ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δζ τῇ ζν. καὶ ἐπεὶ τὸ η κέντρον τοῦ λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ θη τῇ ημ. δύο δὴ αἱ δζ ηθ ἴσαι μιᾷ τῇ ζη, ἐκεῖναι δὲ μείζους αὐτῆς, ὥσπερ καὶ ἡ α μετὰ τῆς γ τῆς β μείζων. ἴσαι γὰρ ἐκείναις. πάλιν εἰ δυνατὸν διεστάτωσαν ἀλλήλων οἱ κύκλοι, ὡς οἱ κ λ. ἐπεὶ οὖν τὸ ζ τοῦ κ κέντρον, ἴση ἡ δζ τῇ ζν. καὶ ἐπεὶ τὸ η τοῦ λ κέντρον, ἡ θη ἴση τῇ ημ, μείζων ἄρα ὅλη ἡ ζη τῶν δζ θη. ὑπερέχει γὰρ ἡ ζη τῇ νμ, τῶν δζ ηθ. ἐκεῖ δὲ τὰς δζ θη μείζους εἶναι τῆς ζη, ὥσπερ καὶ τὰς α γ τῆς β. ἴση γὰρ ἡ μὲν δζ τῇ α, ἡ δὲ ζη τῇ β, ἡ δὲ θη τῇ γ. ἀνάγκη ἄρα τοὺς κ λ κύκλους τέμνειν ἀλλήλους. ὥστε ὁ στοιχειωτὴς ὀρθῶς τέμνοντας ἔλαβεν ἀλλήλους τοὺς κύκλους. ἐπεὶ καὶ τῶν τριῶν εὐθειῶν ὑπέθετο τὰς δύο μείζους τῆς λοιπῆς πάντῃ μεταλαμβανομένας, καὶ οὔτε ἴσας οὔτε ἐλάττους τὰς δύο τῆς λοιπῆς.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. κγ

Πρόβλημα τοῦτο Οἰνοπίδου μᾶλλον εὕρημα, ὥς φησιν Εὔδημος. γωνίας δὲ σύστασιν ἀπαιτοῦν ἴσης ἄλλῃ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δοθέντι σημείῳ. τὸ μὲν οὖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον ἀναγκαίως εἶναι προσέθηκεν. ἐπειδὴ καὶ ἀδύνατον πάσῃ γωνίᾳ ἴσην γωνίαν πρὸς εὐθείᾳ συστήσασθαι. δέδεικται γὰρ ὅτι τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν, δύο μόνον εἰσὶν εὐθυγράμμοις ἴσαι, ἥ τε τοῦ μηνοειδοῦς πάσῃ εὐθυγράμμῳ ἤδη δεδειγμένη, καὶ ἡ τοῦ πελεκοειδοῦς σχήματος διμοίρῳ ὀρθῆς ἴση οὖσα. γίγνεται δὲ τὸ μηνοειδὲς τοῦτο δύο κύκλων διὰ τῶν κέντρων τεμνόντων ἀλλήλους. τὸ δὲ πρὸς εὐθείᾳ τινὶ γίγνεσθαι τὴν στάσιν τῆς γωνίας ὡρισμένην ποιεῖ τὴν συνισταμένην, καὶ οὐκ ἀδιάφορον ἐπὶ τὸ εἶδος, ἀλλ' ἤτοι εὐθύγραμμον, ἢ μικτόν. οὐδεμιᾶς δὲ μικτῆς ἴσης εἶναι δυναμένης εὐθυγράμμῳ, πρόδηλον ὅτι καὶ αὕτη πάντως εὐθύγραμμός ἐστιν. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς, ἁπλῶς προσχρησάμενος τῷ πρὸ τούτου προβλήματι, καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν ἴσων τρισὶ ταῖς δοθείσαις συστήσας τρίγωνον, ἐποίησε τὸ προταχθέν. λάβοις δ' ἂν τὴν σύστασιν τοῦ

τριγώνου διδασκαλικώτερον τὸν τρόπον τοῦτον. ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΓΔΕ, δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ προσταχθέν. ἐπιζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡ ΑΒ ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΖΑ. τῇ δὲ ΔΕ ἴση ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΕΓ, ἡ ΒΗ, καὶ κέντρῳ τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΖΑ κύκλος γεγράφθω ὁ Κ, καὶ πάλιν ὡς ἐπὶ τοῦ πρὸ τούτου, κέντρῳ τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΗ κύκλος γεγράφθω ὁ Λ. τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ὡς προδέδεικται. τεμνέτωσαν κατὰ τὰ Μ Ν σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ ὡσαύτως. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΖΑ τῇ ΑΜ καὶ τῇ ΑΝ, τῇ δὲ ΖΑ ἴση ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΑΜ, καὶ ἡ ΑΝ ἴσαι τῇ ΓΔ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ΒΗ τῇ ΒΜ καὶ τῇ ΒΝ, ἡ δὲ ΗΒ ἴση τῇ ΓΕ, ἡ ἄρα ΜΒ, καὶ ἡ ΒΝ ἴσαι τῇ ΓΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΔΕ, δύο ἄρα αἱ ΑΒ ΑΜ ἴσαι ταῖς ΔΕ ΔΓ, καὶ βάσις ἡ ΒΜ, ἴση τῇ ΓΕ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΑΒ ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ. καὶ πάλιν δύο αἱ ΝΑ ΑΒ, ἴσαι δυσὶ ταῖς ΓΔ ΔΕ, καὶ βάσις ἡ ΝΒ βάσει τῇ ΓΕ ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΝΑΒ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ γέγονε τὸ προσταχθὲν διπλασίως. οὐ γὰρ μίαν μόνον ἀλλὰ δύο συνεστησάμεθα γωνίας ἴσας τῇ δοθείσῃ ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς ΑΒ εὐθείας ἵνα καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς, ἐφ᾽ ὁποτέρα ἂν βουλώμεθα ποιεῖσθαι τὴν σύστασιν ἀναμφισβήτητον ᾖ. καὶ μήτις ἀντιλέγῃ. ταῦτα μὲν οὖν πρὸς τὴν τοῦ στοιχειωτοῦ κατασκευὴν συμβαλλόμεθα. τὴν δὲ Ἀπολλωνίου δεῖξιν, οὐκ ἐπαινοῦμεν, ὡς δεομένην τῶν ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ δεικνυμένων. λαβὼν γὰρ ἐκεῖνος γωνίαν τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, γράφει τὴν ΓΕ περιφέρειαν, καὶ ὡσαύτως κέντρῳ τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ τὴν ΒΖ περιφέρειαν. καὶ ἀπολαβὼν τὴν ΓΕ ἴσην τῇ ΖΒ, ἐπιζευγνύσι τὴν ΑΖ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυίας τὰς Α Δ γωνίας, ἴσας ἀποφαίνει. δεῖ δὲ προλαβεῖν, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΓΔ ἵνα καὶ οἱ κύκλοι ἴσοι ὦσι. τὴν οὖν τοιαύτην κατασκευὴν ὡς τοῖς ὕστερον προσχρωμένην, ἀλλοτρίαν εἶναι τῆς στοιχειώσεως νομίζομεν. τὴν δὲ τοῦ γεωμέτρου προτίθεμεν ὡς ταῖς ἀρχαῖς ἑπομένην.

κδ

Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.) Πάλιν ἐπὶ τὰ θεωρήματα μεταβέβηκεν, καὶ τοὺς ὁμοίους ἀποδίδωσι λόγους ἐπὶ δύο τριγώνων, οὓς καὶ ἐπὶ ἰσότητος. δύο γὰρ ὑποτιθέμενος τρίγωνα δύο πλευρὰς ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ γωνίαν, ὅτε μὲν ἴσην ἐν ἀμφοτέροις τίθεται, ὅτε δὲ ἄνισον. καὶ τῇ μὲν ἰσότητι ταύτῃ ἑπομένην, ἔδειξε τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων, καὶ τῇ τούτων ἰσότητι δείκνυσιν ἐπακολουθοῦσαν τὴν τῶν γωνιῶν πρὸς ταῖς κορυφαῖς ἰσότητα, καὶ τὴν ἀνισότητα τῇ ἀνισότητι. τοῦτο οὖν τὸ θεώρημα τὸ νῦν προτεινόμενον, ἀντίκειται μὲν τῷ τετάρτῳ. ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἴσας ὑπέθετο τὰς πρὸς ταῖς κορυφαῖς τῶν τριγώνων γωνίας τοῦτο δὲ ἀνίσους. κἀκεῖνο μὲν ἴσας αὐτῶν ἀποδείκνυσι τὰς βάσεις, τοῦτο δὲ ὡσαύτως ταῖς γωνίαις ἀνίσους. προηγεῖται δὲ τοῦ ἐφεξῆς θεωρήματος. ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἀπὸ τῶν βάσεων ἐπὶ τὰς γωνίας καθ᾽ ἃς ὑποτείνουσιν αἱ βάσεις, μετάγει τὸν τῆς ἀνισότητος λόγον, τοῦτο δὲ ἀνάπαλιν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις τὰς ὑπ᾽ αὐτάς. ὥσπερ αὐτὸ ἐφεξῆς ἀντίστροφον μέν ἐστι πρὸς τοῦτο κατὰ τὸν εἰρημένον τρόπον. ἀντικείμενον δὲ τῷ ὀγδόῳ θεωρήματι. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τῆς ἰσότητος τῶν βάσεων ἴσας ἀποδείκνυσι τὰς πρὸς ταῖς κορυφαῖς γωνίας, τὸ δὲ, ἀπὸ τῆς ἀνισότητος τῶν βάσεων, κἀκείνας ἀνίσους ἀποφαίνον. κοινὸν δὲ τοῖς τέτρασιν ὧν δύο μὲν περὶ τὸ ἴσον στρέφεται τὸ τέταρτον καὶ τὸ ὄγδοον, δύο δὲ περὶ τὸ ἄνισον, τοῦτό τε καὶ τὸ ἑξῆς. καὶ δύο μὲν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἄρχεται, τὸ τέταρτον καὶ ὃ νῦν προεθέμεθα ζητεῖν, δύο δὲ ἀπὸ τῶν βάσεων, τό, τε ὄγδοον, καὶ τὸ ἐφεξῆς τεταγμένον. δεῖ οὖν τούτοις τέτρασι, τῷ τε τετάρτῳ καὶ ὀγδόῳ καὶ εἰκοστῷ τετάρτῳ, καὶ εἰκοστῷ πέμπτῳ τοῖς ἅπασι τὸ τὰς δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τούτων γὰρ ἀνίσων οὐσῶν περιττὴ πᾶσα ζήτησις, καὶ ἀπάτης οὐκ ἀπηλλαγμένη. τοσαῦτα καθόλου περὶ τῶν προκειμένων εἰρήσθω. φέρε δὲ καὶ τὴν τοῦ στοιχειωτοῦ κατασκευὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀνασκεψώμεθα, καὶ τὸ ἐλλεῖπον αὐτῇ προσθῶμεν. λαβὼν γὰρ δύο τρίγωνα τὸ ΑΒΓ ΔΕΖ, ἴσας ἔχοντα τὰς ΑΒ ΑΓ ταῖς ΔΕ ΔΖ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν τῆς πρὸς τῷ Δ μείζονα, δεῖξαί τε βουλόμενος τὴν ΒΓ τῆς ΕΖ μείζονα, πρὸς τῇ ΕΔ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ Δ συνίστησιν ἴσην

γωνίαν

γωνίαν τῇ πρὸς τῷ α τὴν ὑπὸ εδθ, μείζων γὰρ ἡ πρὸς τῷ α τῆς πρὸς τῷ δ. καὶ ἐπιζεύγνυσιν ἴσην τὴν αγ τῇ δθ. ἢ οὖν διὰ τῆς εὐθείας ἐκβαλλομένης τὸ θ σημεῖον, ἢ ἀνωτέρω πίπτει τῆς εὐθείας, ἢ ἐπ' αὐτῆς ἢ ὑπ' αὐτήν. ὁ μὲν δὴ στοιχειωτὴς ὡς ἀνωτέρω κείμενον ἔλαβεν. ἔστω δὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς εὐθείας. πάλιν οὖν αὐτόθεν δείξομεν. δύο γὰρ αἱ αβ αγ, δυσὶ ταῖς δε δθ ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ ἡ βγ ἄρα βάσις τῇ εθ ἴση. ἀλλ' ἡ εθ μείζων τῆς εζ, ὥστε καὶ ἡ βγ τῆς εζ μείζων. ἀλλὰ δὴ ἔστω τῆς εζ κατωτέρω κειμένη. ἐπιζευχθείσης οὖν τῆς εθ, ἐροῦμεν ὡς ὅτι αἱ αβ αγ ταῖς δε δθ, ἴσαι καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ ἡ βγ ἄρα ἴση τῇ εθ. ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ δθε ἐντὸς συνεστήσαν αἱ δζ ζε, αὗται τῶν δθ θε, ἐλάσσους εἰσὶ τῶν ἐκτός. ἴση δὲ ἡ δθ τῇ δζ. καὶ γὰρ τῇ αγ, μείζων ἄρα ἡ θε τῆς εζ. ἀλλ' ἡ θε τῇ βγ ἐστὶν ἴση, μείζων ἄρα ἡ βγ τῆς εζ. κατὰ πᾶσαν ἄρα θέσιν δέδεικται τὸ θεώρημα. διὰ τί οὖν οὐχ ὥσπερ ἐπὶ τοῦ τετάρτου θεωρήματος προσεπέδειξεν ὅτι καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ἴσα ἐστίν, τοῦτο καὶ ἐν τούτῳ προσέθηκεν ὅτι πρὸς τῇ ἀνισότητι τῶν βάσεων, καὶ τὰ ἐμβαδὰ ἄνισα. πρὸς δὴ ταύτην τὴν ἀπορίαν λεγέσθω ὅτι οὐχ ὁ αὐτὸς λόγος ἐστί τε τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ βάσεων, καὶ τῶν ἀνίσων. ἴσαις μὲν γὰρ οὔσαις ταῖς γωνίαις καὶ ταῖς βάσεσιν ἕπεται καὶ ἡ τῶν τριγώνων ἰσότης, ἀνίσοις δὲ ἄρα οὔσαις, οὐκ ἀνάγκη τὴν ἀνισότητα τῶν ἐμβαδῶν ἀκολουθεῖν. ἀλλὰ γὰρ δυνατὸν καὶ ἴσα εἶναι τὰ τρίγωνα καὶ ἄνισα, καὶ μεῖζον τὸ ἔχον τὴν μείζονα γωνίαν καὶ βάσιν, καὶ αὖ ἔλασσον. διὰ τοῦτο οὖν ὁ στοιχειωτὴς παρέλειπε τὴν τριγώνων σύγκρισιν. ἅμα δὲ καὶ ὅτι ἡ περὶ τούτων θεωρία τῆς τῶν παραλλήλων δεῖται πραγματείας. εἰ δὲ δεῖ προλαβόντας ἡμᾶς τὰ μέλλοντα δεικνύναι, καὶ νῦν ποιήσασθαι τῶν ἐμβαδῶν παράθεσιν, λέγομεν ὅτι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν αδ γωνιῶν, γιγνέσθω δὲ ὁ λόγος ἐπὶ τῆς ἐν τῷ στοιχείῳ καταγραφῆς, ἴσα δείκνυται τὰ τρίγωνα. μειζόνων δὲ δυοῖν ὀρθῶν, ἔλασσον τὸ ἔχον μείζονα γωνίαν, ἐλασσόνων δὲ οὐσῶν μεῖζον. ἔστω γὰρ τὰ ἐν τῷ στοιχείῳ κατεσκευασμένα, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εδ ζδ, καὶ ὑποκείσθωσαν αἱ ὑπὸ βαγ εδζ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ βαγ ἴση τῇ ὑπὸ εδκ, αἱ ἄρα ὑπὸ εδκ εδζ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ εδη κδη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ εδκ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ τῇ ὑπὸ δηκ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ εδζ ἴση τῇ θδκ, κατὰ κορυφὴν γάρ. καὶ ἡ ὑπὸ ηδκ ἄρα. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ηδζ ἐκτός ἐστιν ἡ ὑπὸ ηδθ, ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἀπεναντίον, ταῖς πρὸς τῷ η καὶ ζ. ἀλλ' αὗται ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ γὰρ ἡ δη τῇ δζ, ἄρα ἡ ὑπὸ ηδθ διπλῆ ταῖς πρὸς τῷ η καὶ ζ γωνίαις. ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ η τῇ ὑπὸ ηδκ. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἡ δε τῇ ζη. τὰ ἄρα ηδε ζδε τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς δε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς δε ηζ, ἄρα ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ηδε τῷ αβγ ἴσον, καὶ τὸ δεζ ἄρα τῷ αβγ ἴσον. καὶ ὁρᾷς ὅτι τριῶν ἐδεήθημεν θεωρημάτων ἐκ τῆς παραλλήλων ἐστὶ πραγματείας, ἑνὸς μὲν ὅτι παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντός, καὶ ἀπεναντίον ἴση, ἑτέρου δὲ ὅτι, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ ἴσας ποιῇ, παράλληλοι εἰσὶν αἱ εὐθεῖαι. τοῦ τρίτου δὲ, ὅτι τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τρίγωνα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἐστίν. ἃ καὶ ὁ στοιχειωτὴς εἰδὼς παρῆκε τὴν τῶν τριγώνων σύγκρισιν. ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν αἱ ὑπὸ βαγ εδζ γωνίαι μείζους δυοῖν ὀρθῶν. καὶ προκατασκευάσθω τὰ αὐτά. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ βαγ εδζ, τουτέστιν εδκ εδζ μείζους δυοῖν ὀρθῶν τῶν ὑπὸ εδκ, κδη, ἴσαι δύο ὀρθαῖς, κοινῆς ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ εδκ, μείζων ἡ ὑπὸ εδζ τῆς ὑπὸ ηδκ, τουτέστιν, ἡ ὑπὸ κδθ μείζων τῆς ὑπὸ εδκ μείζων ἐστίν, ἢ διπλῆ τῆς ὑπὸ ηδκ ἡ διπλῆ τῆς πρὸς τῷ η. ἡ ἄρα ὑπὸ ηδκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ η. κείσθω ἴση τῇ ὑπὸ ηδκ, ἡ ὑπὸ δηλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ελ. παράλληλος ἄρα ἡ ηλ τῇ δε. τὰ ἄρα ηδε λδε τρίγωνά ἐστιν ἴσα. ἀλλὰ τὸ λδε τοῦ ζδε ἔλασσον. ἄρα τὸ ηδε ἔλασσον τοῦ ζδε τὸ ἔχον τὴν μείζονα. τὸ δὴ τρίτον, ἔστωσαν ἐλάσσους ὀρθῶν δυοῖν αἱ ἄνισοι γωνίαι, καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτά. ἐπεὶ δὲ αἱ ὑπὸ εδκ ηδκ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρουμένης τῆς ὑπὸ εδκ, ὅλη ἡ ὑπὸ ηδθ ἐλάσσων ἢ διπλῆ τῆς ὑπὸ ηδκ. ἀλλὰ καὶ διπλῆ ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ η. κείσθω τῇ ὑπὸ ηδκ ἴση ἡ ὑπὸ δηλ. καὶ συμπιπτέτω ἡ ηλ τῇ εζ κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δλ. παράλληλος ἄρα ἡ ηλ τῇ δε. ἴσα ἄρα τὰ ηδε λδε τρίγωνα ἀλλήλοις. ἀλλὰ τὸ μὲν λδε μεῖζον τοῦ ζδε, τὸ δὲ ηδε ἴσον τῷ αβγ. τὸ ἄρα αβγ, μεῖζον τοῦ



δζε

δζε, δέδεικται ἄρα περὶ ἀβγ τῷ δεζ, καὶ ἴσον, καὶ μεῖζον, καὶ ἔλαττον, τῶν πρὸς τῷ α καὶ δ γωνιῶν ἢ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν, ἢ μειζόνων δυεῖν ὀρθῶν, ἢ ἐλασσόνων. καὶ πᾶσαι αἱ ὑποθέσεις τὸ δυνατὸν ἔχουσι. τί γὰρ εἰ ἡ πρὸς τῷ α εἴη μιᾶς καὶ ἡμισείας ὀρθῆς, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ διμοίρου. οὐχὶ μείζους δύο ὀρθῶν; τί δὲ εἰ ἡ πρὸς τῷ α μιᾶς καὶ ἡμισείας, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ τρίτου οὐχὶ ἐλάσσους δύο ὀρθῶν, καὶ ἀεὶ ἡ α μείζων τῆς πρὸς τῷ δ. πᾶσαι οὖν διὰ τῶν παραλλήλων ἡμῖν γεγόνασι προχειρήσεως. ἀναγκαίως ἄρα κεῖνται περὶ στοιχειωτοῦ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.)

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἀντίκειται μὲν τῷ ὀγδόῳ, ἀντιστρέφει δὲ τῷ πρὸ αὐτοῦ. ἐπὶ συζυγίαν γὰρ ὁ στοιχειωτὴς προήγαγε τὰ ἤδη τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν καὶ τῶν βάσεων, καὶ τὰ νῦν τῆς ἀνισότητος θεωρήματα, καθ᾽ ἑκατέραν τῶν συζυγιῶν. τὰ μὲν, προηγούμενα, τὰ δὲ, ἀντιστροφὰς λαμβάνων. καὶ ἤδη μὲν τῶν προηγουμένων, ταῖς ἐπ᾽ εὐθείας δείξεσι χρώμενος, τῶν δὲ τῶν ἀντιστρόφων, ταῖς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγαῖς. οὕτω δὲ καὶ ἐφ᾽ ἑνὸς ἑκάστου πεποίηκεν τριγώνου, ποτὲ μὲν τῇ ἰσότητι τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν δείκνυσι τὴν ἰσότητα τῶν ὑποτεινομένων γωνιῶν ἀκολουθοῦσαν, ποτὲ δὲ τῇ ἀνισότητι καὶ αὖ πάλιν ἀντιστρόφως, τῇ μὲν ἰσότητι τῶν γωνιῶν τὴν ἀνισότητα ἀποφαίνων ἑπομένην, τῇ δὲ ἀνισότητι, τὴν ἰσότητα. ἀλλὰ ἤδη τὸ προκείμενον ἐλθόντων, ὅπως μὲν ὁ γεωμέτρης ἔδειξε τὸ θεώρημα, πρόδηλον ὄν, παρῶμεν ἐκ τῶν βιβλίων ἀναλέγεσθαι τοῖς φιλομαθέσιν. ἃς δὲ καὶ οἱ ἄλλοι κομίζουσιν ἀποδείξεις τοῦ αὐτοῦ συντόμως ἱστορήσωμεν. καὶ πρῶτον ἣν Μενέλαος ὁ Ἀλεξανδρεὺς ἀνεῦρε καὶ παρέδωκεν. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ ἀβγ δεζ ἴσας ἔχοντα τὰς αβ αγ δυσὶ ταῖς δε δζ, καὶ τὴν βγ μείζονα τῆς εζ, λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ α τῆς πρὸς τῷ δ μείζων. ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τῆς βγ τῇ εζ ἴση ἡ βκ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῷ β σημείῳ τῇ ὑπὸ δεζ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ κβθ, καὶ κείσθω ἴση τῇ δε ἡ βθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θκ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ βκ τῇ εζ, ἡ δὲ βθ τῇ εδ, δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἡ ἄρα κθ, ἴση τῇ δζ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βθκ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ ἴση τῇ δζ, ἡ δὲ δζ τῇ αγ, καὶ ἡ θκ ἴση τῇ αγ, μείζων ἄρα ἡ θλ, τῆς αγ, ὥστε τῆς ακ πολλῷ μείζων, καὶ ἡ ὑπὸ καθ, ἄρα μείζων τῆς ὑπὸ ακθ. πάλιν ἐπεὶ ἴση τῇ αβ ἡ βθ καὶ γὰρ τῇ δε, ἴση ἐστὶν, ἡ ὑπὸ βθα, ἴση τῇ ὑπὸ βαθ, ὅλη ἄρα, ἡ ὑπὸ βθκ, ἴση δέδεικται, τῇ πρὸς τῷ δ, ἡ ἄρα ὑπὸ βαγ, μείζων τῆς πρὸς τῷ δ γωνίας. τοιαύτη μὲν ἡ ἀπόδειξις ἡ Μενελάου. Ἥρων δὲ ὁ μηχανικὸς, οὑτωσὶ δι᾽ ἀδυνάτου τὸ αὐτὸ δείκνυσιν. ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ δεζ, καὶ αἱ ὑποθέσεις αἱ αὐταὶ ἔστωσαν. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ βγ, τῆς εζ ἐκβεβλήσθω ἡ εζ, καὶ κείσθω τῇ βγ ἴση ἡ εη, καὶ ὁμοίως ἐκβεβλήσθω ἡ δε, καὶ κείσθω τῇ δζ ἴση ἡ δθ. ὁ δὴ κέντρῳ τῷ δ, καὶ διαστήματι τῷ δζ κύκλος γραφόμενος ἥξει, καὶ διὰ τοῦ θ γεγράφθω ὡς ὁ ζκθ. καὶ ἐπεὶ αἱ αγ αβ τῆς βγ μείζους, αὗται δὲ ἴσαι τῇ εθ, καὶ ἡ βγ τῇ ηε, ὁ κέντρῳ τῷ ε γραφόμενος κύκλος διαστήματι δὲ τῷ εη, τέμνει τὴν εθ, τεμνέτω ὡς ηκλ. ἐπεζεύχθωσαν ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς αἱ κδ κε. ἐπεὶ οὖν τὸ δ κέντρον τοῦ θκζ, ἴση τῇ δθ ἡ δκ, τουτέστι τῇ δζ ἤ αγ. πάλιν ἐπεὶ κέντρον τὸ ε τοῦ ηκ, ἴση ἡ εκ τῇ εη, τουτέστι τῇ βγ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ αβ αγ δύο ταῖς δε δκ ἴσαι καὶ ἡ βγ τῇ εκ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ εδκ ἴση, μείζων ἄρα τῆς ὑπὸ ζδε ἡ ὑπὸ βαγ.





Ἐὰν δύο τρίγωνα δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει.) Τὸν τὰ τρίγωνα κατὰ τὰς πλευρὰς καὶ τὰς γωνίας, καὶ τὰ ἐμβαδὰ συγκρίναι βουλόμενον, ἀναγκαῖον, ἢ μόνας τὰς πλευρὰς λαβόντα ἴσας ζητεῖν τὴν ἰσότητα

τῶν

τῶν γωνιῶν, ἢ μόνας τὰς γωνίας ἴσας, ζητεῖν τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν, ἢ μίξαντα γωνίας καὶ πλευράς. μόνας μὲν οὖν γωνίας ἴσας λαβὼν, οὐκ ἠδύνατο δεικνῦναι καὶ τὰς πλευρὰς τῶν τριγώνων ἴσας. ἔστι γὰρ ἰσογώνια τρίγωνα καὶ τὰ σμικρότατα τοῖς μεγίστοις, καὶ ταῖς πλευραῖς καὶ τοῖς περιεχομένοις χωρίοις λειπόμενα τῶν ἑτέρων, τὰς γ γωνίας ἴσας ἔχοντα ἐκείνοις κατὰ μίαν. μόνας δὲ τὰς πλευρὰς ὑποθέμενος πάντα ἔδειξεν ἴσα κατὰ τὸ ὄγδοον θεώρημα, ἐν ᾧ δύο τρίγωνον δεῖν ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας δυσὶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν ἴσην τῇ βάσει. καὶ δείκνυται ἰσογώνια ταῦτα, καὶ ἴσων περιληπτικὰ χωρίων. καὶ ὁ στοιχειωτὴς τὴν προσθήκην ταύτην ἀφεῖλεν ὡς ἑπομένην ἐξ ἀνάγκης, καὶ ἀποδείξεως οὐ δεομένην διὰ τὸ τέταρτον. πλευρὰς δὲ καὶ γωνίας λαμβάνων ἢ μίαν πλευρὰν ὤφειλε λαβεῖν μιᾷ ἴσην, καὶ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἢ μίαν πλευράν, καὶ τὰς δύο γωνίας τῶν τριγώνων ἴσας, ἢ ἀνάπαλιν τῶν τριγώνων ἴσας μίαν γωνίαν, καὶ δύο πλευράς, ἢ μίαν γωνίαν καὶ τρεῖς πλευράς, ἢ μίαν πλευράν, καὶ τρεῖς γωνίας, ἢ καὶ πλείω μιᾶς πλευρᾶς λαμβάνειν καὶ πλείους μιᾶς γωνίας. ἀλλὰ μίαν γωνίαν καὶ μίαν πλευρὰν λαβὼν, οὐκ ἐδείκνυε τὸ προκείμενον τῶν ἄλλων τὴν ἰσότητα. δυνατὸν γοῦν δύο τρίγωνα κατὰ μόνην μίαν πλευρὰν ἴσα ὄντα καὶ μίαν γωνίαν παντάπασιν ἄνισα τοῖς λοιποῖς ὑπάρχειν. ἔστω γὰρ εὐθεῖα ἡ αβ ἑστῶσα ὀρθὴ ἐπὶ τὴν γδ, μείζων δὲ ἡ βγ, ἢ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ αγ, αδ, οὐκοῦν τοῖς τριγώνοις τούτοις, μία μὲν κοινὴ πλευρά, καὶ μία γωνία, μιᾷ ἴση, τὰ δὲ ἄλλα ἄνισα πάντα. μίαν δὲ πλευρὰν καὶ δύο γωνίας λαβεῖν ἔδει. καὶ δεῖξαι τὰ λοιπὰ ἴσα, καὶ τοῦτο ποιεῖ, διὰ τοῦδε τοῦ θεωρήματος. μίαν δὲ πλευρὰν καὶ τρεῖς γωνίας ἴσας ἔτι ὑποτίθεσθαι περιττόν. εἴπερ καὶ δύο μόνων ἴσων οὐσῶν, δέδεικται ἡ τῶν λοιπῶν ἰσότης. πάλιν μίαν γωνίαν καὶ δύο πλευρὰς λαβὼν, ἔδειξε τὰ ἄλλα ἴσα ἐν τῷ τετάρτῳ θεωρήματι. μίαν δὲ γωνίαν καὶ τρεῖς πλευρὰς ἴσας λαβεῖν περίεργον ἦν. καὶ γὰρ αἱ δύο μόναι ἴσαι ληφθεῖσαι συνῆγον τὴν ἰσότητα τῶν ἄλλων. καὶ μὴν καὶ τὸ δύο πλευρὰς καὶ δύο γωνίας ἴσας λαμβάνειν, ἢ δύο πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας ἴσας, ἢ δύο γωνίας καὶ τρεῖς πλευράς, πάντα ταῦτα περιττά. τὰ γὰρ ταῖς ἐλάττοσιν ὑποθέσεσιν ἑπόμενα πάντως ἀκολουθεῖ καὶ ταῖς πλείοσι, μόνον μετὰ τῶν δοθέντων προσδιορισμῶν λαμβανομένων τῶν ὑποθέσεων. τρεῖς οὖν ἡμῖν ἀνεφάνησαν ὑποθέσεις ἀποδείξεως δεόμεναι, ἥτε μόνας λαμβάνουσα τὰς τρεῖς πλευρὰς καὶ τὴν μίαν γωνίαν, καὶ ἡ ἀντίθετος πρὸς ταύτην ἡ τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς δύο γωνίας ἣν νῦν ὁ γεωμέτρης προστίθησιν. καὶ διὰ τοῦτο ταῦτα μόνα τὰ τρία θεωρήματα περὶ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ἔχομεν, τὴν ἐν ταῖς πλευραῖς καὶ ταῖς γωνίαις, τῶν ἄλλων πασῶν ὑποθέσεων, ἢ ἀδυνάτων οὐσῶν, δεῖξαι τὸ ζητούμενον, ἢ δυνατῶν μὲν, ἀλλὰ περιττῶν, τῷ διὰ τῶν ἐλαττόνων ὑποθέσεων τὰ αὐτὰ πεφυκέναι. ὥσπερ οὖν ὅτε δύο πλευρὰς ἐλάμβανεν ἴσας δυσὶ, καὶ γωνίαν μιᾷ μίαν ἴσην, οὐ τὴν τυχοῦσαν ἐλάμβανε γωνίαν, ἀλλ' ὡς αὐτὸς προσετίθει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, οὕτω καὶ δύο γωνίας ταῖς δυσὶ λαμβάνων ἴσας, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ, οὐ τὴν τυχοῦσαν λαμβάνει ταύτην, ἀλλ' ἢ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. οὔτε γὰρ γωνίαν ἐπὶ τοῦ τετάρτου ληφθεῖσαν ἴσην τὴν τυχοῦσαν, οὔτε πλευρὰν ἐπὶ τοῦ δε τοῦ θεωρήματος οἷόν τε δείκνυσθαι, τὰ λοιπὰ ἴσα δυνατόν. λέγω δὲ οἷον ὄντος ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ αβγ διῃρήσθω ἡ βγ εἰς ἄνισα τῇ αδ, γίγνεται ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς αβ αδ ταῖς αγ αδ ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ β τῇ πρὸς τῷ γ ἴσην, ἀλλ' οὐκέτι τὰ λοιπὰ ἴσα οἷον, ἡ βδ, τῇ δγ. ἄνισοι γὰρ ἀλλ' οὐδὲ αἱ λοιπαὶ ἴσαι. τὸ δὲ αἴτιον ὅτι γωνία γωνίᾳ ἴσην ἐλάμβανεν, οὐ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην. κατὰ ταῦτα δὴ καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα φανήσεται διαπίπτον, εἰ μὴ λάβοιμεν κατὰ τὸν εἰρημένον διορισμόν, ἴσην τὴν πλευρὰν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, ἢ τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις. ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ αβγ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῇ β γωνίαν, καὶ μείζονα τὴν βγ, τῆς βα, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ, καὶ συνεστάτω τῇ ὑπὸ βαγ γωνίᾳ ἴση πρὸς τῇ βγ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ, ἡ ὑπὸ βγδ, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ βδ γδ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ δ. δύο οὖν τρίγωνά ἐστι τὰ αβγ βγδ. ἔχοντα μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν βγ, καὶ δύο γωνίας δύο γωνίαις ἴσας, τὴν μὲν ὑπὸ αβγ τῇ ὑπὸ γβδ, τὴν δὲ ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ βγδ. οὕτως γὰρ συνέστησαν. ἴσα ἄρα ὡς ἔοικεν ἐστὶ τὰ τρίγωνα, καίτοι δείκνυται τὸ βδγ μεῖζον τοῦ αβγ. αὐτὸ

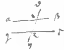
δὲ ὅτι τὴν βγ κοινὴν ἐλάβομεν ἐν μὲν τῷ αβγ ὑποτείνουσαν τὴν μὲν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν πρὸς τῷ α, ἐν δὲ τῷ βγδ πρὸς ταῖς ἴσαις οὖσαν γωνίαις. ἔδει δὲ ἄρα ἐν ἀμφοῖν, ἢ μίαν ὑποτείνειν τῶν ἴσων γωνιῶν, ἢ πρὸς ταῖς ἴσαις κεῖσθαι γωνίαις, τούτου δὲ μὴ φυλαττομένου, ἴδοι ἂν ἀφαινόμενον τὸ τρίγωνον, ὃ ἐστι μεῖζον ἐξ ἀνάγκης. πῶς γὰρ οὐ μεῖζον τὸ βγδ, τοῦ αβγ. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ βγ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ γ τῇ ὑπὸ αγβ ἴση, ἡ ὑπὸ ζγβ. μείζων γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ αγβ ἢ ὑπὸ βγδ, ὥσπερ καὶ ἡ πρὸς τῷ ε γωνία. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ αβγ βγζ, δύο γωνίας ἔχοντα, τὰς ὑπὸ αβγ βγα δυσὶν ἴσας, ταῖς ὑπὸ γβζ βγζ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν βγ, ἴσα ἐστὶ τὰ τρίγωνα, μεῖζον δὲ τὸ βγδ τοῦ βγζ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ αβγ. πρότερον δὲ ἴσον ἐδείκνυτο, διὰ τὴν λῆψιν τῆς τυχούσης πλευρᾶς. τοσαῦτα καὶ πρὸς τὴν τῶν προκειμένων ἀκρίβειαν ὁ Πορφύριος ἡμῖν συμβάλλεται. Εὔδημος δὲ ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς ἱστορίαις εἰς Θαλῆν τοῦτο ἀνάγει τὸ θεώρημα. τὴν γὰρ τῶν ἐν θαλάττῃ πλοίων ἀπόστασιν, δι' οὗ τρόπου φασὶν αὐτὸν δεικνύναι, τούτῳ προσχρῆσθαί φησιν ἀναγκαῖον. ἐκ δὲ τῆς προειρημένης διαιρέσεως συνοπτικῶς ληψόμεθα ἅπασαν τὴν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων θεωρίαν, καὶ τῶν παραλελειμμένων τὰς αἰτίας ἕξομεν λέγειν, ὡς ψευδεῖς τὰς ὑποθέσεις, ἢ ὡς περιττὰς ἐλέγχοντες, καὶ μέχρι τούτου πέρας ἔχειν θησόμεθα τῷ στοιχειωτῇ τὸ πρῶτον τμῆμα, τάς τε συστάσεις τῶν τριγώνων, καὶ τὰς συγκρίσεις κατὰ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον πεποιημένῳ. καὶ διὰ μὲν τῆς συστάσεως τὴν οὐσίαν αὐτῶν παραδεδωκότι, διὰ δὲ τῆς ἰσότητος τὴν ἑτερότητα. τρία γὰρ τὰ περὶ τὴν ὕπαρξιν, τὸ ταυτόν, καὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἐν ποσοῖς, καὶ ἐν ποιοῖς κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν ὑποκειμένων. δείκνυται οὖν ἐκ τούτων ὡς εἰκόνων ὅτι καὶ ἕκαστον ἑαυτῷ ταυτόν ἐστι καὶ ἑαυτοῦ ἕτερον, διὰ τὸ ἐν αὐτῷ πλῆθος, καὶ πάντα ταυτὰ ἀλλήλοις καὶ ἕτερα ἀλλήλων. καὶ γὰρ ἐφ' ἑνὸς ἑκάστου τῶν τριγώνων εὕρηται, τὸ ἴσον καὶ ἄνισον καὶ ἐπὶ πλειόνων ἑνός.

Τέλος τοῦ τρίτου.

ΠΡΟΚΛΟΥ ΔΙΑΔΟΧΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

ΠΕΡΙ μὲν δὴ τῆς τῶν τριγώνων γενέσεώς τε καὶ ἰσότητος, ἢ ἀνισότητος ὅσα δυνατὸν ὡς ἐν στοιχειώσει λέγειν ἐκ τῶν εἰρημένων μεμαθήκαμεν. περὶ δὲ τῶν τετραπλεύρων ἐφεξῆς ὁ Εὐκλείδης διέξεισι. προηγουμένως μὲν περὶ τῶν παραλληλογράμμων ἡμᾶς διδάσκων, τῇ δὲ τούτων θεωρίᾳ συνεπιφέρων καὶ τὴν περὶ τῶν τραπεζίων διδασκαλίαν. διήρηται γὰρ ὥς που καὶ πρότερον ἐν ταῖς ὑποθέσεσιν εἴπομεν τὸ τετράπλευρον, εἴς τε τὸ παραλληλόγραμμον. καὶ τὸ τραπέζιον, καὶ τὸ παραλληλόγραμμον, εἰς ἕτερα ἄττα εἴδη, καὶ τὸ τραπέζιον ὡσαύτως. ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον διὰ τὴν τῆς ἰσότητος μετουσίαν τεταγμένον ἐστί, τὸ δὲ τραπέζιον οὐ τὴν αὐτὴν οὐδὲ ὁμοίαν ἔχει τὴν τάξιν, προηγουμένως μὲν εἰκότως αὐτῷ τῶν παραλληλογράμμων ὁ λόγος ἀπεργάζεται. συνθεωρεῖται δὲ τούτοις καὶ τὸ τραπέζιον. ἀναφανήσεται γὰρ ἐκ τῆς τῶν παραλληλογράμμων τομῆς, ἡ τῶν τραπεζίων γένεσις, ὡς ἔσται προϊοῦσιν ἡμῖν γνώριμον. ἀλλ᾽ ἐπειδήπερ πάλιν ἀδύνατον εἰπεῖν τι περὶ τῆς τῶν παραλληλογράμμων, ἢ συστάσεως, ἢ ἰσότητος, ἄνευ τῆς τῶν παραλλήλων θεωρίας. ὡς γὰρ καὶ ἐκ τοῦ ὀνόματος δῆλον παραλληλόγραμμόν ἐστιν, τὸ ὑπὸ παραλλήλων τῶν ἀπεναντίον κειμένων εὐθειῶν περιγραφόμενον, ἐντεῦθεν ἀναγκαίως ἀπὸ τῶν παραλλήλων ποιεῖται τὴν ἀρχὴν τῆς διδασκαλίας, καὶ μετὰ βραχὺ προϊὼν ἀπὸ τούτων, εἰς τὴν τῶν παραλληλογράμμων εἰσβάλλει. ἐν μέσῳ χρησάμενος θεωρήματι, τῷ τε τούτων καὶ τῆς ἐκείνων στοιχειώσεως. ὃ δοκεῖ μὲν σύμπτωμα ταῖς παραλλήλοις ὑπάρχον θεωρεῖν. γένεσιν δὲ πρώτην παραλληλογράμμων παραδίδωσιν. τοιοῦτον γάρ ἐστι, τὸ αὐτὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἐν γὰρ τούτῳ θεωρεῖται μέν τι ταῖς ἴσαις καὶ παραλλήλοις συμβεβηκός. ἐκ δὲ τῆς ἐπιζεύξεως ἀναφαίνεται τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ἴσας ἔχον καὶ παραλλήλους τὰς ἀπεναντίον κειμένας πλευράς. ὅτι μὲν οὖν ἀναγκαίως ὁ τῶν παραλλήλων λόγος προείληπται δῆλον ἐκ τούτων. τρία δέ ἐστιν ἀναλαμβάνειν ταῖς παραλλήλοις ὑπάρχοντα καθ᾽ αὑτά, καὶ αὐτοχαρακτηριστικά τε αὐτῶν, καὶ ἀντιστρέφοντα πρὸς αὐτάς. οὐ μόνον τὰ τρία ἅμα, ἀλλὰ καὶ ἕκαστον ἀποδιαληφθὲν τῶν λοιπῶν. ὧν τὸ μέν ἐστιν εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσας εἶναι τὰς ἐναλλάξ, τὸ δὲ εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους, ἴσας εἶναι τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς. τὸ δὲ λοιπὸν εὐθείας τεμνούσης τὰς παραλλήλους ἴσην εἶναι τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. ἕκαστον γὰρ τῶν συμπτωμάτων τούτων, ἱκανὸν ἀποδειχθὲν παραλλήλους ἀποφῆναι τὰς εὐθείας. τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εἰώθασι καὶ οἱ ἄλλοι μαθηματικοὶ διαλέγεσθαι περὶ τῶν γραμμῶν, ἑκάστου εἴδους τὸ σύμπτωμα παραδιδόντες. καὶ γὰρ Ἀπολλώνιος ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν κωνικῶν γραμμῶν τί τὸ σύμπτωμα δείκνυσι, καὶ ὁ Νικομήδης ἐπὶ τῶν κογχοειδῶν, καὶ ὁ Ἱππίας ἐπὶ τῶν τετραγωνιζουσῶν, καὶ ὁ Περσεὺς ἐπὶ τῶν σπειρικῶν. μετὰ γὰρ τὴν γένεσιν τὸ καθ᾽ αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτὸ ὑπάρχει ληφθέν, ἀφορίζει τὸ συστὰν ἡμῖν εἶδος, ἀπὸ τῶν ἄλλων ἁπάντων. ἐπεὶ τὰ αὐτὰ δὴ οὖν καὶ ὁ στοιχειωτὴς τὰ συμπτώματα τῶν παραλλήλων ἀνευρίσκει πρῶτον. ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἀλλήλαις ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ἐπὶ τῶν ὁμολογουμένων προείληπται τὸ εἶναι τὰς εὐθείας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. μᾶλλον δὲ ἐπὶ πάντων τῶν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ θεωρημάτων. τοῦτο δὲ προσέθηκεν, διὰ τὸ μὴ πάντως τῶν ἐναλλὰξ ἴσων οὐσῶν, παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας. εἰ μὴ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ εἶεν ἐπιπέδῳ. κωλύει γὰρ οὐδέν, οἷον χιαστὶ τῶν εὐθειῶν κειμένων, τῆς μὲν ἐν ἄλλῳ τῆς δὲ ἐν ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ἐμπίπτουσαν εἰς αὐτὰς εὐθεῖαν, ἴσας ποιεῖν τὰς ἐναλλάξ, ἀλλ᾽ οὐ παράλληλοι αἱ οὕτως κείμεναι. προείληπται οὖν ὅτι πάντα ὅσα καταγράφομεν τῷ ἐπιπέδῳ, πραγματείᾳ περὶ ἓν καὶ ταυτὸν ἐπίπεδον φανταζόμεθα. διόπερ οὐκ ἐδεήθη καὶ ταύτης τῆς προσθήκης. αὐτὸ δὲ δὴ τὸ ἐναλλάξ, ἴστεον ὅτι διχῶς ὁ γεωμέτρης παραλαμβάνει. ποτὲ μὲν κατὰ τὴν τοιάνδε θέσιν. ποτὲ δὲ κατὰ τὴν τοιάνδε τῶν λόγων ἀκολουθίαν. καὶ κατὰ μὲν τοῦτο τὸ σημαινόμενον, ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς χρῆται τῷ ἐναλλάξ. κατὰ δὲ τὸ ἕτερον, ἔν τε τούτῳ καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις ἅπασι βιβλίοις ἐπὶ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, καὶ τῆς εἰς ταύτας ἐμπιπτούσης-

τῆς



τὰς γὰρ γωνίας τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ γιγνομένας, μὴ δὲ ἐφεξῆς ἀλλήλαις κειμένας, ἀλλὰ διῃρημένας μὲν ὑπὸ τῆς ἐμπιπτούσης, ἐντὸς δὲ ἀμφοτέρας τῶν παραλλήλων, διαφερούσας δὲ τῷ τὴν μὲν ἄνω κεῖσθαι τὴν δὲ κάτω, τὰς ἐναλλὰξ προσαγορεύει. λέγω δὲ οἷον εὐθειῶν οὐσῶν τῶν αβ καὶ γδ, καὶ ἐμπιπτούσης εἰς αὐτὰς τῆς εζ, ἐναλλάξ εἶναί φησι τὰς ὑπὸ αεζ καὶ δζε. καὶ πάλιν τὰς ὑπὸ γζε καὶ βεζ. ὡς ἐναλλαγμένως ἐχούσας κατὰ τὴν θέσιν. δεῖ δὲ εἰδέναι ἐκεῖνο ὅτι τοιαύτης οὔσης θέσεως τῶν εὐθειῶν, ἑκὰς ἱκανῶς ἑξ τὰ πάντα γίνεται συμπτώματα. ὧν τὰ τρία μόνον ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν, τρία δὲ παρῆκεν. ἢ γὰρ ἐπὶ ταῦτα μέρη λαμβάνομεν τὰς γωνίας ἢ οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτά. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἢ ἀμφοτέρας ἐντὸς τῶν εὐθειῶν, ἃς ἀποδείκνυσιν ὁ λόγος παραλλήλους, ἢ ἀμφω ἐκτὸς, ἢ τὴν μὲν ἐκτὸς τὴν δὲ ἐντὸς. καὶ εἰ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, πάλιν ὡσαύτως, ἢ ἐκτὸς ἀμφοτέρας τῶν τεμνομένων εὐθειῶν ἀνάγκη λαμβάνειν, ἢ ἐντὸς, ἢ τὴν μὲν ἐντὸς τὴν δὲ ἐκτὸς. γιγνέσθω δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς σαφὲς τὸ λεγόμενον. καὶ ἔστωσαν εὐθεῖαι δύο αἱ αβ γδ, καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ θκ. εἰ μὲν οὖν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λάβοι τὰς γωνίας, ἢ ἐντὸς ἀμφω θήσεις, ὡς τὰς ὑπὸ βεζ καὶ εζδ. ἢ τὰς ὑπὸ αεζ καὶ εζγ. ἢ ἐκτὸς ἀμφω, ὡς τὰς ὑπὸ θεβ καὶ δζκ, ἢ τὰς ὑπὸ θεα, καὶ γζκ. ἢ τὴν μὲν ἐντὸς, τὴν δὲ ἐκτὸς, ὡς τὰς ὑπὸ θεβ καὶ εζδ, ἢ τὰς ὑπὸ κζγ, καὶ αεζ. τετραχῶς γὰρ αὗται ληφθήσονται. εἰ δὲ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς γωνίας λαμβάνοις, ἢ ἐντὸς αὐτὰς θήσεις, ὡς τὰς ὑπὸ αεζ, καὶ ὑπὸ εζδ, ἢ τὰς ὑπὸ γζε καὶ ζεβ. ἢ ἐκτὸς ἀμφοτέρας ὡς τὰς ὑπὸ αεθ καὶ δζκ, ἢ τὰς ὑπὸ θεβ καὶ γζκ ἢ τὴν μὲν ἐντὸς, τὴν δὲ ἐκτὸς, καὶ τοῦτο τετραχῶς πάλιν. ἢ γὰρ τὰς ὑπὸ αεθ καὶ εζδ, ἢ τὰς ὑπὸ θεβ καὶ κζγ, ἢ τὰς ὑπὸ κζγ, καὶ ζεβ ἢ τὰς ὑπὸ κζδ καὶ ζεα θήσεις, καὶ παρὰ ταύτας ἄλλη λῆψις οὐκ ἔστι. ἑξαχῶς οὖν λαμβανομένων τῶν γωνιῶν, ὁ γεωμέτρης τρεῖς μόνας ἐπελέξατο. καὶ ταῦτα εἰς τὰ ἑπόμενα συμπτώματα τῶν παραλλήλων πεφηνότα χαρακτηριστικά. τούτων δὲ τῶν τριῶν μία μὲν ἐστιν ἐκ τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐκ μὲν τῶν ἐντὸς ληφθεισῶν μόνον, ἃς καὶ ἐκάλεσεν ἐναλλάξ, ὡς παραλελεῖφθαι τὰς ἐκτὸς οὔσας ἀμφοτέρας, καὶ τὴν μὲν ἐκτὸς τὴν δὲ ἐντὸς. ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτά, τῶν δὲ ἐντὸς ἀμφοτέρων ἃς δυσὶν ὀρθαῖς εἶναί φησιν ἴσας, καὶ ὧν ἡ μὲν ἐστιν ἐντὸς, ἡ δὲ ἐκτὸς, ἃς εἶπεν ἴσας εἶναι. ὑπολειπομένης δὲ μιᾶς λήψεως τῆς ἐκτὸς ἀμφοτέρας ὑποτιθεμένης. ἡμεῖς οὖν φαμὲν ὅτι καὶ ταῖς παραληφθείσαις τρισὶν ὑποθέσεσιν τὰ αὐτὰ ἕπεται. ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἀμφω ἐκτὸς αἱ θεβ δζκ, λέγω δὲ ὅτι αὗται δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ δζε ἴση τῇ ὑπὸ θεβ καὶ ἡ ὑπὸ βεζ τῇ ὑπὸ δζκ, αἱ δὲ αἱ ὑπὸ βεζ εζδ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ αἱ ὑπὸ δζκ θεβ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη αἱ γωνίαι, ὧν ἡ μὲν ἐντὸς ἡ δὲ ἐκτὸς αἱ αεθ καὶ εζδ, λέγω ὅτι καὶ αὗται δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. εἰ γὰρ ἡ ὑπὸ αεθ ἴση τῇ ὑπὸ βεζ, αἱ δὲ ὑπὸ βεζ καὶ εζδ δύο ὀρθαί εἰσιν. καὶ αἱ ὑπὸ αεθ καὶ εζδ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. πάλιν ἔστωσαν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀμφω δὲ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν ὡς αἱ αεθ δζκ, λέγω ὅτι αὗται ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ αεθ καὶ βεζ ἴσαι ἀλλήλαις, ἡ δὲ ὑπὸ δζκ, τῇ ὑπὸ βεζ, ἡ ὑπὸ αεθ ἄρα ἴση τῇ ὑπὸ δζκ γωνίᾳ. Ἐὰν ἄρα ληφθῇ τὰ ἐπὶ τῶν τριῶν ὑποθέσεων ἃς ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν ἑπόμενα, ὡς ἀληθῆ πάντα τὰ αὐτά, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν. πλὴν ὅτι ἐφ᾽ ὧν μὲν ὁ γεωμέτρης ἔλαβεν κατὰ δύο μὲν λήψεις ὑπόκεινται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ γωνίαι, κατὰ μίαν δὲ δυσὶν ὀρθαῖς αἱ γωνίαι. ἐπὶ δὲ τούτων ἀνάπαλιν, κατὰ δύο μὲν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ μίαν δὲ ἀλλήλαις. ἐξ γὰρ οὐσῶν πασῶν τῶν λήψεων, ἐκ μὲν τῶν τριῶν συμβαίνει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι τὰς γωνίας, ἐκ δὲ τῶν τριῶν ἴσας ἀλλήλαις. ὥστε εἰκότως αἱ παραλελειμμέναι ταῖς μνήμης ἠξιωμέναις λήψεσιν ἀνάπαλιν ἔχουσιν. ἔοικεν δὲ ὁ γεωμέτρης ταύτας ἐκλέξασθαι τῶν ὑποθέσεων, ὅσαι ἢ κατὰ τὸ φαινόμενον πλεονάζον ἔχουσιν, ἢ ἁπλούστεραί εἰσιν. καὶ διὰ τοῦτο λαβεῖν * τῶν μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά, μόνας τὰς ἐντὸς ἃς δὴ κέκληκεν ἐναλλάξ, ἐκ δὲ τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐκτός. τὰς δὲ ἄλλας διὰ ἀποφάσεως μᾶλλον δηλουμένας, ὡς ποικιλωτέρας φυλάξασθαι. ἀλλ᾽ οὖν εἴτε ταύτην εἴτε ἄλλην αἰτίαν ῥητέον, δῆλον ἐκ τούτων πῶς δεῖ τὰ ἑπόμενα αὐτοῖς.

κη'

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας παράλληλοι

παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. τὸ δὲ πρὸ τούτου θεώρημα τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας λαμβάνον ἐντὸς δὲ τῶν εὐθειῶν κειμένας ἀλλήλαις ἴσας ἐδείκνυ παραλλήλους οὔσας τὰς εὐθείας, τοῦτο δὲ τὰς λοιπάς, δύο ὑποθέσεις προστίθησιν, ὧν ἡ μὲν τὰς γωνίας μερίζει ἐπὶ τὸ ἐντὸς καὶ ἐκτός, ἡ δὲ ἀμφοτέρας ἐντὸς ὑποτίθεται καὶ δείκνυσι τὸ αὐτὸ συμπέρασμα. ἐδύνατο δ' ἂν ἑτέρως ὁ στοιχειωτὴς τὰ θεωρήματα μερίσαι. ἦν γὰρ ἐπὶ τὰς τρεῖς ὑποθέσεις διαλαβεῖν καὶ ποιῆσαι τρία θεωρήματα, ἢ εἰς ἓν συναγαγεῖν πάσας θεώρημα. ὥσπερ ἐποίησεν ὁ Ἱεραπολίτης Αἰνείας, ὁ τὴν ἐπιτομὴν γράψας τῶν στοιχείων. ἢ διελεῖν εἰς δύο βουλόμενον οὕτω ποιήσασθαι τὴν διαίρεσιν, καὶ χωρὶς μὲν λαβεῖν τὰς ὑποθέσεις, ἐφ' ὧν ἴσαι εἰσὶν αἱ γωνίαι, χωρὶς δὲ ἐκείνην ἐφ' ἧς δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. νῦν δὲ ἐν ἑνὶ μὲν θεωρήματι τὰς ἐναλλὰξ ἴσας ὑπέθετο, ἐν ἑνὶ δὲ τὴν ἐκτὸς καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας. τί οὖν τὸ αἴτιον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως; εἰ οὖν πρὸς τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ἀπέβλεψεν τὴν πρὸς ἀλλήλας, ἢ τὴν πρὸς τὰς δύο ὀρθάς, οὐδὲ ταύτῃ διέστησεν τὰ προκείμενα θεωρήματα ἀπ' ἀλλήλων, ἀλλὰ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ τὰς γωνίας ἢ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη λαμβάνεσθαι, ἢ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτά. τὸ μὲν γὰρ πρὸ τούτου, τὰς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ παρελάμβανε. τοιαῦται γὰρ αἱ ἐναλλάξ, τοῦτο δὲ τὰς ἐπὶ τὰ αὐτά ὡς καὶ ἐκ τῆς προτάσεως δῆλον. ἀλλ' ὅπως μὲν ὁ στοιχειωτὴς δείκνυσιν ὅτι δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντὸς αἱ εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, φανερὸν ἐκ τῶν γεγραμμένων. Πτολεμαῖος δὲ ἐν οἷς ἀποδεῖξαι προὔθετο τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάττονες, πρὸ πάντων δεικνὺς τὸ θεώρημα τὸ δυοῖν ὀρθῶν ἴσων ὑπαρχουσῶν τῶν ἐντὸς παραλλήλους εἶναι τὰς εὐθείας, οὕτω πως δείκνυσιν. ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΕΖΗΘ. ὥστε τὰς ὑπὸ ΒΖΗ καὶ ὑπὸ ΖΗΔ γωνίας, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν, λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι, τουτέστιν ἀσύμπτωτοί εἰσιν. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτωσαν ἐκβαλλόμεναι αἱ ΒΖ ΗΔ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΕΖ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν ΑΒ, δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ ΑΖΕ ΒΖΕ γωνίας. ὁμοίως δὲ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ἐφέστηκεν ἐπὶ τὴν ΓΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ τὰς ὑπὸ ΓΗΖ ΔΗΖ γωνίας. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΖΕ ΒΖΕ ΓΗΖ ΔΗΖ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ δύο αἱ ὑπὸ ΒΖΗ ΖΗΔ δύο ὀρθαῖς ὑπόκεινται ἴσαι. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ καὶ αὐταὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι. εἰ οὖν αἱ ΖΒ ΗΔ δύο ὀρθῶν οὐσῶν τῶν ἐντὸς ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. δύο γὰρ ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ ΑΖΗ ΓΗΖ εἰσίν. ἢ γὰρ κατ' ἀμφότερα συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι, ἢ κατ' οὐδέτερα, εἴπερ καὶ αὗται κἀκεῖναι, δύο ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. συμπιπτέτωσαν οὖν αἱ ΖΑ ΗΓ κατὰ τὸ Λ. αἱ ἄρα ΛΑΖΚ ΛΓΗΚ εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι δύο ὀρθαῖς ἴσων οὐσῶν τῶν ἐντός, συμπίπτειν τὰς εὐθείας. παράλληλοι ἄρα εἰσίν.

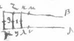
Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας.)

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἀμφοτέροις ἀντιστρέφει τοῖς προειρημένοις θεωρήμασι. τὸ γὰρ ἐν ἑκατέρῳ ζητούμενον ὑπόθεσιν ποιεῖται, τὰ ἐν ἐκείνοις δεδομένα δεικνῦναι προτίθεται. καὶ δεῖ μεμνῆσθαι καὶ τῆς τοιαύτης τῶν ἀντιστρόφων διαφορᾶς, ὅτι πᾶν τὸ ἀντιστρέφον, ἢ ἐν ἑνὶ ἀντιστρέφει, ὡς τῷ πέμπτῳ τὸ ἕκτον, ἢ πλείοσιν ἐν ὡς τὸ νῦν προκείμενον τοῖς πρὸ αὐτοῦ. ἐν δὲ τούτῳ τῷ θεωρήματι πρώτῳ ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο τούτῳ τῶν αἰτημάτων, τῷ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ συμπίπτειν τὰς εὐθείας ἐκβαλλομένας, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ δεικνύμενον τὰ πρὸ τῶν θεωρημάτων λεγόμενον, ὡς οὐ παρὰ πάντων ὅπερ συγκεχώρηται εἶναι ἀναποδείκτως ὁμολογούμενον. καὶ πῶς γὰρ ἂν εἴη τοιοῦτον, οὗ τὸ ἀντίστροφον ὡς ἀποδεικτὸν ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀναγέγραπται. τὸ γὰρ παντὸς τριγώνου δύο τὰς ἐντὸς γωνίας ἐποίει δεῖν ἐλάσσους εἶναι δύο ὀρθῶν ἀντίστροφόν ἐστι τῷ αἰτήματι τούτῳ. ἐπεὶ καὶ συννεύειν τὰς εὐθείας ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐκβαλλομένας, οὐκ ἔστι τεκμήριον τοῦ συμπτώσεως, διὰ τὸ καὶ ἄλλας εὑρῆσθαι γραμμὰς συννευούσας μὲν ἀεὶ πλέον καὶ πλέον, συμπιπτούσας δ' οὐδέποτε, καθὼς καὶ εἴρηται πρότερον. ἤδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφθὲν, ἀποδείξεως ἠξίωσαν. δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος αὐτὸ δεδειχέναι ἐν τῷ περὶ τοῦ τὰς ἀπ' ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. καὶ δείκνυσι πολλὰ προλαβὼν τῶν μέχρι τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων, καὶ ὑποκείσθω

πάντα

πάντα ἐστὶν ἀληθῆ, ἵνα μὴ καὶ ἡμεῖς ὄχλον ἐπισωρεύωμεν ἄλλον. καὶ ὡς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσι διὰ τῶν προειρημένων. ἓν δὲ καὶ τοῦτο τῶν προδεδειγμένων, τὸ τὰς ἀπὸ δυεῖν ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλομένας μηδαμῶς συμπίπτειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀληθές. καὶ τὸ παραλλήλων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. ἀνάγκη γὰρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλήλους, ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. ἔστωσαν οὖν παράλληλοι αἱ αβ γδ, καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ ζη. λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ αζη γηζ δύο ὀρθῶν μείζους, αἱ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ βζη δηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. ἀλλὰ καὶ δύο ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί. οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ αζ γη παράλληλοι ἢ αἱ ζβ ηδ. ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς αζ γη δύο ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντὸς, καὶ ἡ εἰς τὰς ζβ ηδ ἐμπίπτουσα δύο ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντὸς, ἀλλ' αἱ αὐταὶ καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ αζη γηζ βζη δηζ, τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ δείξομεν. ὅτι εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. εἰ δὲ μήτε μείζους μήτε ἐλάσσους ποιεῖ τῶν δύο ὀρθῶν, λείπεται τὴν ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. τούτου δὴ ὄντος προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβητήτως ἀποδείκνυται. λέγω γὰρ ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. μὴ γὰρ συμπιπτέτωσαν, ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἐφ' ἃ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα ἐφ' ἃ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ' ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, εἰ δὲ τοῦτο, παράλληλοί εἰσιν. ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον. ταῦτα προδεδειχὼς ὁ Πτολεμαῖος καὶ καταντήσας εἰς τὸ προκείμενον, ἀκριβέστερόν τι προσθεῖναι βούλεται καὶ δεῖξαι. ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθῶν ποιεῖ ἐλάσσονας, οὐ μόνον οὐκ εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι ὡς δέδεικται, ἀλλὰ καὶ ἡ σύμπτωσις αὐτῶν κατ' ἐκεῖνα γίνεται τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, οὐκ ἐφ' ἃ αἱ μείζονες. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ ζη, ποιείτω τὰς ὑπὸ αζη καὶ ὑπὸ γηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους, αἱ λοιπαὶ ἄρα μείζους δύο ὀρθῶν. ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι δέδεικται. εἰ δὲ συμπίπτουσιν, ἢ ἐπὶ τὰ αγ συμπεσοῦνται, ἢ ἐπὶ τὰ βδ. συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ κατὰ τὸ θ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ αζη, καὶ γηζ δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ αζη βζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ γηζ, ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ βζη. τριγώνου ἄρα τοῦ ηζθ, ἡ ἐκτὸς, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. ἀλλὰ μὴν συμπίπτουσιν, κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται καθ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Πτολεμαῖος. ἐφιστάνειν δὲ ἄξιον μή ποτε παραλογισμός τις ἐστὶν ἐν ταῖς εἰλημμέναις ὑποθέσεσιν, λέγω δὲ ἐν ἐκείναις ἐν αἷς ἔλεγεν ὅτι τῆς τεμνούσης εὐθείας τὰς ἀσυμπτώτους τέσσαρας ἐντὸς γωνίας ποιούσης, αἱ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἢ δύο ὀρθῶν μείζους ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. οὐ γὰρ τελεία ἡ διαίρεσις. κωλύει γὰρ οὐδὲν τὸν ἀσυμπτώτους λέγοντα τὰς ἀπ' ἐλασσόνων δυοῖν ὀρθαῖς ἐκβαλλομένας, τὰς μὲν τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο ὀρθῶν μείζους λέγειν, τὰς δὲ ἐπὶ θάτερα δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, καὶ οὐχ ἕνα περὶ τούτων ἀποδέχεσθαι λόγον, ἀτελοῦς δὲ οὔσης τῆς διαιρέσεως οὐκ ἀποδέδεικται τὸ προκείμενον. ἔστι δὲ κἀκεῖνο πρὸς τὴν δεῖξιν ῥητέον. ὅτι οὐ καθ' αὑτὸ δείκνυσι τὸ ἀδύνατον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ παραλλήλους τέμνουσα τὶς εὐθεῖα μείζους ἐποίησεν τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ κατ' ἀμφότερα μέρη δύο ὀρθῶν ἐλάσσους, διὰ τοῦτο ἀκολουθεῖ τὸ ἄτοπον ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν, ἀλλ' ἐπειδὴ τέσσαρες τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἐντὸς τῶν τεμνομένων, διὰ τοῦτο ἀδύνατος ἑκατέρα τῶν ὑποθέσεων τούτων. ἐπεὶ ἐὰν μὴ παραλλήλους τις λάβῃ τὰς εὐθείας, τὰ αὐτὰ ἀκολουθήσει τῶν ὑποθέσεων τῶν αὐτῶν εἰλημμένων. πρὸς μὲν οὖν Πτολεμαῖον ταῦτα λέγοντες ἐνιστάμεν. φανερὰ γὰρ ἡ τῆς δείξεως ἀσθένεια διὰ τῶν εἰρημένων. φέρε δὴ κἀκείνους ἐπισκεψώμεθα τοὺς λέγοντας, ἀδύνατον εἶναι τὰς ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο

ὀρθῶν



ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. λαβόντες γὰρ εὐθείας δύο τὰς αβ γδ, καὶ ἐμπίπτουσαν εἰς αὐτὰς τὴν αγ καὶ ποιοῦσαν τὰς ἐντὸς δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας, οἴονται δεικνύναι μὴ συμπιπτούσας τὰς αβ γδ. διῃρήσθω γὰρ δίχα ἡ αγ κατὰ τὸ ε, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τῆς αβ ἴση τῇ αε ἡ αζ, ἀπὸ δὲ τῆς γδ ἴση τῇ εγ ἡ γη. δῆλον ἄρα ὅτι αἱ αζ γη οὐ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ ζη. εἰ γὰρ συμπεσοῦνται, ἔσονται αἱ δύο τῇ αγ ἴσαι ἐν τριγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον. πάλιν ἐπεζεύχθω δίχα κατὰ τὸ θ καὶ ἴσαι ἀφῃρήσθωσαν, οὐδὲ αὗται ἄρα συμπεσοῦνται διὰ τὰ αὐτά, καὶ τοῦτο εἰς ἄπειρον ποιούντων ἐπιζευγνύντων τὰ ἀσύμπτωτα σημεῖα, καὶ τὴν ἐπιζευγνυμένην διχοτομούντων, καὶ ἴσας ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ταῖς ταύταις ἡμίσεσιν ἀφαιρούντων, δεικνύναι φασὶν ὅτι οὐδαμοῦ συμπίπτουσιν αἱ αβ γδ εὐθεῖαι. τούτων δὴ τοιαῦτα λεγόντων, ῥητέον ἡμῖν, ὅτι λέγουσι μέν τοι ἀληθές, οὐ μήν τοι ὅσον γε οἴονται. ὅτι μὲν γὰρ ὁρίσαι τὸ σημεῖον τῆς συμπτώσεως ἁπλῶς οὕτως οὐκ ἔστιν, ἀληθές. οὐ μήν τοι τὸ μηδέν ποτε συμπίπτειν αὐτὰς ἀληθές. μὴ συμπιπτέτωσαν γὰρ αἱ αβ γδ τῆς ὑπὸ αβγ καὶ ὑπὸ δγα γωνίας ὡρισμένης κατὰ τὸ ζ καὶ τὸ η. ἀλλ᾽ οὐδὲν κωλύονται κατὰ τὰ κλ συμπεσεῖν καὶ ἴσαι ὦσιν αἱ ζη κλ ταῖς ζθ θη. τῶν γὰρ ακ γλ συμπιπτουσῶν κατὰ τὰ κλ οὐκέτι μένουσιν αἱ ὑπὸ κζθ ληθ γωνίαι αἱ αὐταί. καὶ γίνεταί τι τῆς ζη ἐκτὸς τῶν ακ γλ εὐθειῶν. καὶ οὕτως αἱ δύο πάλιν αἱ ζη κλ μείζους τῆς βάσεως, ὅσην ἀπολαμβάνουσιν ἐντὸς τῆς ζη εὐθείας. ἔτι δὲ κἀκεῖνο ῥητέον ἀδιορίστως αὐτῶν λεγόντων τὰς ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας μὴ συμπίπτειν, ὅτι ἀναιροῦσιν καὶ ἃ μὴ βούλονται. ἔστω γὰρ ἡ καταγραφὴ ἡ αὐτή. πότερον οὖν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ἐπὶ τὸ η ἐπιζεῦξαι εὐθεῖαν, ἢ οὐ δυνατόν. εἰ μὲν γὰρ ἀδύνατον, τῷ πρώτῳ αἰτήματι προσαναιροῦσιν, καὶ τὸ πρῶτον τὸ ἀπὸ παντὸς σημείου λέγον ἐξεῖναι ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν ἀγαγεῖν. εἰ δὲ δυνατόν, ἐπεζεύχθω. ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ζαγ ηγα ἐλάσσους εἰσὶν δύο ὀρθῶν, δῆλον ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ηαγ ηγα πολλῷ μᾶλλον ἐλάσσους εἰσὶν τῶν δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα γη αη συμπεπτώκασιν κατὰ τὸ η ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἐκβεβλημέναι δύο ὀρθῶν. οὐκ ἄρα δυνατὸν λέγειν ἀδιορίστως τὰς ἀπ᾽ ἐλασσόνων δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. ἀλλ᾽ ὅτι μὲν τινὲς εὐθεῖαι συμπίπτουσιν ἀπ᾽ ἐλασσόνων δύο ὀρθῶν ἐκβληθεῖσαι, δῆλον. εἰ καὶ πᾶσαι, τοῦτο ζητεῖν ἔοικεν ὁ λόγος. εἴποι γὰρ ἀορίστου τῆς ἐλαττώσεως οὔσης τῶν δύο ὀρθῶν, κατὰ μὲν τὴν τοσήνδε ἐλάττωσιν ἀσυμπτώτους μένειν τὰς εὐθείας, κατὰ δὲ ἄλλην τὴν ταύτης ἐλάσσονα συμπίπτειν. πρὸς δὲ τὴν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἰδεῖν, λεγέσθω παρ᾽ ἡμῶν, ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον. ᾧ καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον. ἐὰν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλονται εὐθεῖαι, γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ᾽ ἄπειρον, παντὸς πεπερασμένου μεγέθους ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπείρων οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων, ἄπειρον τὸ μεταξύ. πεπερασμένου γὰρ ὄντος αὔξησαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον, ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους, μεῖζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ᾽ ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι. τούτου δὴ προϋποτεθέντος, λέγω ὅτι ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τις εὐθεῖα τεμεῖ, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ ἡ ζη. λέγω ὅτι τὴν γδ τεμεῖ. ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαί εἰσιν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τοῦ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ βζ ζη, παντὸς μεγέθους μείζονα ἕξουσι διάστασιν, ὥστε καὶ τούτου ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων. ὅταν οὖν μεῖζον ἀλλήλων διαστῶσιν τῆς τούτων διαστάσεως, τεμεῖ ἡ ζη τὴν γδ. ἐὰν ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνῃ τις εὐθεῖα, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. τούτου προαποδειχθέντος, ἀκολούθως δείξομεν τὸ προκείμενον. ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ, καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ ἐλάσσονας δύο ὀρθῶν ποιοῦσα τὰς ὑπὸ βεζ δζε, λέγω ὅτι συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσους. ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ βεζ δζε ἐλάσσους εἰσὶν δύο ὀρθῶν, τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο ὀρθῶν ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ θεβ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ θε ἐπὶ τὸ κ. ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς κθ γδ ἐμπέπτωκεν ἡ εζ καὶ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας, τὰς ὑπὸ θεζ δζε, παράλληλοί εἰσιν αἱ θκ γδ εὐθεῖαι. καὶ τέμνει τὴν κθ ἡ αβ. τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν γδ, διὰ τὸ προδεδειγμένον. συμπεσοῦνται ἄρα αἱ αβ γδ κατὰ μέρη ἐκεῖνα, ἐφ᾽ ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. ὥστε δέδεικται τὸ προκείμενον.





αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. εἴωθεν ὁ γεωμέτρης ἐν τοῖς προ-

τῶν σχέσεων λόγοις, δεικνῦσαι τὴν ταυτότητα διήκουσαν ἐν ἅπασι τοῖς πρὸς τὸ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχουσι σχέσιν. οὕτω γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἀξιώμασιν ἔλεγεν τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἐν τοῖς ἑξῆς ἐρεῖ τὰ τῷ αὐτῷ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά ἐστιν, καὶ οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. κατὰ τοῦτον οὖν τὸν τρόπον καὶ νῦν ἀποδείκνυσιν, ὅτι αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. συμβέβηκεν δὲ οὐκ ἐπὶ πασῶν τῶν σχέσεων εἶναι τοῦτο ἀληθές. οὐ γὰρ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια καὶ ἀλλήλων διπλάσιά ἐστιν, οὐδὲ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμιόλια καὶ ἀλλήλων ἡμιόλιά ἐστι. ἀλλ' ἔοικεν ἐπ' ἐκείνων μόνων χώραν ἔχειν, ὅσαι ἀντιστρέφουσι συνωνύμως, ἐπὶ τῆς ἰσότητος, ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος, ἐπὶ τῆς ταυτότητος, ἐπὶ τῆς παραλλήλου θέσεως. ἡ γὰρ παράλληλος παραλλήλῳ παράλληλός ἐστιν. ὡς τὸ ἴσον ἴσῳ ἴσον, καὶ τὸ ὅμοιον ὁμοίῳ ὅμοιον, καὶ γάρ ἐστιν ὁμοιότης θέσεως ἡ παραλληλότης. εἰ δυνατὸν εἰπεῖν, λέγει δ' οὖν καὶ δείκνυσιν ἐν τούτοις ὅτι αἱ τῇ αὐτῇ παράλληλοι, πάντως οὕτως ἔχουσιν, ὥστε καὶ ἀλλήλαις εἶναι παράλληλοι. καὶ αὐτὸς μὲν τὰς τῇ αὐτῇ παραλλήλους ἄκρας ἔλαβεν καὶ μέσην, πρὸς ἣν αὗται τὴν ὁμοίαν ἔχουσι σχέσιν. ἵνα καὶ ἀπὸ κοινῆς ἐννοίας ἡμῖν γένηται σαφὲς τὸ λεγόμενον. εἰ γὰρ αἱ ἐφ' ἑκάτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις, πάντως καὶ τῇ μεταξὺ κειμένῃ συμπεσοῦνται, καὶ οὐκ ἔτι πρὸς αὐτὴν ἔσονται παράλληλοι. δυνατὸν δὲ καὶ ἐναλλάξαντα τὴν θέσιν, δεῖξαι ταῖς αὐταῖς ἐφόδοις, αἷς ὁ γεωμέτρης ἐχρήσατο πρὸς τὸ προκείμενον. οἷον πρὸς τὴν αβ καὶ τὴν γδ παράλληλον, καὶ τὴν εζ ἀμφοτέρων κατωτέρω κειμένων ἑκατέρας, τῆς αβ καὶ οὐχὶ μέσης. ἐμπιπτέτω γὰρ ἡ θκλ εἰς αὐτάς, ἴσην ποιήσει ἑκατέραν τῶν ὑπὸ θκδ κλζ τῇ ὑπὸ αθκ. ὅτι ἐναλλάξ. ὥστε καὶ ἀλλήλαις ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ θκδ κλζ. παράλληλοι ἄρα αἱ γδ εζ. εἰ δὲ λέγοι τις ἔσωθεν αἱ αθ θβ παράλληλοι τῇ γδ καὶ ἀλλήλαις ἄρα παράλληλοί εἰσιν, ἐροῦμεν ὅτι αἱ αθ θβ μιᾶς εἰσιν παραλλήλου μέρη, καὶ οὐ δύο. δεῖ γὰρ τὰς παραλλήλους ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένας νοεῖν. ἡ δὲ αθ ἐκβληθεῖσα, πίπτει ἐπὶ τὴν θβ. ἡ αὐτὴ ἄρα ἐστὶν καὶ οὐκ ἄλλη ἐκείνη. πάντα ἄρα τὰ μέρη τῆς παραλλήλου, καὶ αἱ τὰ παράλληλά ἐστι τῇ εὐθείᾳ ᾗ καὶ ὅλη παράλληλος ἦν, καὶ τοῖς μέρεσιν αὐτῆς. οἷον καὶ ἡ αθ τῇ κδ καὶ ἡ θβ τῇ γκ. ἐκβαλλόμεναι γὰρ ἐπ' ἄπειρον, ἀσύμπτωτοι μένουσιν. ταῦτα ἀναγκαίως ἐπεσημηνάμεθα, διὰ τὰς σοφιστικὰς ἐνοχλήσεις καὶ τὰς νεαροπρεπεῖς τῶν ἀκουόντων ἕξεις. χαίρουσι γὰρ οἱ πολλοὶ τοῖς τοιούτοις παραλογισμοῖς προστυγχάνοντες, καὶ τοῖς ἐπιστήμοσιν ὄχλον περιττὸν ἐπεισάγοντες. ἀντιστρέφειν δὲ οὐ δεῖ διὰ τὸ θεώρημα καὶ δεικνύναι ὅτι αἱ ἀλλήλαις παράλληλοι, καὶ τῇ αὐτῇ παράλληλοί εἰσιν. πάλιν γὰρ ἂν ὑποθώμεθα τὴν ἑτέραν τινὶ παράλληλον, ἐκείνη τε καὶ ἡ λοιπὴ τούτων ἔσονται τῇ αὐτῇ παράλληλοι, καὶ εἰς ταυτὸ ἐπανήξομεν.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.) Ἔδει μὴ μόνον ἡμᾶς τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα ταῖς παραλλήλοις μαθεῖν ἐν τοῖς τοῦ στοιχειωτοῦ λόγοις, ἀλλὰ καὶ τὴν γένεσιν αὐτῶν ἱστορῆσαι διὰ τῶν γεωμετρικῶν μεθόδων. καὶ γνῶναι πῶς ἂν γένοιτο ἄλλη εὐθεῖα, παράλληλος ἄλλῃ. πολλαχοῦ γὰρ αἱ γενέσεις τρανεστέραν ἡμῖν ποιοῦσι τῶν ὑποκειμένων τὴν οὐσίαν. τοῦτο δ' οὖν ὁ στοιχειωτὴς ποιεῖ διὰ τοῦ προκειμένου προβλήματος. σημεῖον γὰρ λαβὼν καὶ εὐθεῖαν, ἄγει διὰ τοῦ σημείου τῇ εὐθείᾳ παράλληλον. δεῖ δὲ προειληφέναι ἡμᾶς ὅτι τὸ σημεῖον, ἐκτὸς πάντως κεῖσθαι τῆς εὐθείας ἀναγκαῖον. οὐ γὰρ ἐπειδὴ εἴρηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ ἐπ' αὐτῆς αὐτὸ τῆς εὐθείας δώσομεν. οὐ γὰρ ἔσται τις ἄλλη παρὰ τὴν εὐθεῖαν ἡ δι' αὐτοῦ φερομένη παράλληλος. μερίσας οὖν τὸ σημεῖον καὶ τὴν εὐθεῖαν ἐδήλωσεν, ὅτι τὸ σημεῖον ἐκτὸς λαμβάνειν χρὴ τῆς εὐθείας, ὅπερ ἐπὶ τῆς καθέτου, καὶ διὰ τοῦ προσθεῖναι σαφὲς ἐποίησεν. ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς κάθετον ἀγαγεῖν. ἓν μὲν οὖν κοινὸν τοῦτο τοῖς ἀμφοτέροις τοῖς προβλήμασιν. ἕτερον δέ, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο κάθετοι οὐκ ἄγονται ἐπὶ τὴν αὐτήν. καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο παράλληλοι, οὐκ ἄγονται τῇ αὐτῇ. διὸ καὶ ὁ στοιχειωτὴς οὕτως εἶπεν ἑνικῶς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ἐκεῖ μὲν κάθετον, ἐνταῦθα δὲ παράλληλον. ἀλλ' ἐκεῖνο μὲν δέδεικται, τοῦτο δὲ φανερὸν ἐκ τοῦ προαποδειχθέντος. εἰ γὰρ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῇ αὐτῇ, δύο παράλληλοι ἀχθεῖεν, ἔσονται καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. δεῖ δὴ καὶ ταῖς διαφοραῖς προσέχειν τῶν προτάσεων, ἀπὸ τοῦ δο-
θέντος

δοθέντος σημείου, καὶ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου. ὅπου μὲν γὰρ τὸ σημεῖον ἀρχή ἐστι τῆς ἀγομένης, καὶ διὰ τοῦτο ἀπ' αὐτοῦ ἡ ἀγωγή. ὅπου δὲ ἐπ' αὐτῆς ἐστι τῆς ἀγομένης, καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀγωγὴ δι' αὐτοῦ. οὐ γὰρ ὡς τεμνούσης εὐθείας τὸ δοθὲν σημεῖον εἴρηται τὸ δι' αὐτοῦ, ἀλλ' ὡς συμπιπτούσης αὐτῷ, καὶ ὁριζούσης τὸ ἑαυτῆς ἀπόστημα πρὸς τὴν ἐκείνην εὐθεῖαν, τῇ διαστάσει τοῦ σημείου, πρὸς τὴν εὐθεῖαν. ὅσον γὰρ τὸ δοθὲν σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας ἀφέστηκεν, τοσοῦτον καὶ ἡ παράλληλος ἔχει τὸ μεταξὺ ἑαυτῆς τε καὶ ἐκείνης.

λβ

Παντὸς τριγώνου μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον ἐστὶν ἴση, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.) ὅσον ἐνέλειπεν ἐν τῷ ις καὶ ιζ θεωρήματι, τοσοῦτον προστίθησιν ἐν τούτῳ. οὐ γὰρ μόνον ὅτι ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων, διὰ τούτου μανθάνομεν, ἀλλὰ καὶ ὅσῳ μείζων. ἴση γὰρ ἀμφοτέραις οὖσα μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῇ λοιπῇ. οὐδὲ ὅτι δύο τοῦ τριγώνου, ὁποῖαι οὖν ἐλάσσους εἰσὶ δυοῖν ὀρθῶν, ἐκ τούτου γινώσκομεν, ἀλλὰ καὶ πόσῳ ἐλάσσους. τῇ γὰρ λοιπῇ τοῦ τριγώνου. ἐκεῖνα μὲν οὖν ἀοριστότερά πως ἦν τὰ θεωρήματα. τοῦτο δὲ τὸν τῆς ἐπιστήμης ὅρον ἀμφοτέροις ἐπήγαγεν, καὶ οὐ διὰ τοῦτο περιττὰ ἂν εἴποιμεν ἐκεῖνα. καὶ γὰρ συνετέλεσεν ἡμῖν εἰς πολλὰς ἀποδείξεις, ἀφ' ὧν καὶ τοῦτο δείξομεν, καὶ ἀναγκαῖον τὴν γνῶσιν ἡμῶν ἀπὸ τῶν ἀτελῶν ἐπὶ τὸ τέλειον προϊοῦσαν, ἐκ τῶν ἀορίστων ἐπιβολῶν ἐπὶ τοὺς ὡρισμένους καὶ ἀνελέγκτους λόγους μεταβαίνειν. ἀλλ' ὁ μὲν στοιχειωτὴς ἔξω τὴν παράλληλον ἄγων ἔδειξεν ἑκάτερον τῶν ζητουμένων. ἔστι δὲ καὶ μὴ ἔξω ἄγοντα, τὰ αὐτὰ δεικνύναι, τὴν τάξιν μόνην ἐναλλάξαντα τῶν δεικνυμένων. ὁ μὲν γὰρ πρότερον ἔδειξεν τὸ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἀπὸ τούτου τὸ λοιπὸν κατεσκεύασεν. ἡμεῖς δὲ ἀνάπαλιν ποιήσωμεν. ἔστω δὴ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βγ ἐπὶ τὸ ε. καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς βγ τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ διὰ τοῦ ζ παράλληλος ἤχθω τῇ αβ ἡ ζδ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ἡ ζδ τῇ αβ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν, ἥ τε αζ, καὶ ἡ βγ, αἵ τε ἐναλλὰξ ἴσαι καὶ ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αζγ ἴση ταῖς ὑπὸ ζαβ, αβζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν παράλληλον ἀγαγόντες ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ αζβ ἴση ταῖς ὑπὸ ζαγ, αγζ. δύο ἄρα αἱ ὑπὸ αζβ, αζγ ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ αβγ τριγώνου. αἱ ἄρα τρεῖς δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, ταῖς ὑπὸ αζβ, αζγ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αγζ, αγε δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ αγζ, λοιπὴ ἄρα ἡ ἐκτὸς ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐστὶν ἴση. τοῦτο μὲν δή, τὸν εἰρημένον ἀποδείκνυται τρόπον. Εὔδημος δὲ ὁ περιπατητικὸς εἰς τοὺς Πυθαγορείους ἀναπέμπει τὴν τοῦδε τοῦ θεωρήματος εὕρεσιν, ὅτι τρίγωνον ἅπαν δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς ἐντὸς γωνίας, καὶ δεικνύναι φησὶν αὐτοὺς οὕτως τὸ προκείμενον. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ α τῇ βγ παράλληλος ἡ δε. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ βγ, δε, καὶ αἱ ἐναλλὰξ ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα, ἡ μὲν ὑπὸ δαβ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εαγ τῇ ὑπὸ αγβ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βαγ. αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ, βαγ, γαε, τουτέστιν ἡ ὑπὸ δαβ, βαε, τουτέστιν αἱ δύο ὀρθαὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς τοῦ αβγ τριγώνου τρισὶ γωνίαις. αἱ ἄρα τρεῖς τοῦ τριγώνου, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. τοιαύτη μὲν οὖν καὶ ἡ τῶν Πυθαγορείων ἀπόδειξις. δεῖ δὲ καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα τῷ θεωρήματι τῶν στοιχείων προσιστορῆσαι. ἀντιστρέφει δυοῖν πρὸς ἕν. ἐπειδὴ τοῦτο συνθετόν ἐστι κατά τε τὸ ζητούμενον καὶ περὶ τὸ δεδομένον. καὶ γὰρ τοῦτο διπλοῦν ἐστι. τρίγωνον γὰρ καὶ μία τῶν πλευρῶν ἐκβεβλημένη. κἀκεῖνο ὡσαύτως. ἓν μὲν γάρ ἐστι τὸ τὴν ἐκτὸς ἴσην εἶναι ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ἕτερον δὲ τὸ τὰς ἐντὸς τρεῖς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς εἶναι ἴσας. ἐὰν οὖν ὑποθώμεθα καὶ τὴν ἐκτὸς εἶναι ταῖς ἐντὸς ἴσην, καὶ ἀπεναντίον, δείκνυμεν ἐκβεβλημένην πλευρὰν καὶ ἐπ' εὐθείας οὖσαν τῇ μιᾷ τοῦ τριγώνου πλευρᾷ τὴν ἐκτός. ἐὰν δὲ τὰς τρεῖς γωνίας τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας, δείκνυμεν ὅτι τὸ σχῆμα τρίγωνόν ἐστι. καὶ οὕτως ὅλον ἔσται τὸ ζητούμενον πρὸς ὅλον ἀντιστρέφον τῷ δεδομένῳ. ἔστω τοίνυν τρίγωνον τὸ αβγ καὶ ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ αγδ ἴση ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, λέγω ὅτι ἡ βγ ἐστιν ἡ προσεκβεβλημένη ἕως τοῦ δ, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ βγδ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ αγδ ἴση ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ αβγ τριγώνου, ἀλλ' αἱ τρεῖς τοῦ αβγ τριγώνου δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. ἐὰν δὲ πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι ἑξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ἡ ἄρα βγ τῇ γδ ἐπ' εὐθείας ἐστί. πάλιν ἔστω τὸ σχῆμα τὸ αβγ τρεῖς ἔχον γωνίας μόνας δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς αβγ, λέγω ὅτι τρίγωνόν ἐστιν, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ αγ. ἐπεζεύχθω

γὰρ ἡ βδ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρου τῶν αβδ δβγ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι, ὧν αἱ τοῦ αβγ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ αδβ γδβ δύο εἰσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ εἰσὶν πρὸς τῇ βδ εὐθείᾳ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ δγ τῇ δα. ἐὰν οὖν εὐθύγραμμον ᾖ τὸ σχῆμα τὸ ἔχον τὰς ἐντὸς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ἐκ παντὸς τρίγωνόν ἐστι. οὐ μὴν ἐὰν ἔχῃ τι τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας ἐκ παντὸς τρίγωνόν ἐστι. καὶ γὰρ περιφερόγραμμον εὕροις ἂν ἔχον τὰς ἐντὸς δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ἔστω γὰρ τετράγωνον τὸ αεβ γδ καὶ ἐπὶ τῆς αβ ἐντὸς ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ αεβ. ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἐκτὸς τὸ κζθ. δύο δὴ γωνίας ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενον, τὰς ὑπὸ καὶ εζθ δύο ὀρθαῖς ἴσας, ταῖς ὑπὸ αγβ δβα. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς αἰτήμασιν, καὶ μόναι αὐτοῦ γωνίαι εἰσὶν ἐν τῷ σχήματι τούτῳ. ἔστιν ἄρα τι σχῆμα τρίγωνον τὰς ἐντὸς ἔχον γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας. ταῦτα καὶ περὶ τῆς ἀντιστροφῆς. ἐπεὶ δὲ ἔχομεν ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, δεῖ μέθοδον λαβεῖν καθ' ἣν καὶ τῶν ἄλλων πάντων πολυγώνων εὐθυγράμμων τὰς γωνίας εὑρήσομεν ὁπόσαις ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. οἷον τετραγώνου πενταγώνου καὶ τῶν ἑξῆς ἁπάντων πολυπλεύρων. χρὴ τοίνυν εἰδέναι πρῶτον ὅτι πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα ἀναλύεται. πάντων γὰρ ἀρχὴ τῆς συστάσεως τρίγωνον. ὃ καὶ ὁ Πλάτων ἔφη. διδάσκων ὅτι ἡ ὀρθὴ τῆς ἐπιπέδου βάσεως ἐκ τριγώνων συνέστηκεν. ἕκαστον δὲ ἀναλύεται εἰς δυάδι ἐλάσσονα τρίγωνα τῶν οἰκείων πλευρῶν. εἰ τετράπλευρον ἐστὶν εἰς δύο. εἰ πεντάπλευρον εἰς τρία. εἰ ἑξάπλευρον εἰς τέσσαρα. δύο γὰρ τρίγωνα συντεθέντα τετράπλευρον ἐποίησαν εὐθύς. ὥστε τῶν συντιθεμένων τριγώνων ἀριθμῷ τὸ πρῶτον συστὰν διενήνοχε τῶν ἑαυτοῦ πλευρῶν, τούτῳ καὶ τὰ ἑξῆς πάντα διαφέρει. δυάδι ἄρα πᾶν πολύπλευρον πλείους ἔχει πλευρὰς τῶν τριγώνων εἰς ἃ διαλύεται. ἀλλὰ μὴν ἅπαν γε τρίγωνον δέδεικται δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχον τὰς γωνίας. διπλάσιος ἄρα ὁ τῶν γωνιῶν ἀριθμὸς τῶν συντεθέντων τριγώνων γινόμενος παρέξεται τὸ πλῆθος τῶν ὀρθῶν, ὅσαις ἕκαστον πολύγωνον ἴσας ἔχει γωνίας. διὸ πᾶν μὲν τετράπλευρον, τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει γωνίας. ἐκ δυοῖν γὰρ συνέκειτο τριγώνων. πᾶν δὲ πεντάπλευρον ἕξ, καὶ τὰ ἑξῆς ὁμοίως. ἓν μὲν οὖν τοῦτο ληπτέον ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου περὶ πάντων τῶν πολυγώνων ἅμα καὶ εὐθυγράμμων. ἕτερον δὲ ἑπόμενον τούτῳ συνέλωμεν ὅτι πᾶν σχῆμα εὐθύγραμμον, ἑκάστης τῶν πλευρῶν ἅπαξ ἐκβληθείσης, τὰς ἐκτὸς συνισταμένας γωνίας ἴσας ἔχει τέτρασιν ὀρθαῖς. διπλασίας μὲν γὰρ ἔδει τὰς ἐφ' ἑκάτερα γωνίας ὀρθάς, τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν, ἐπειδὴ πρὸς ἑκάστῃ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι συνίστανται. ἀφαιρουμένων δὲ τῶν ἴσων ταῖς ἐντὸς ὀρθῶν, αἱ λοιπαὶ γίνονται αἱ ἐκτὸς τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι. οἷον εἰ τὸ σχῆμα τρίγωνον, ἑκάστης αὐτοῦ πλευρᾶς ἅπαξ ἐκβαλλομένης, ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι συνίστανται γωνίαι. αἵ τε ἐντὸς καὶ ἐκτός. ὧν αἱ ἐντὸς ἴσαι δυσίν, αἱ λοιπαὶ ἄρα αἱ ἐκτὸς τέτταρσιν. εἰ δὲ τετράπλευρον, ὀκτὼ αἱ πᾶσαι. διπλάσιαι γὰρ τῶν πλευρῶν. ὧν ἐντὸς τέτρασιν, καὶ ἐκτὸς ἄρα ἄλλαις τοσαύταις ἴσαι. εἰ δὲ πεντάπλευρον. δέκα μὲν αἱ πᾶσαι, ἓξ δὲ ἐντός, τέτρασι δὲ ταῖς λοιπαῖς αἱ ἐκτός. καὶ ἐπ' ἄπειρον ὁμοίως ἡ αὐτὴ μέθοδος. ἐπὶ δὲ τούτοις κἀκεῖνα συναγάγωμεν, ὅτι διὰ τοῦτο τὸ θεώρημα τὸ μὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ἑκάστην ἔχει γωνίαν διμοίρου ὀρθῆς, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς ὅταν ἔχῃ τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ ὀρθήν, τὰς λοιπὰς ἡμισείας ὀρθῆς ἔχει. οἷον τὸ ἡμιτετράγωνον. τὸ δὲ σκαληνόν, τὸ ἡμιτρίγωνον. ὃ γίνεται ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ καθέτου ἀχθείσης ἀφ' οἱασ τινὸς γωνίας, ὑπὸ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτὴν πλευράν, τὴν μὲν ἔχει ὀρθήν, τὴν δὲ διμοιραίαν. ἥτις ἦν καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὴν δὲ λοιπὴν ἄρα τρίτου. δεῖ γὰρ εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας τὰς τρεῖς. ταῦτα δὲ οὐ περιέργως ἀποσημαινόμεθα ἀλλ' ὡς προπαρασκευάζοντα ἡμᾶς πρὸς τὴν τοῦ Τιμαίου διδασκαλίαν. καὶ μὴν κἀκεῖνο ῥητέον, ὅτι τὸ τὰς ἐντὸς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν, καθ' αὑτὸ καὶ ᾗ αὐτὸ ὑπάρχει τῷ τριγώνῳ. διὸ καὶ Ἀριστοτέλης, πρόχειρον ἔχει τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐν ταῖς ἀποδεικτικαῖς πραγματείαις τοῦ ᾗ αὐτὸ θεωρῶν. ὡς οὖν παντὶ σχήματι τὸ πεπεράνθαι καθ' αὑτὸ ὑπάρχει καὶ πρώτως, ὡς τῷ εὐθυγράμμῳ παντὶ εἰ καὶ μὴ σχήματι παντὶ τὸ τὰς ἐντὸς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν. καὶ ἔοικεν καὶ κατὰ τὰς κοινὰς ἐννοίας προσπίπτειν ἡμῖν ἡ τοῦ θεωρήματος ἀλήθεια. ἐὰν γὰρ νοήσωμεν εὐθεῖαν καὶ ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς τινὰς πρὸς ὀρθὰς ἑστώσας, εἶτα συννευούσας εἰς τριγώνου γένεσιν, ὁρῶμεν ὅτι καθόσον συννεύουσιν, κατὰ τοσοῦτον ἐλαττοῦσι τὰς ὀρθὰς ἃς ἐποίουν πρὸς τὴν εὐθεῖαν. ὥστε ὅσον ἔχει ὧν ἀφεῖλον. τοσοῦτον προσλαβοῦσαι κατὰ τὴν πρὸς τῇ κορυφῇ σύννευσιν, ἐξ ἀνάγκης τὰς τρεῖς ποιοῦσι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

λγ

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι

εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.) Τοῦτο τὸ θεώρημα ὥσπερ μεθόριον λεγόμενόν ἐστι, τῆς τε περὶ τῶν παραλλήλων, καὶ τῆς τῶν παραλληλογράμμων ζητήσεως. καὶ γὰρ τῶν ἴσων τε καὶ παραλλήλων εὐθειῶν δοκεῖ τι σύμπτωμα λέγειν, καὶ γένεσιν παραλληλογράμμων λεληθυῖαν παραδίδωσι. γίνεται γὰρ παραλληλόγραμμον ἔκ τε τῶν ἐξ ἀρχῆς ἴσων καὶ παραλλήλων, καὶ ἐκ τῶν ταύτας ἐπιζευγνυουσῶν, καὶ δεικνυμένων ὡσαύτως ἴσων τε καὶ παραλλήλων. διὸ καὶ τὸ μετὰ τοῦτο εὐθὺς ὡς οὖν ὑποστάντος ἤδη τοῦ παραλληλογράμμου, τὰ καθ᾽ αὑτὸ ὑπάρχοντα τοῖς τοιούτοις χωρίοις θεωρεῖ. τοῦτο μὲν οὖν σαφῆ. δεῖ δὲ καὶ τὴν ἀκρίβειαν τὴν ἐν τῇ προτάσει διασκέψασθαι. πρῶτον μὲν οὖν ὅτι οὐκ ἠρκέσθη, τὰς ἴσας εἶναι τὰς ἐπιζευγνυμένας. οὐ γὰρ πάντως αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἴσας, ἴσαι εἰσίν, εἰ μὴ καὶ παράλληλοι εἶεν. τριγώνου γὰρ ὄντος ἰσοσκελοῦς, καὶ σημείων ληφθέντων ἐπὶ μιᾶς τῶν ἴσων, καὶ ἀχθείσης διὰ τοῦδε τῇ βάσει παραλλήλου, ἴσας μὲν ἐπιζευγνύουσιν αἵ τε παράλληλος τῇ βάσει καὶ αὐτὴ ἡ βάσις, οὐ μήν τοι καὶ ἴσαι εἰσίν. οὐ γὰρ ἦσαν ἐκεῖναι παράλληλοι εἰς συμπεπτωκυῖαι ἐπὶ τὴν τοῦ τριγώνου κορυφήν. δεύτερον δέ, ὅτι οὐδὲ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ὑποκειμένας εὐθείας, μὴ ἴσας δὲ τὰς ἐπιζευγνυούσας παραλλήλους ποιήσειν ὑπέλαβεν. ἐπὶ γὰρ τῆς εἰρημένης κατασκευῆς τῆς ἐπὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, καὶ τοῦτο φανερόν, ἡ γὰρ ἀχθεῖσα καὶ ἡ βάσις παράλληλοι εἰσιν, ἀλλ᾽ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς οὐ παράλληλοι. μέρη γάρ εἰσι τῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς πλευρῶν. δεῖ δὴ οὖν πρὸς μὲν τὴν ἰσότητα τῶν ἐπιζευγνυουσῶν καὶ τῆς τῶν ἐπιζευγνυμένων παραλλήλου θέσεως, πρὸς δὲ τὴν τῶν παραλλήλων θέσιν, τῆς ἐκείνων ἰσότητος. διόπερ ὁ στοιχειωτὴς ἄμφω προσέλαβεν ἐπὶ τῶν ἐπιζευγνυμένων, ἵνα ἄμφω δείξῃ. καὶ περὶ τὰς ἐπιζευγνυούσας εὐθείας ὅτι ἴσας ἀλλήλαις εἶναι καὶ τὸ παραλλήλους. τρίτον δὴ λεγέσθω πρὸς τούτοις, ὅτι καὶ ἴσων ὑποκειμένων εὐθειῶν καὶ παραλλήλων, οὐ πάντως αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰ γὰρ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ἐπιζεύξεις ποιησόμεθα, παραλλήλους μὲν αὐτὰς ἀδύνατον εἶναι. τέμνονται γὰρ ὑπ᾽ ἀλλήλων. ἴσας δὲ ποτὲ μὲν δυνατόν, ποτὲ δὲ ἀδύνατον. ἐὰν μὲν γὰρ λάβοις ἢ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες χωρίον, ὡς τὸ αβγδ, καὶ ἐπιζεύξαις τὰς αδ βγ, αἱ διάμετροι ἴσαι μέν, οὐ παράλληλοι δέ, καίτοι ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς κατὰ μικρὸν πλευρὰς τῶν εἰρημένων χωρίων. εἰ δὲ ῥόμβον ἢ ῥομβοειδές, αἱ διάμετροι τούτων, πρὸς τῷ μὴ παράλληλοι εἶναι, οὐδὲ ἴσαι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ αβ τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ γωνία ἄνισος ἡ ὑπὸ βαγ τῇ ὑπὸ αγδ, καὶ αἱ βάσεις ἄνισοί εἰσιν. εἰκότως οὖν ὁ στοιχειωτὴς ἀξιοῖ τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ποιεῖσθαι τὴν ἐπίζευξιν. ἵνα τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων ὑποκειμένων τῶν αγ βδ, μὴ τὰς αδ καὶ βγ λάβωμεν τὰς ἐπιζευγνυούσας, ἀλλὰ τὰς αβ καὶ γδ. ταύτας γὰρ ἂν καὶ δείξαι μὲν ἴσας καὶ παραλλήλους. ἐκείνας δὲ παραλλήλους μέν, οὐδέποτε ἴσας δέ. ἐπὶ μὲν τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ ἑτερομήκους δείξαιμεν ἄν, ἐπὶ δὲ τοῦ ῥόμβου καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς οὐκ ἄν ποτε δείξαιμεν. τὸ γὰρ ἀντικείμενον δέδεικται ὅτι ἄνισοί εἰσιν διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.)

Ἐκ τοῦ προειρημένου θεωρήματος ὑποστὰν ἤδη τὸ παραλληλόγραμμον λαβών, θεωρεῖ τὰ περὶ αὐτὸ πρώτως ὑπάρχοντα, καὶ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἰδίας αὐτοῦ συστάσεως. ἔστι δὲ ταῦτα τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας εἶναι, καὶ τὰς γωνίας τὰς ἀπεναντίον ἴσας, καὶ τὸ δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τῆς διαμέτρου τὰ χωρία. περὶ γὰρ τούτων εἴρηται τό, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ὡς τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ διχοτομούμενον ὅλον, ἀλλὰ μὴ τὰς γωνίας δι᾽ ὧν ἡ διάμετρος ἔρχεται. ταῦτα οὖν καθ᾽ αὑτὸ τοῖς παραλληλογράμμοις ὑπάρχει τὰ τρία, ἡ τῶν ἀπεναντίον πλευρῶν ἰσότης, ἡ τῶν χωρίων ἐπὶ τὰς διαμέτρους διχοτομία, καὶ ὁρᾷς ὅπως ἀπὸ πάντων ἐθήρασεν τὰς ἰδιότητας αὐτῶν, ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἀπὸ τῶν ἐμβαδῶν. τεττάρων δὲ ὄντων παραλληλογράμμων ἃ καὶ ἐν ταῖς ὑποθέσεσιν ὡρίσατο. τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἑτερομήκους, τοῦ ῥόμβου, τοῦ ῥομβοειδοῦς, ἄξιον δὲ ἐπισημήνασθαι τοσοῦτον ὅτι εἰ μὲν τὰ τέσσαρα διαιροῦμεν ἐπὶ τὰ ὀρθογώνια, εὑρήσομεν οὐ μόνον τὰ χωρία διχοτομούσας τὰς διαμέτρους αὐτῶν, ἀλλὰ καὶ αὐτὰς ἴσας τὰς διαμέτρους ἐπὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, ἐπὶ δὲ τῶν μὴ τοιούτων ἀνίσους ὡς εἴρηται ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι. εἰ δὲ ἐπὶ τὰ ἰσόπλευρα, πάλιν εὑρήσομεν ἐν τοῖς ἰσοπλεύροις, οὐ μόνον τὰ χωρία διχοτεμνόμενα ὑπὸ τῶν διαμέτρων, ἀλλὰ καὶ τὰς γωνίας δι᾽ ὧν αὐταὶ φέρονται. καὶ γὰρ ἐπὶ τοῦ τετραγώνου, καὶ ἐπὶ τοῦ ῥόμβου τὰς γωνίας αἱ διάμετροι διχοτομοῦσιν, οὐ τὰ χωρία μόνον. ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτερομήκους καὶ τοῦ ῥομβοειδοῦς, τὰ χωρία μόνον. ἔστω γὰρ τετράγωνον ἢ ῥόμβος τὸ αβγδ, καὶ διάμετρος ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν ἡ αβ τῇ αδ ἴση ταῖς

αγ γδ. ἰσόπλευρα γάρ, καὶ αἱ ὑπὸ αεδ, αγδ ἴσαι, ἀπεναντίον γάρ, καὶ ἡ βάσις κοινή, πάντα ἴσα πᾶσιν, ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, γδβ γωνίαι δίχα τέμνονται. πάλιν ἔστω τὸ αὐτὸ ἑτερόμηκες, ἢ ῥομβοειδές, εἰ οὖν δίχα τέμνεται ἡ ὑπὸ βαγ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γαδ, ἴση τῇ ὑπὸ αδβ, ἴση ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ βαδ τῇ ὑπὸ αδβ. ὥστε καὶ ἡ αβ τῇ βδ, ἀλλ' εἰσὶν ἄνισοι. ὡς οὖν συλλήβδην εἰπεῖν, ἐπὶ μὲν τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι διὰ τὴν ὀρθότητα τῶν γωνιῶν, καὶ αἱ γωνίαι δίχα τέμνονται ὑπὸ τῶν διαμέτρων διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἰς ἴσα διαιρεῖται ὑπὸ τῆς διαγωνίου, διὰ τὴν κοινὴν ἰδιότητα τῶν παραλληλογράμμων. ἐπὶ δὲ τοῦ ἑτερομήκους, αἱ μὲν διάμετροι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι οὐ τέμνονται δίχα ὑπὸ τῶν διαμέτρων, ἡ δὲ τῶν χωρίων εἰς ἴσα διαίρεσις ὑπάρχει, καὶ γὰρ καθόσον ἐστὶ παραλληλόγραμμον. ἐπὶ δὲ τοῦ ῥόμβου, ἄνισοι μὲν αἱ διάμετροι, διχοτομοῦνται δὲ ὑπὸ τούτων οὐ μόνον τὰ χωρία, διότι παραλληλόγραμμον, ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι, διότι ἰσόπλευρον. ἐπὶ δὲ τοῦ λοιποῦ τοῦ ῥομβοειδοῦς, καὶ αἱ διάμετροι ἄνισοι, ὡς μὴ ὀρθογωνίου, καὶ αἱ γωνίαι εἰς ἄνισα τέμνονται ὑπὸ τούτων, ὡς μὴ ἰσοπλεύρου. μόνα δὲ τὰ χωρία ἴσα γίνεται τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν διαγωνίων, ὡς παραλληλογράμμου. ταῦτα μὲν οὖν εἴρηται τὰς ἐν ταῖς διαιρέσεσι τῶν παραλληλογράμμων τεττάρων ὄντων ὑποδεικνύντα διαφοράς. ἐκεῖνο δὲ ἄξιον μὴ παρελθεῖν ἐν τούτῳ τῷ θεωρήματι τεχνικὸν ἀναφαινόμενον, ὅτι τῶν θεωρημάτων, τῶν μὲν ὄντων καθόλου, τῶν δὲ οὐ καθόλου. πῶς δὲ τούτων ἑκάτερον λέγομεν ἀναμνησόμεθα ἐν τῷ *μεμερίσθαι τὸ ζητούμενον. καὶ τὰ μὲν ἔχει καθόλου, τὸ δὲ οὐκέτι τοιοῦτον. καί τοι γε δόξειεν ἂν πᾶν θεώρημα εἶναι καθολικόν, καὶ πᾶν τὸ δεικνύμενον ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ τοιοῦτον ὑπάρχειν, οἷον καὶ ἐνταῦθα οὐ μόνον τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἢ γωνίας ἴσας ἔχειν καθόλου δοκεῖ λέγεσθαι ἐπὶ πάντων τῶν παραλληλογράμμων, ἀλλὰ καὶ τὸ τὴν διάμετρον διχοτομεῖν ἕκαστον. ἀλλ' ὅμως τὰ μὲν καθόλου δείκνυσθαι λέγομεν, τὰ δὲ οὔ. ἄλλως γὰρ εἴωθεν προσαγορεύεσθαι καθόλου τὸ ἐπὶ πάντων ἀληθεῦον, ἐφ' ὧν λέγεται, ἄλλως τὸ πάντα περιλαμβάνον οἷς ὑπάρχει τὸ αὐτὸ σύμπτωμα. καθόλου γὰρ καὶ ὅτι πᾶν ἰσοσκελὲς τὰς τρεῖς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει. ὅτι ἐπὶ πάντων ἀληθὲς τῶν ἰσοσκελῶν. καθόλου δὲ καὶ ὅτι πᾶν τρίγωνον τὰς τρεῖς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ἔχει. ὅτι πάντα περιείληφεν οἷς τοῦτο καθ' αὑτὸ ὑπάρχει. διὸ καὶ πρώτως τριγώνου φαμὲν δείκνυσθαι τὸ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχειν τὰς γωνίας. ἐπὶ τούτου τοίνυν τὸ σημαινόμενον τὰ μὲν καθόλου τῶν θεωρημάτων λεγέσθω, τὰ δὲ οὐ καθόλου. τοῦτο τὸ θεώρημα φαμὲν τὸ μὲν τῶν ζητουμένων ἔχειν καθόλου, τὸ δὲ οὔ. τὸ μὲν γὰρ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἢ γωνίας ἴσας ἔχειν καθολικόν ἐστιν. μόνοις γὰρ ὑπάρχει τοῖς παραλληλογράμμοις. τὸ δὲ τὴν διάμετρον δίχα τὸ χωρίον τέμνειν, οὐ καθόλου, διότι μὴ πάντα περιείληφεν ἐφ' ὅσων θεωρεῖται τὸ σύμπτωμα τοῦτο. καὶ γὰρ τοῖς κύκλοις ὑπάρχει, καὶ ταῖς ἐλλείψεσι. καὶ ἐοίκασιν αἱ πρῶται τῶν πραγμάτων ἐπιβολαὶ τοιαῦται εἶναι μερικώτεραι, προϊοῦσαι δὲ τὸ ὅλον συλλαμβάνειν. θεωρήσαντες γὰρ οἱ ἀρχαῖοι ὅτι ἡ διάμετρος δίχα τέμνει τὴν ἔλλειψιν, καὶ ὅτι τὸν κύκλον, καὶ ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ κοινὸν ἐν τούτοις ἐπεθεώρησαν. λανθάνειν δέ φησιν Ἀριστοτέλης τὸ μὴ καθόλου δεικνύς τις ὡς καθόλου, διὰ τὸ εἶναι ἀνώνυμον τὸ κοινόν, ᾧ πρώτως ὑπάρχει τὸ σύμπτωμα. τί γὰρ κοινὸν ἀριθμοῖς καὶ μεγέθεσι καὶ κινήσεσι καὶ φθόγγοις. οἷς ἅπασιν ὑπάρχει τὸ ἐναλλάξ, οὐκ ἔστιν εἰπεῖν, καὶ τί κοινὸν ἐλλείψει καὶ κύκλῳ, καὶ παραλληλογράμμῳ, χαλεπὸν ἀποδοῦναι. τὸ μὲν γὰρ ἐστὶν εὐθύγραμμον, τὸ δὲ περιφερόγραμμον, τὸ δὲ μικτόν. διόπερ οἰόμεθα καθόλου δεικνῦναι, ὅταν ἀποδεικνύωμεν ὅτι πᾶν παραλληλόγραμμον ἡ διάμετρος δίχα τέμνει. τῷ μὴ συνορᾶν τὸ κοινόν, δι' ὃ ἀληθές. τοῦτο μὲν οὖν καὶ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων τὸ τοιοῦτον οὐκ ἔστι καθόλου, διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν. ἐκεῖνο δὲ τὸ πᾶν παραλληλόγραμμον ἴσας ἔχειν τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας. καὶ γὰρ ἂν ὑποθῇ τι σχῆμα τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχον, δειχθήσεται τοῦτο παραλληλόγραμμον. ἔστω γὰρ τοιοῦτον τὸ αβ γδ καὶ διάμετρος ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ βδ ἴσαι ταῖς αγ γδ, καὶ αἱ ὑπ' αὐτῶν περιεχόμεναι γωνίαι ἴσαι, καὶ ἡ βάσις κοινή, καὶ πάντα πᾶσιν ἴσα. εἰ ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ τῇ ὑπὸ αδγ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αδβ τῇ ὑπὸ γαδ. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν αβ τῇ γδ, ἡ δὲ αγ τῇ βδ. ὥστε παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβ γδ. τοσαῦτα περὶ τούτων. ἔοικεν δὲ καὶ αὐτὸ τὸ ὄνομα τῶν παραλληλογράμμων ὁ στοιχειωτὴς συνθεῖναι, τὴν ἀφορμὴν λαβὼν ἀπὸ τοῦ προειρημένου θεωρήματος. ἐπειδὴ γὰρ ἔδειξεν ὅτι αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσι, δῆλον ὅτι τὰς ἀπεναντίον ἀπέφηνε παραλλήλους, καὶ τὰς ἐπιζευγνυούσας. τὸ δὲ ὑπὸ παραλλήλων περιεχόμενον εἰκότως παραλληλόγραμμον ἐκάλεσεν. ὡς τὸ ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενον εὐθύγραμμον προσείρηκεν. καὶ ὁ μὲν στοιχειωτὴς δῆλος

*μετέρχεσθαι

ἐστὶ

ἐστὶν τὸ παραλληλόγραμμον ὡς ἐν τετραπλεύροις τιθέμενον. ἐπιστῆσαι δὲ ἄξιον, μή ποτε καὶ πᾶν εὐθύγραμμον ἀρτιόπλευρον, ὅταν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ὑπάρχῃ, παραλληλόγραμμον ῥητέον. ἔχει γὰρ καὶ τοῦτο τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας ἴσας. οἷον τὸ ἑξάγωνον καὶ τὸ δωδεκάγωνον. ἐὰν γὰρ νοήσῃς ἑξάγωνον τὸ αβγδεζ καὶ ἐπιζεύξῃς τὴν αγ, δείκνυσι παράλληλον τὴν αζ τῇ γδ. ἐστὶ γὰρ μιᾶς ὀρθῆς καὶ τρίτου ἡ πρὸς τῷ β, καὶ ἑκάστη τοῦ ἑξαγώνου ὅταν ᾖ ἰσογώνιον. καὶ ἴση ἡ αβ τῇ βγ. κεῖται γὰρ ἰσόπλευρον. ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ βαγ βγα τρίτου ἐστίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ζαγ αγδ ὀρθαί εἰσιν. ὥστε παράλληλός ἐστιν ἡ αζ τῇ γδ. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς ἄλλας τὰς ἀπεναντίον δείξομεν παραλλήλους. καὶ ἐπὶ τοῦ ὀκταγώνου ὡσαύτως, καὶ τῶν λοιπῶν. εἰ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ὑπὸ παραλλήλων τῶν ἀπεναντίον περιεχόμενον, καὶ ἐν τοῖς μὴ τετραπλεύροις ἔσται παραλληλόγραμμον. τετράπλευρον ἐστὶν φανερόν. δηλοῖ δὲ ἐν ἐκείνοις μάλιστα τοῖς θεωρήμασιν, ἐν οἷς φησι παραλληλόγραμμον τριγώνου τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ὄν, διπλάσιον εἶναι τοῦ τριγώνου. τοῦτο γὰρ ἐπὶ μόνων τῶν τετραπλεύρων ἀληθές.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. λε

Ὥσπερ τῶν θεωρημάτων ἐλέγομεν εἶναι τὰ μὲν καθολικά τινα, τὰ δὲ ἐπὶ μέρους, καὶ ὅντινα τρόπον ταῦτα διαφέρομεν, προσετίθεμεν, καὶ ὅτι τὰ μὲν ἁπλᾶ, τὰ δὲ σύνθετα, καὶ τίς τούτων ἑκατέρων ἐπεδείκνυμεν, οὕτω δὴ κατ' ἄλλην διάκρισιν, τὰ μὲν εἶναι τοπικά φαμεν, τὰ δὲ οὔ. καλῶ δὲ τοπικὰ μὲν, οἷς ταὐτὸν σύμπτωμα πρὸς ὅλῳ τινὶ τόπῳ συμβέβηκεν. τόπον δὲ γραμμῆς, ἢ ἐπιφανείας θέσιν, ποιοῦσαν ἓν καὶ ταὐτὸν σύμπτωμα. τῶν γὰρ τοπικῶν, τὰ μέν ἐστι πρὸς γραμμαῖς συνιστάμενα, τὰ δὲ πρὸς ἐπιφανείαις. καὶ ἐπειδὴ τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν ἐπίπεδοι αἱ δὲ στερεαί, ἐπίπεδοι μὲν, ὧν ἐν ἐπιπέδῳ ἁπλῆ ἡ νόησις ὡς τῆς εὐθείας. στερεαὶ δὲ ὧν ἡ γένεσις ἔκ τινος τομῆς ἀναφαίνεται στερεοῦ σχήματος, ὡς τῆς κυλινδρικῆς ἕλικος, καὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν φαίην ἂν καὶ τῶν πρὸς γραμμαῖς τοπικῶν, τὰ μὲν ἐπίπεδον ἔχειν τόπον, τὰ δὲ στερεόν. τὸ μὲν οὖν προκείμενον θεώρημα καὶ τοπικόν ἐστι καὶ τῶν πρὸς γραμμαῖς τοπικῶν καὶ ἐπιπέδων. τὸ γὰρ μεταξὺ πᾶν τῶν παραλλήλων, τόπος ἐστὶ τῶν συνισταμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλογράμμων. ἃ δὴ καὶ δείκνυσιν ὁ στοιχειωτὴς ἴσα ἀλλήλοις. τῶν δὲ στερεῶν λεγομένων τοπικῶν θεωρημάτων παράδειγμα ἔστω τοιοῦτον. τὰ εἰς τὰς ἀσυμπτώτους καὶ τὴν ὑπερβολὴν ἐγγραφόμενα παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν. ὅτι γὰρ ἡ ὑπερβολὴ στερεὰ γραμμή ἐστιν, δῆλον. κώνου γάρ ἐστι γραμμὴ τομή. τὰ δὴ τοιαῦτα τῶν θεωρημάτων ὥς φησιν ὁ Γεμῖνος, ἀπεικάζειν ὁ Χρύσιππος ταῖς ἰδέαις. ὡς γὰρ ἐκεῖναι τῶν ἀπείρων ἐν πέρασιν ὡρισμένοις τὴν γένεσιν περιλαμβάνουσιν, οὕτως καὶ ἐν τούτοις τῶν ἀπείρων ἐν ὡρισμένοις τόποις ἡ περίληψις γίνεται, καὶ διὰ τὸν ὅρον τοῦτον ἡ ἰσότης ἀναφαίνεται. τὸ γὰρ ὕψος τῶν παραλλήλων τὸ αὐτὸ μένον, ἀπείρων νοουμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλογράμμων, πάντα ἴσα ἀλλήλοις ἀποφαίνει. τοπικὸν οὖν θεώρημα πρῶτον ὁ στοιχειωτὴς ἀνέγραψεν τὸ προκείμενον. καὶ ἔοικεν ὡς ἐν στοιχείῳ κατὰ πάσας τὰς διαιρέσεις τὰ θεωρήματα ποικίλλων, μὴ δὲ τὴν τοιαύτην εἰκότως ἰδέαν αὐτῶν παραλιπεῖν, ἀλλὰ ἐνταῦθα μὲν ἐπειδὴ περὶ εὐθυγράμμων ὁ λόγος τοπικὰ παραδίδωσιν ἐπίπεδα πρὸς εὐθείαις, ἐν δὲ τῷ τρίτῳ, τὰ περὶ κύκλων καὶ τῶν ἐν τούτοις συμπτωμάτων πραγματευόμενος τὰς περιφερείας * ἀναδιδάξει τῶν τοπικῶν ἅμα καὶ ἐπιπέδων θεωρημάτων. τοιοῦτον γὰρ ἐν ἐκείνοις, τὸ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ τὸ, αἱ ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθαί. ἀπείρων γὰρ συνισταμένων πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνιῶν τῶν αὐτῆς βάσεως ὅσας πάσας δείκνυσιν ἴσας. καὶ ἔστιν ἀνάλογον ἐκεῖνα τοῖς τριγώνοις καὶ παραλληλογράμμοις. τοῖς ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, τὸ μὲν δὴ τῶν προσεχῶς ζητηθησομένων θεωρημάτων εἶδος, τοιοῦτόν ἐστι, τοπικὸν παρὰ τοῖς παλαιοῖς μαθηματικοῖς ἐπονομαζόμενον. δόξειεν δ' ἂν παντελῶς εἶναι θαυμαστὸν τοῖς ἀπείροις τῆς τοιαύτης θεωρίας, εἰ τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. πῶς γὰρ τῶν μηκῶν τῶν συνισταμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως χωρίων ἐπ' ἄπειρον αὐξομένων; ἐφ' ὅσον γὰρ τὰς παραλλήλους ἐκβάλλομεν ἐπὶ τοσοῦτον καὶ τὰ μήκη τῶν παραλληλογράμμων αὔξειν δυνάμεθα. πῶς δὲ τούτου γινομένου, μένει τῶν χωρίων ἡ ἰσότης εἰκότως ἄν τις ἐπιζητήσειεν. εἰ γὰρ τὸ μὲν πλάτος ταὐτόν, ἡ γὰρ βάσις μία, τὸ δὲ μῆκος μεῖζον, πῶς οὐχὶ καὶ τὸ χωρίον μεῖζον; ἔστι μὲν οὖν τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ τὸ περὶ τῶν τριγώνων ἐξῆς, τῶν παραδόξων ἐν τοῖς μαθήμασι καλουμένων θεωρημάτων. ἐξειργάσαντο γὰρ καὶ οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων τὸν παράδοξον λεγόμενον τόπον. ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς στοᾶς ἐπὶ τῶν δογμάτων, καὶ τίθενται καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα τῶν τοιούτων εἶναι. καταπλήττει γοῦν τοὺς πολλοὺς εὐθὺς εἰ τὸ μῆκος πολλαπλασιαζόμενον,

οὐκ ἀναιρεῖ τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων διὰ τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως. ὁμοίως δὲ λεκτέον ὅτι μέγιστον ἡ τῶν γωνιῶν ἰσότης δύναται καὶ ἀνισότης, πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν χωρίων ἢ τὴν ἐλάττωσιν. ὅσῳ γὰρ ἀνίσους ποιοῦμεν τὰς γωνίας, τόσῳ μᾶλλον ἐλασσοῦμεν τὸ χωρίον, εἰ μένοι τὸ μῆκος καὶ πλάτος ταὐτόν, δεῖ οὖν τῆς μήκους αὐξήσεως, ἵνα τὴν ἰσότητα φυλάξωμεν. ἔστω γὰρ εἰ τύχοι παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αγ εἰς ἄπειρον, καὶ ἔστω τυχὸν ὀρθογώνιον τοῦτο, καὶ ἐπὶ τῆς βδ βάσεως, ἕτερον συνεστάτω τὸ βεζδ. ὅτι μὲν οὖν τὸ μῆκος ηὔξηται δῆλον. μείζων γὰρ ἡ βε τῆς αβ, ὀρθῆς οὔσης τῆς πρὸς τῷ α γωνίας. ἀλλὰ τοῦτο ἀναγκαίως γέγονεν. ἄνισοι γὰρ αἱ γωνίαι γεγόνασι τοῦ βεζδ παραλληλογράμμου. καὶ αἱ μὲν ὀξεῖαι, αἱ δὲ ἀμβλεῖαι. τοῦτο δὲ συμβέβηκεν, διὰ τὸ τὴν βε πλευρὰν ὥσπερ συμπίπτειν τῇ βδ καὶ συστέλλειν τὸ χωρίον. εἰλήφθω γὰρ εἰ τύχοι ἴση τῇ αβ ἡ βη, καὶ παράλληλος διὰ τοῦ η τῇ βδ ἡ ηθ. ἔστιν ἄρα καὶ τὸ μῆκος τοῦ βδηθ ἴσον τῷ μήκει τοῦ αβγδ, καὶ τὸ πλάτος ταὐτόν, ἀλλὰ χωρίον ἔλασσον τοῦ χωρίου, καὶ γὰρ τοῦ βεζδ, ἔλασσόν ἐστιν. ἡ μὲν δὴ τῶν γωνιῶν ἀνισότης, τὸ ἐμβαδὸν ἐλάττωσεν, ἡ δὲ τοῦ μήκους αὔξησις ὅσον ἀφεῖλεν ἐκείνη, τοσοῦτον προσθεῖσα τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων ἐφύλαξεν. ὅρος δὲ τῆς τοῦ μήκους αὐξήσεώς ἐστιν ὁ τῶν παραλλήλων γραμμῶν τόπος. ὀρθογωνίων μὲν γὰρ συναμφοτέρων ὄντων τῶν παραλληλογράμμων δείκνυται τὸ τετράγωνον τοῦ ἑτερομήκους μεῖζον. ἰσοπλεύρων δὲ ἀμφοτέρων ὄντων, τὸ ὀρθογώνιον δείκνυται τοῦ μὴ ὀρθογωνίου μεῖζον. καὶ γὰρ ἡ τῶν γωνιῶν ὀρθότης καὶ ἡ τῶν πλευρῶν ἰσότης, τὸ πᾶν δύναται πρὸς τὴν τῶν χωρίων αὔξησιν. ὅθεν δὴ τὸ μὲν τετράγωνον ἀναφαίνεται τῶν ἰσοπεριμέτρων μεῖζον, τὸ δὲ ῥομβοειδὲς ἁπάντων ἔλασσον. ἀλλὰ ταῦτα μὲν ἐν ἄλλοις δείξομεν. προσπαθέστερα γάρ ἐστι ταῖς ὑποθέσεσι τοῦ δευτέρου βιβλίου. πρὸς δὲ τὸ προκείμενον θεώρημα δεῖ γινώσκειν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα λέγων, ἴσα τὰ χωρία λέγει, καὶ οὐ τὰς πλευράς. περὶ τούτων γὰρ ὁ λόγος περὶ τῶν ἐμβαδῶν. καὶ ὅτι νῦν πρῶτον ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦδε τοῦ θεωρήματος μνήμην ἐποιήσατο τῶν τραπεζίων. ὃ καὶ δῆλον, ὅτι εἰκότως ἐν ταῖς ὑποθέσεσι καὶ τοῦτο ὅ, τι ποτέ ἐστιν ἐδίδαξεν. ὅτι τετράπλευρον μὲν τῷ γένει, μὴ παραλληλόγραμμον δέ. τὸ γὰρ μηδὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἔχον, ἐκβέβηκεν τὴν τῶν παραλληλογράμμων τάξεως. ὁ μὲν οὖν στοιχειωτὴς ἀπέδειξε τὸ προκείμενον τὴν χαλεπωτέραν πτῶσιν ἐκλεξάμενος. εἰ δὲ λέγει τίς ἔστω τὰ αβ γδ καὶ βγ δε ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς δβ. ὥστε τὴν δγ διάμετρον εἶναι τοῦ αε, δείξομεν ὅτι ἴσα ἐστὶν αὐτόθεν. τὸ γὰρ βγδ τρίγωνον, ἑκατέρου ἥμισύ ἐστιν. διότι τοῦ μὲν αε διάμετρος ἡ γδ, τοῦ δὲ δε ἡ γε. αἱ δὲ διάμετροι διχοτομοῦσι τὰ παραλληλόγραμμα. ἴσον ἄρα τὸ αε τῷ δε. πάλιν ἔστι τις τὴν δγ τέμνουσαν ὑποθεῖτο τὴν τοῦ αβ παραλληλογράμμου πλευράν, καὶ οὕτως κείμενα τὰ παραλληλόγραμμα ὥστε τὰ αβ δε καὶ βγ δζ, δείξομεν ὅτι καὶ ταῦτα ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ αε τῇ γζ, ἑκατέρα γὰρ ἴση τῇ δβ ἀπεναντίον οὖσα. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ γε, ἴση ἄρα ἡ αγ τῇ εζ, ἀλλὰ καὶ ἡ αδ τῇ εβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γαδ τῇ ὑπὸ ζεβ, παράλληλος γὰρ ἡ αδ τῇ εβ. καὶ βάσις ἄρα ἡ γδ τῇ ζβ βάσει ἴση, καὶ ὅλον τὸ αδγ τρίγωνον τῷ εβζ τριγώνῳ ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ γε τραπέζιον. ὅλον ἄρα τὸ αβ, ἴσον τῷ δζ. καὶ ὁρᾷς ὅτι τρεῖς αὗται μόναι πτώσεις εἰσίν. ἡ γὰρ δγ, ἢ τέμνει τὴν εβ, ὡς ὁ στοιχειωτὴς ἔλαβεν, ἢ ἐπὶ τὸ ε πίπτει, ὡς ἐν τῇ πρὸ ταύτης καταγραφῇ, ἢ τέμνει τὴν αε, ὡς νῦν ὑπεθέμεθα. καὶ δέδεικται ἐπὶ πάσας τὰς πτώσεις τὸ θεώρημα ἀληθές, πλὴν ὅτι διπλῆς οὔσης τῶν τραπεζίων διαφορᾶς, καὶ τῶν μὲν οὐδετέραν τῶν ἀπεναντίον ἐχόντων παράλληλον, τῶν δὲ μίαν μίαν, ἐπὶ τῶν παρὰ τῷ στοιχειωτῇ τραπεζίων τὸ ἕτερόν ἐστιν εἶδος, καὶ ἐπὶ τῆς καταγραφῆς ταύτης. ἡ γὰρ γε τῇ δβ παράλληλος.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.)

Τὸ μὲν πρὸ τούτου τὰς βάσεις τὰς αὐτὰς ἐλάμβανεν, τοῦτο δὲ ἴσας μέν, διαφερούσας δὲ ἀλλήλων. κοινὸν δὲ ἀμφοτέροις τὸ ἐν ταῖς αὐταῖς ὑποτίθεσθαι παραλλήλοις τὰ παραλληλόγραμμα. δεῖ δὴ οὖν αὐτὰ μήτε ἐνδοτέρω πίπτειν τῶν ὑποκειμένων παραλλήλων εὐθειῶν, μήτε ἐξωτέρω. παραλληλόγραμμα γὰρ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι λέγεται παραλλήλοις, ὅταν αἵ τε βάσεις αὐτῶν καὶ αἱ ταύταις ἀπεναντίον κείμεναι, ταῖς αὐταῖς ἐφαρμόζωνται παραλλήλοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν στοιχειωτὴς ἔδειξε τὸ θεώρημα τὰς βάσεις πάντη κεχωρισμένας λαβών. κωλύει δὲ οὐδὲν καὶ οὕτως αὐτὰς ὑποκειμένας λαβεῖν, ὡς ἔχειν τι μέρος κοινόν. ἔστω γὰρ τὰ αβ γδ παραλληλόγραμμα ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν εβ ζδ, λέγω ὅτι ἴσα ἐστί. ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ βη. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ εζ τῇ βδ. καὶ γὰρ ἡ εβ τῇ ζδ. ἀλλ᾽ ἡ εζ τῇ γη ἴση, καὶ ἡ γε τῇ βη ἴση ἐστὶ δὲ καὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ γβ, καὶ ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν ἑκατέρῳ τῶν αβ γδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις.

λοις. ἴσον

ὸν ἄρα τὸ αβ τῷ γδ. εἰ δέ τις μήτε κοινὸν μέρος ἐχούσας ὑποθοῖτο τὰς τῶν παραλληλογράμμων βάσεις, μήτε κεχωρισμένας ἀλλήλων, ἀλλ' ὅσον ἀπολείπεσθαι μόνον συναπτούσας ἀλλήλαις καθ' ἓν σημεῖον, ὡς ἐπὶ τῶν αβ εδ, ἐροῦμεν ὅτι ἴση ἡ βε τῇ εζ, καὶ τῇ γδ. ὥστε καὶ ἡ γβ τῇ δε. αἱ γὰρ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ βδ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων καὶ ἐν ταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ δε. ἴσα ἄρα τὰ αβ δε παραλληλόγραμμά ἐστι. ἡμεῖς μὲν οὖν ἐπὶ τῇ πρώτῃ ἐπιβολῇ τὰς τοῦ θεωρήματος κατασκευὰς διείλομεν, εἰπόντες τὰς βάσεις ἢ κοινὸν ἔχειν μέρος, ἢ ἅπτεσθαι μόνον ἀλλήλων. δυνατὸν δὲ καὶ ἅπτωνται ὡς αἱ βε εζ, ἐκτὸς ὅλον τὸ δε τοῦ αε ὑποτίθεσθαι, ἢ τὰς γε πλευρὰς ἐφαρμοζούσας τῇ αε, ἢ τῇ γε, τεμνούσας τὴν αε, ἢ τὰς γε πιπτούσας, ὡς διάμετρον τῇ βε, ὅτι καὶ ἡ δζ αὐτὴ ἔσται τῇ αζ. ἢ τῆς αβ ἐκβεβλημένης ἐπὶ τὸ κ, ἢ τὰς γε πιπτούσας ἐκτὸς τοῦ θ, καὶ τὰς δζ τεμνούσας τὴν αβ, ἢ ἐφαρμοζούσας ἀποφαίνοντα. καὶ γὰρ ἴσων ἐκείνων, ἄνισα τὰ χωρία καὶ ἀνίσων ἴσα δείκνυται. τοῦτον δέ τι πεπόνθασιν οἱ χωρογράφοι. τὰ μεγέθη τῶν πόλεων ἐκ τῶν περιμέτρων συλλογιζόμενοι. ἤδη δέ τινες κοινωνοὶ κτημάτων ἐν τῇ διαιρέσει, παραλογίσαντες τοὺς συνδιανεμομένους τῇ ὑπεροχῇ τῆς περιμέτρου παρακεχρημένοι, καὶ πλείονα λαβόντες τῶν συνελθόντων, εἰληφότων τῶν ὑπὸ τῆς μείζονος περιμέτρου περιεχόμενα. ἐμβαδὸν δ' εἰς ἃ ἀμείψαντες χωρία περιοχῆς δι' ἐλάσσονι χρώμενα βελτιόνων ἀπηνέγκαντο δόξαν. δυοῖν γὰρ παραμένων ἰσοσκελῶν τριγώνων, ὧν τὸ μὲν ἑκατέραν τῶν ἴσων ἔχει πέντε, τὴν δὲ βάσιν ἓξ τῶν αὐτῶν τὸ δὲ ἑκατέραν μὲν τῶν ἴσων πέντε, τὴν δὲ βάσιν ὀκτώ, τῶν αὐτῶν οἷον πήχεων δακτύλων, κομιδῇ ἀπατᾷ τὸν ἄπειρον τούτων εἰς αἵρεσιν. τοῦτο μὲν γὰρ τὴν περίμετρον ἔχει δέκα καὶ ὀκτὼ θάτερον δὲ ἓξ καὶ δέκα τῶν αὐτῶν μέτρων. ἀλλ' ὁ γεωμετρικός, οὐκ ἀγνοήσει ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ χωρία κἂν αἱ περίμετροι ἄνισοι ὦσιν. δώδεκα γὰρ ἑκάτερον ἐστίν. ἐὰν γοῦν ἀγάγῃς ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετον δίχα μὲν διαιρήσεις τὰς βάσεις, καὶ ποιήσεις ἐν θατέρῳ μὲν τριῶν, ἐν δὲ τῷ λοιπῷ τεττάρων τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως. αὐτὴν δὲ τὴν κάθετον ἀνάπαλιν, οὗ μὲν τεττάρων οὗ δὲ τριῶν. δεῖ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς πεντάδος ἴσον τῷ τε ἀπὸ τῆς καθέτου καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως. ἀλλ' εἰ μὲν αὕτη τριῶν ἡ κάθετος τεττάρων, αὕτη τεττάρων, ἐκείνη δηλαδὴ τριῶν. ποιήσας οὖν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως, ἕξεις τὸ ἴσον τοῦ τριγώνου χωρίον. τοῦτο δὲ ταυτόν ἐστιν καθ' ἑκάτερον. εἴτε τρία ἐπὶ τὰ τέσσαρα, εἴτε τὰ τέσσαρα ἐπὶ τὰ τρία ποιήσαις. ταῦτα μὲν οὖν εἴρηται πρὸς ἔνδειξιν τοῦ τὴν ἰσότητα τῶν χωρίων μὴ πάντως ἐκ τῶν περιμέτρων λαμβάνεσθαι. ἵνα μὴ θαυμάζωμεν εἰ τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τριγώνων ἐπ' ἄπειρον αὔξεσθαι περὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς δυναμένων, ἐντὸς τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ὅμως ἡ τῶν χωρίων ἰσότης ἀνεξάλλακτος διαμένει. δεῖ δὲ ἐκεῖνα τῶν τριγώνων ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις λέγεσθαι, ὅσα τὰς βάσεις ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἔχοντα τῶν παραλλήλων, ἐρείδει τὰς κορυφὰς ἐπὶ τῆς λοιπῆς, καὶ ὧν ἡ ἐπὶ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνυμένη, μία τέ ἐστιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας κειμένας.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. λη

Ἔστι μὲν καὶ τοῦτο τὸ θεώρημα τοπικόν, ἀνάλογον τοῖς παραλληλογράμμοις, καὶ τῇ τῶν τριγώνων θέσει ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὑποτιθεμένων. δοκεῖ δέ μοι τῶν τεττάρων τούτων θεωρημάτων, ὧν δύο μέν ἐστιν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων δεδειγμένα, δύο δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων, περὶ μὲν τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως. τὰ δὲ ἴσων τῶν ὑπαρχουσῶν τῶν βάσεων, μίαν ἀπόδειξιν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ περὶ τὸ πρῶτον θεώρημα παρέχεσθαι. λανθάνειν τε τοὺς πολλοὺς τοῦτο ποιῶν. ὅτι αὖ γὰρ τοῦτο δείκνυσι τὰ τρίγωνα καὶ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντα πρὸς ἄλληλα τὸν λόγον ὃν ἔχουσιν αἱ βάσεις, οὐδὲν ἄλλο ἢ ταῦτα πάντα καθολικώτερον ἀποδείκνυσιν ἐκ τῆς ἀναλογίας. τὸ γὰρ αὐτὸ ὕψος οὐδὲν διαφέρει, ἢ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. πάντα γὰρ τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις ὑπὸ τὸ αὐτό ἐστιν ὕψος καὶ ἀνάπαλιν. ὕψος γάρ ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς ἑτέρας παραλλήλου κάθετος ἐπὶ τὴν λοιπήν. ἐπεὶ μὲν οὖν διὰ ἀναλογίας δέδεικται ὅτι οὕτως ἔχει τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἤτοι τὰ ἐν ταῖς αὐταῖς κείμενα παραλλήλοις, ὡς αἱ βάσεις. καὶ ἴσων οὐσῶν τῶν βάσεων, ἴσα τὰ χωρία, καὶ διπλάσια διπλασίων καὶ ἄλλον λόγον ἐχουσῶν, τὸν αὐτὸν ἕξει καὶ τὰ χωρία λόγον πρὸς ἄλληλα. ἐνταῦθα δέ, οὔ γε τὴν ἀναλογίαν χρῆσθαι μηδέπω διδάξαντα περὶ αὐτῆς, ἀρκεῖται τῇ ἰσότητι μόνῃ, καὶ ταύτην ἐκ τῆς ἰσότητος ἢ ταυτότητος τῶν βάσεων συλλογίζεται. ἐν ἑνὶ δὲ οὖν ἐκείνῳ τὰ τέτταρα ταῦτα θεωρήματα περιέχεται οὐ μόνον ὅτι διὰ μιᾶς ἀποδείξεως δείκνυσιν ὅσα ἐν τοῖς τέτρασιν περιέχεται τόποις, ἀλλ' ὅτι καὶ τελειοτέραν προστίθησιν τὴν ἐπιστήμην τῶν λόγων, κἂν ἄνισοι αἱ βάσεις ὦσι, ταῦτα περὶ τούτων.

ἔστι

ὅτι δὲ καὶ τοῦτο πολύπτωτόν ἐστιν τὸ θεώρημα, καὶ δυνατὸν τὰς βάσεις τὰς τῶν τριγώνων ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἐχούσας λαμβάνειν, ὡς ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, ἢ μηδενὶ μὲν κοινωνούσας, καθ' ἓν δὲ σημεῖον ἀλλήλαις συναπτούσας, ἢ καὶ πάντη κεχωρισμένας ὥστε εἶναι μεταξὺ γραμμήν, δῆλόν ἐστιν τοῖς μικρὰ συνεῖναι δυναμένοις. καὶ ὅτι ἐπὶ πάσας τὰς πτώσεις ὅπως ἂν ἔχῃ τὰς βάσεις κειμένας, ἢ τὰς κορυφάς, ἡ αὐτὴ μέθοδος ἄγειν παραλλήλους ταῖς πλευραῖς, καὶ ποιεῖν ἑκατέρου τῶν τριγώνων ἰσότητα κατασκευάζειν.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.) Ὅτε μὲν τὴν ἰσότητα δεικνύναι πρόκειται, τότε τέσσαρα θεωρήματα τὸν ἀριθμὸν ἐποιοῦμεν, δύο μὲν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, δύο δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων λαμβάνοντες, ἢ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἢ ἐπὶ ἴσων κείμενα βάσεων. νῦν δὲ ἀντιστρέφοντες, τὰ μὲν ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων ἀντιστρέφοντα παρήκαμεν, τὰ δὲ ἐπὶ τῶν τριγώνων μνήμης ἠξιώσαμεν. αἴτιον δὲ ὅτι τρόπος μὲν τῆς ἀποδείξεως ὁ αὐτὸς καὶ ἐπ' ἐκείνων ἀπαραλλάκτως, διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, καὶ τῆς ὁμοίας κατασκευῆς ἀρκούμεθα δὲ ἐπὶ τῶν ἁπλουστέρων, λέγω δὴ τῶν τριγώνων ὑποδείξαντες τὴν μέθοδον, καταλιπεῖν τοῖς ἀγχινουστέροις καὶ ἐπὶ τῶν ὑπολειπομένων τὰ αὐτὰ συλλογίζεσθαι. ἐπεὶ ὅτι γε ἡ αὐτὴ καὶ ἐπὶ τούτων μέθοδος ῥᾴδιον συνιδεῖν. λαβόντες γὰρ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἢ καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων, ἐροῦμεν ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. εἰ γὰρ μὴ ἢ ἐντὸς πεσεῖται θατέρα τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ παραλλήλων ἐκβαλλομένων ἢ ἐκτός. ὅπως δὲ ἂν πίπτῃ λαβόντες ἐκεῖνο καὶ τὰς ἐν αὐτῷ παραλλήλους, ἐδείξαμεν ἃ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὅτι τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ ἑαυτοῦ μέρει. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ὅτι δὲ εἰκότως ὁ στοιχειωτὴς προσέθηκεν, τὸ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δῆλον ὅτι, μιᾶς γὰρ βάσεως ἴσα τρίγωνα λαβεῖν δυνατόν, τὸ μὲν ἐπὶ τάδε τὰ μέρη, τὸ δὲ ἐπὶ θάτερα ἀλλ' οὐ πάντως ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν ταῦτα παραλλήλοις. οὐδὲ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. τοῦτο μὲν οὖν διὰ τοῦτο προσέθηκε. διχῶς δὲ δυνάμενον ἀγαγεῖν τὴν παράλληλον, καὶ τὴν ἄτοπον ὑπόθεσιν αὐτὸς ἤγαγεν ἐντός. ἡμεῖς δὲ ἐκτὸς ἀγαγόντες τὰ αὐτὰ δείξομεν. ἔστω γὰρ τὰ αβγ, δβγ τρίγωνα ἐπὶ μιᾶς βάσεως, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις, καὶ ἡ ἐπὶ τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθεῖσα τῇ βάσει παράλληλός ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. εἰ δὲ μή ἐστιν αὐτῇ παράλληλος, ἔστω ἡ ταύτης ἐκτὸς ἡ αε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ γδε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβ. ἴσον ἄρα τὸ εβγ τῷ αβγ. ἀλλὰ τὸ αβγ τῷ δβγ. τὸ ἄρα εβγ τῷ δβγ ἴσον, τῷ μέρει τὸ ὅλον ἀλλὰ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔξω πεσεῖται τῆς αδ ἡ παράλληλος. δέδεικται δὲ ὅτι οὐδὲ ἐντὸς παρὰ τῷ στοιχειωτῇ, αὐτὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αδ τῇ βγ παράλληλος. ἐν ταῖς αὐταῖς ἄρα παραλλήλοις ἐστὶ τὰ ἴσα τρίγωνα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις. ἀποδέδεικται μὲν δὴ καὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. ἄξιον δὲ ἐπισημήνασθαι ὅτι τριττῆς οὔσης τῆς τῶν θεωρημάτων ἀντιστροφῆς, ἢ γὰρ ὅλον ἀντιστρέφει πρὸς ὅλον, ὡς τὸ ὀκτωκαιδέκατον καὶ ἐννεακαιδέκατον εἴπομεν, ἢ ὅλον πρὸς μέρος, ὡς τὸ ἕκτον καὶ πέμπτον, ἢ ὅλον πρὸς μέρος, ὡς τὸ ὄγδοον καὶ τέταρτον, οὐ γὰρ ὅλον τὸ δεδειγμένον ἐν θατέρῳ ζητούμενόν ἐστιν ἐν θατέρῳ. οὐδὲ τὸ ζητούμενον δεδειγμένον, ἀλλὰ μέρος. ἔοικε δὲ τοιαῦτα εἶναι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν τριγώνων. ἐκεῖ γὰρ τὸ ζητούμενον ἐν τοῖς πρὸ τούτων ἴσα εἶναι τρίγωνα, τοῦτο δὲ οὐ μόνον ἐστὶ δεδομένον ἐν τούτοις μέρος προσλαβὸν τῶν ἐν ἐκείνοις ὑποθέσεων. τὸ γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἶναι βάσεως ἢ ἐπὶ ἴσων, καὶ ἐπὶ τούτων δέδοται καὶ ἐπ' ἐκείνων. πλὴν ὅτι προσέθηκεν ἐν ταύταις ταῖς ὑποθέσεσιν. οὐ μὴν ἐν ἐκείνοις μήτε ζητούμενον μήτε δεδομένον. τὸ γὰρ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔξωθεν προσείληπται τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἔστι καὶ ὁ τρόπος τῆς ἀντιστροφῆς ὁ αὐτὸς ἐπὶ τούτου καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀπαράλλακτος, καὶ τὸ παραλελειμμένον τῷ στοιχειωτῇ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς ὡσαύτως ἀποδείκνυται. καὶ οὐδὲν δεῖ τὰ αὐτὰ ἀνακυκλεῖν. τριῶν δὲ ὄντων τούτων ἐν ταῖς εἰρημέναις προτάσεσιν, τοῦ ἐπὶ ἴσων εἶναι βάσεων, ἢ τῆς αὐτῆς, τοῦ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἄδηλον ὅτι δύο συμπλέκοντες ἀεί. τὸ δὲ ἓν καταλείποντες, ποικίλως ἀντιστρέφομεν. ἢ γὰρ τὰς βάσεις ὑποθησόμεθα τὰς αὐτάς, ἢ ἴσας καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ ποιοῦμεν τέσσαρα θεωρήματα. ἢ ἴσα ληψόμεθα αὐτὰ καὶ τὰς βάσεις τὰς αὐτάς, ἢ ἴσας, καὶ ποιοῦμεν ἄλλα τέσσαρα. ὧν τὰ μὲν δύο παρῆκεν ὁ στοιχειωτής, τὰ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων, τὰ δὲ δύο ἔδειξεν τὰ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ἢ καὶ ἴσα λαβόντες καὶ ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, δείξομεν τὸ λοιπόν, ἢ ὅτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐστιν ἢ τῶν ἴσων

βάσεων

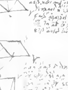
βάσεων, καὶ ποιήσομεν ἄλλα τέσσαρα ἃ δὴ καὶ πάντῃ παρῆκεν ὁ στοιχειωτής. καὶ γὰρ ἐπὶ τούτων ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις. πλὴν ὅθεν τούτων τῶν τεττάρων τὰ δύο οὐκ ἔστι καθ' αὑτὸ ἀληθῆ. οὐ γὰρ τὰ ἴσα παραλληλόγραμμα, ἢ τρίγωνα καὶ ὄντα ταῖς αὐταῖς ἐν ταῖς παραλλήλοις, ἐξ ἀνάγκης ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, ἀλλὰ τὸ ὅλον τοῦτο, ἐπὶ τούτων τῶν ὑποθέσεων ἀληθές, ὅτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐστὶν βάσεως ἢ ἐπὶ τῶν ἴσων. τὸ δὲ ἕτερον οὐκ ἐκ παντὸς ἕπεται ταῖς ληφθείσαις ὑποθέσεσιν. ὥστε δέκα ὄντων τῶν πάντων θεωρημάτων, ἓξ μὲν ὁ γεωμέτρης ἀνέγραψεν, τέσσαρα δὲ παρῆκεν, ἵνα μὴ πάλιν λόγῳ, τῆς αὐτῆς οὔσης ἀποδείξεως. δεικνύσθω γὰρ ἐπὶ τῶν τριγώνων, ὅτι ἐὰν ἴσα ᾖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἢ ἐπὶ τῶν αὐτῶν ἔσται βάσεων, ἢ ἐπὶ ἴσων. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὰ αβγ δεζ τρίγωνα οὕτως ἔχοντα ἐπὶ ἀνίσων βάσεων, τῶν βγ εζ. καὶ ἔστω μείζων ἡ βγ, καὶ ἀφῃρήσθω ἡ βθ ἴση τῇ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. ἐπεὶ οὖν τὰ αβθ δεζ ἐπὶ ἴσων ἐστὶ βάσεων τῶν βθ εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἄρα ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὰ αβγ δεζ ἴσα ὑπόκειται. τὰ ἄρα αβγ αβθ ἴσα ἔσται ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισοι αἱ βάσεις τῶν αβγ δεζ τριγώνων, ὁ δὲ αὐτὸς τρόπος τῆς ἀποδείξεως ἔσται καὶ ἐπὶ τῶν παραλληλογράμμων. ἐπεὶ οὖν καὶ ἡ μέθοδος τῆς δείξεως ἡ αὐτή, καὶ τὸ ἀδύνατον τὸ αὐτό, ὅτι τὸ ὅλον τῷ μέρει ἴσον, εἰκότως ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ παραλέλειπται. εἴρηται οὖν ὅτι δέκα θεωρήματα ἐξ ἀνάγκης, καὶ τίνα τὰ παραλελειμμένα, καὶ τίς ἡ αἰτία τῆς τούτων ἀποσιωπήσεως. ἀλλ' ἐπὶ τὰ ἐφεξῆς τούτοις μεταβαίνωμεν.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτήν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ. διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.)

ἔστι μὲν δὴ καὶ τὸ θεώρημα τοῦτο τοπικόν, μίγνυσι δὲ τριγώνων καὶ παραλληλογράμμων συστάσεις ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κειμένων. ὥσπερ οὖν τὰ παραλληλόγραμμα χωρὶς ἐθεασάμεθα, καὶ αὖ πάλιν τὰ τρίγωνα. οὕτω καὶ ἀμφότερα λαβόντες, τὸν τὸν ἐκείνοις πεπονθότα, τὸν λόγον ὃν ἔχει πρὸς ἄλληλα θεωρήσωμεν. ἐπ' ἐκείνων μὲν οὖν ὁ τῆς ἰσότητος ἀνεφαίνετο λόγος. πάντα γὰρ ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἐπὶ τῶν αὐτῶν βάσεων, εἴτε τρίγωνα εἴτε παραλληλόγραμμα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ὄντα παραλλήλοις. ἐπὶ δὲ τούτων, ὁ πρώτιστος δείκνυται τῶν ἀνίσων ὁ διπλάσιος. τὸ γὰρ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου διπλάσιον ἀποδείκνυσι τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως καὶ ὕψους τοῦ αὐτοῦ. ἀλλ' ὁ μὲν στοιχειωτής, τὴν τοῦ τριγώνου κορυφὴν ἐκτὸς ὑποθέμενος τοῦ παραλληλογράμμου τὸ προκείμενον ἔδειξεν. ἡμεῖς δὲ ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτὴν λαβόντες τοῦ παραλληλογράμμου πλευρᾶς τῆς παραλλήλου τῇ κοινῇ αὐτῶν βάσει τὸ αὐτὸ ἀποδείξομεν. δύο γὰρ αὗται τοῦ θεωρήματός εἰσι πτώσεις. ἐπειδὴ τῆς αὐτῆς βάσεως οὔσης ἀμφοῖν, ἢ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου τὴν κορυφὴν ἔχειν ἀνάγκη τὸ τρίγωνον, ἢ ἐκτός. ἔστω οὖν παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ καὶ τρίγωνον τὸ εγδ, καὶ κείσθω τὸ ε μεταξὺ τοῦ α καὶ β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ αγδ διπλάσιον, τὸ δὲ αδγ ἴσον τῷ εδγ τριγώνῳ, τὸ ἄρα παραλληλόγραμμον τοῦ εγδ τριγώνου διπλάσιον. ὅτι μὲν οὖν τῆς αὐτῆς οὔσης βάσεως δείκνυται τοῦ τριγώνου τὸ παραλληλόγραμμον διπλάσιον δῆλον. κἂν ἴσαι δὲ ὦσιν αἱ βάσεις, ὡσαύτως δειχθήσεται διαμέτρου ἡμῶν ἀγαγόντων τῶν παραλληλογράμμων. τῶν γὰρ τριγώνων ἴσων ὄντων, τὸ θατέρου διπλάσιον ἔσται καὶ τοῦ λοιποῦ διπλάσιον. τὰ δὲ τρίγωνα ἴσα διὰ τὴν ἰσότητα τῶν βάσεων καὶ τὴν ταυτότητα τοῦ ὕψους. εἰκότως οὖν καὶ ταῦτα παρῆκεν ὁ γεωμέτρης. ἡ αὐτὴ γὰρ ἀπόδειξις. ἢ γὰρ ταὐτὸν μέρος ἕξουσιν, ἢ κατὰ σημεῖον μόνον συναφθήσονται, ἢ κεχωρισμένα ἔσονται ἀπ' ἀλλήλων. ὅπως δ' ἂν ταῦτα διαποικίλληται μία ἡ ἀπόδειξις κατὰ πάσας τὰς πτώσεις. καὶ μὴν καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα τῷ θεωρήματι ὡσαύτως ἀποδείξομεν. ὧν ἓν μέν ἐστιν ἐὰν τριγώνου παραλληλόγραμμον διπλάσιον ᾖ, καὶ τὴν αὐτὴν ἔχῃ βάσιν ἀλλήλοις ἢ ἴσας. εἰ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἔσται παραλλήλοις. εἰ γὰρ μή, τὸ ὅλον ἴσον ἔσται τῷ μέρει, καὶ ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος. ἀνάγκη γὰρ ἢ ἐπὶ τῶν παραλλήλων πίπτειν τὴν τοῦ τριγώνου κορυφήν, ἢ ἐκτός. ὁποτέρως δ' ἔχει τὸ αὐτὸ ἀδύνατον ἀχθείσης παραλλήλου τῇ βάσει διὰ τῆς τοῦ τριγώνου κορυφῆς. ἕτερον δὲ ἐὰν τριγώνου παραλληλόγραμμον διπλάσιον ᾖ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἀμφότερα, ἐπὶ μιᾶς ἔσται βάσεως ἢ ἐπὶ ἴσων. εἰ γὰρ ἐπὶ ἀνίσων ἴσας λαβόντες, πάντως τὸ ὅλον μέρει δείξομεν ἴσον, εἰς οὖν τοῦτο κοινὸν ἀδύνατον πάντα τελευτᾷ τὰ θεωρήματα. διόπερ ὁ στοιχειωτὴς ἡμῖν παρῆκεν τὴν ἐν τούτοις ποικιλίαν ἀνερευνᾶν. αὐτὸς ἐπὶ τῶν ἁπλουστέρων καὶ ἀρχοειδεστέρων στήσας τὴν θεωρίαν, ἀλλ' ἐπεὶ καὶ ταῦτα ὑπομέμνηται,

φέρε

φέρε γυμνασίας ἕνεκα, μὴ λαβόντων παραλληλόγραμμον ἡμεῖς ἀλλὰ τραπέζιον, οὗ δύο μόναι εἰσὶ παράλληλοι, τριγώνῳ τὴν αὐτὴν ἔχον βάσιν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς κείμενον παραλλήλοις, ἐρῶμεν ὃν ἔχει λόγον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὅτι μὲν οὖν διπλάσιον οὐκ ἔσται δῆλον. ἦ γὰρ ἂν παραλληλόγραμμον εἴη τετράπλευρον γεγονός. λέγω δὲ ὅτι ἢ μεῖζον διπλασίου ἢ ἔλασσον. τῶν γὰρ δύο οὐσῶν παραλλήλων πάντως ἡ μέν ἐστι μείζων ἡ δὲ ἐλάσσων. ἐπεὶ ἴσων οὐσῶν καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι αὐτὰς ἔσονται παράλληλοι. ἂν μὲν οὖν τὸ τρίγωνον τὴν μείζονα ἔχῃ βάσιν, ἔλασσον ἢ διπλάσιον ἔσται τοῦ τριγώνου τὸ τετράπλευρον. ἐὰν δὲ τὴν ἐλάσσονα μεῖζον. ἔστω γὰρ τὸ αβγδ τετράπλευρον, καὶ ἐλάσσων ἡ αβ τῆς γδ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ αβ εἰς ἄπειρον, καὶ τρίγωνον τὸ εγδ, τὴν αὐτὴν ἐχέτω βάσιν τῷ τετραπλεύρῳ τῇ γδ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ δ τῇ αγ παράλληλος ἡ δζ. διπλάσιον ἄρα τοῦ εγδ τριγώνου τὸ αγδζ παραλληλόγραμμον. ὥστε τὸ αβγδ τετράπλευρον ἔλασσον ἢ διπλάσιον. πάλιν ἐχέτω τὸ τρίγωνον βάσιν τὴν αβ, καὶ παράλληλος τῇ αγ ἡ βζ. τὸ ἄρα αβγζ διπλάσιον τοῦ τριγώνου. ὥστε τὸ αβγδ τετράπλευρον μεῖζον ἢ διπλάσιον. τούτων δὴ δεδειγμένων λέγομεν ὅτι τετραπλεύρου ὄντος, οὗ δύο μόνον αἱ ἀπεναντίον παράλληλοι, εἰ μὲν ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν παραλλήλων δίχα τμηθείσης ἐπὶ τὴν λοιπὴν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, τοῦ γινομένου τριγώνου ἢ μεῖζόν ἐστιν τὸ τετράπλευρον, ἢ διπλάσιον, ἢ ἔλασσον. εἰ δὲ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ζευγνυουσῶν τὰς παραλλήλους δίχα τμηθείσης, ἐπὶ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαι τινὲς ἐπιζευχθεῖεν, τοῦ γινομένου τριγώνου τὸ τετράπλευρον πάντως διπλάσιόν ἐστι. τοῦτο οὖν δεικνύσθω. ἔστω δὴ τετράπλευρον τὸ αβγδ, καὶ παράλληλος ἐν αὐτῷ ἡ αδ γδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ δγ κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αεβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ βε, καὶ συμπιπτέτω τῇ αδ κατὰ τὸ ζ. ἐπεὶ οὖν αἱ κατὰ τὸ ε γωνίαι ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ, καὶ ἡ ὑπὸ ζδε τῇ ὑπὸ βγε, ἔσται καὶ ἡ ζε τῇ εβ ἴση, καὶ τὸ δεζ τρίγωνον τῷ βγε ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ αδε. ὅλον ἄρα τὸ αεζ ἴσον τοῖς δυσὶ τοῖς αδε βγε. ἀλλὰ τὸ αεζ ἴσον τῷ αεβ. ἐπὶ γὰρ ἴσων βάσεων τῶν βε εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. * τὸ ἄρα αεβ ἴσον τοῖς αδε παραλληλόγραμμα μὴ συνάπτῃ ἀλλήλοις καθ' ἓν σημεῖον. ὅπερ δὴ καὶ τὰ παραπληρώματα οὐκ ἔστι τετράπλευρα, διὸ καὶ ταύτην ἐκθέμενοι τὴν πτῶσιν, ἰδεῖν τὸ αὐτὸ συμβαῖνον. ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμον τῷ αβ παραλληλογράμμῳ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὰ γη δη. μεταξὺ δὲ αὐτῶν ἡ κλ εὐθεῖα τῆς διαμέτρου μέρος οὖσα. πάλιν οὖν τὰ αὐτὰ ἐρεῖς, τὸ αγδ τρίγωνον ἴσον τῷ βγδ. καὶ τὸ εγκ τῷ κγζ, καὶ τὸ δηλ τῷ δθλ. λοιπὸν ἄρα τὸ αελκη πεντάπλευρον, ἴσον τῷ θζκλβ πενταπλεύρῳ. ταῦτα δὲ ἦν τὰ παραπληρώματα. εἰ δὲ μήτε συνάπτοιτο τὰ παραλληλόγραμμα κατὰ σημεῖον, μήτε διεστῶτα εἴη, ἀλλὰ τέμνοντα ἄλληλα, ἡ αὐτὴ καὶ οὕτως ἀπόδειξις. ἔστω γὰρ παραλληλόγραμμον τὸ αβ καὶ διάμετρος ἡ γδ, καὶ παραλληλόγραμμα περὶ αὐτήν, ἓν μὲν τὸ εγζλ, ἕτερον δὲ καὶ τέμνον τοῦτο τὸ δη κθ. λέγω ὅτι τὰ ζη εθ παραπληρώματα ἴσα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ὅλον τὸ δηκ ἴσον τῷ δθκ, ἔστιν δὲ καὶ μέρος αὐτοῦ τὸ κλμ ἴσον τῷ κλν. παραλληλόγραμμον γάρ ἐστιν καὶ τὸ λκ, λοιπὸν ἄρα τὸ δλνθ τραπέζιον ἴσον τῷ αδλγ τρίγωνον ἴσον τῷ βγδ, καὶ τὸ ζγλ τῷ εγλ ἐν τῷ εζ παραλληλογράμμῳ. καὶ τραπέζιον τὸ δημλ τῷ δθν. λοιπὸν ἄρα τὸ ηζ τετράπλευρον ἴσον τῷ εθ τετραπλεύρῳ. δέδεικται ἄρα τὸ θεώρημα κατὰ πάσας τὰς πτώσεις. εἰσὶ δὲ τρεῖς μόνοι καὶ οὔτε πλείους οὔτε ἐλάσσους. τὰ γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἢ τέμνει ἄλληλα ἢ κατὰ σημεῖον ἅπτεται ἀλλήλων ἢ διεστῶτα ἔσται μέρει τινὶ τῆς διαμέτρου. τὸ δὲ ὄνομα τῶν παραπληρωμάτων ἀπ' αὐτοῦ τοῦ πράγματος ἔλαβεν ὁ στοιχειωτὴς ὡς καὶ τούτων παρὰ τὰ δύο παραλληλόγραμμα συμπληρούντων τὸ ὅλον. διόπερ αὐτὸ καθ' αὑτὸ μνήμης ἐν τοῖς ὅροις οὐκ ἠξίωσεν. ποικιλίας γὰρ ἔδει πρὸς τὴν σαφήνειαν, ἵνα γνῶμεν τί παραλληλόγραμμον, καὶ τίνα τὰ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐπὶ ὅλῳ. τούτων γὰρ σαφηνισθέντων καὶ τὸ παραπλήρωμα μόνως ἂν ἐγένετο γνώριμον. ἔστιν δὲ ἐκεῖνα τῶν παραλληλογράμμων περὶ διάμετρον τὴν αὐτήν, ὅσα μέρος τῆς ὅλης διαμέτρου καὶ αὐτῶν ἔχει διάμετρον, ὅσα δὲ μή, οὔ. ὅταν γὰρ ἡ τοῦ ὅλου διάμετρος τῶν πλευρῶν τινα τέμνῃ τοῦ ἐντὸς παραλληλογράμμου, τότε οὐκ ἔστι τὸ ὅλῳ τοῦτο τὸ παραλληλόγραμμον περὶ διάμετρον τὴν αὐτήν. οἷον ὡς ἐν τῷ αβ παραλληλογράμμῳ ἡ γδ τέμνει τοῦ γε παραλληλογράμμου τὴν εβ πλευράν. τὸ οὖν εγ τῷ γδ περὶ τὴν αὐτὴν οὐκ ἔστι διάμετρον.





Παρὰ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.)

Ἔστι μὲν ἀρχαῖα φασὶν οἱ περὶ τὸν Εὔδημον, καὶ τῆς τῶν Πυθαγορείων μούσης εὑρήματα ταῦτα. ἥ τε παραβολὴ τῶν χωρίων, καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις. ἀπὸ δὲ τούτων καὶ οἱ νεώτεροι τὰ ὀνόματα λαβόντες, μετήγαγον αὐτὰ καὶ ἐπὶ τὰς κωνικὰς λεγομένας γραμμάς. καὶ τούτων τὴν μὲν παραβολήν, τὴν δὲ ὑπερβολὴν καλέσαντες, τὴν δὲ ἔλλειψιν. ἐκεῖνοι γὰρ τῶν παλαιῶν καὶ θεῖοι ἄνδρες ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφῇ χωρίων πρὸς εὐθεῖαν ὡρισμένην τὰ ὑπὸ τούτων σημαινόμενα τῶν ὀνομάτων ἑώρων. ὅταν γὰρ εὐθείας ἐκκειμένης τὸ δοθὲν χωρίον πάσῃ τῇ εὐθείᾳ συμπαραβαλεῖν ἐκεῖνο τὸ χωρίον φασίν, ὅταν δὲ μεῖζον ποιήσῃς τοῦ χωρίου τὸ μῆκος αὐτῆς τῆς εὐθείας, τότε ὑπερβάλλειν, ὅταν δὲ ἔλασσον, ὡς τοῦ χωρίου γραφέντος εἶναί τι τῆς εὐθείας ἐκτός, τότε ἐλλείπειν. καὶ οὕτως ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ καὶ τῆς ὑπερβολῆς ὁ Εὐκλείδης μνημονεύει καὶ τῆς ἐλλείψεως. ἐνταῦθα δὲ τῆς παραβολῆς ἐδεήθη, τῷ δοθέντι τριγώνῳ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσον ἐθέλων παραβαλεῖν. ἵνα μὴ μόνον σύστασιν ἔχωμεν παραλληλογράμμου τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσου, ἀλλὰ καὶ παρ' εὐθεῖαν ὡρισμένην παραβολήν. οἷον τριγώνου δοθέντος τὸ ἐμβαδὸν ἔχοντος δώδεκα ποδῶν, εὐθείας δὲ ἐκκειμένης ἧς τὸ μῆκός ἐστι τεττάρων ποδῶν, τὸ ἴσον τῷ τριγώνῳ παρὰ τὴν εὐθεῖαν παραβάλλομεν. ἢν λαβόντες τὸ μῆκος ὅλων τῶν τεττάρων ποδῶν, εὕρωμεν πόσων ἐστὶ δεῖ ποδῶν τὸ πλάτος, ἵνα τῷ τριγώνῳ τὸ παραλληλόγραμμον ἴσον γένηται. εὑρόντες γοῦν εἰ τύχοι πλάτος τριῶν ποδῶν, καὶ ποιήσαντες τὸ μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος, ὑποθέμενοι δὲ ὀρθῆς οὔσης τῆς ἐκκειμένης γωνίας ἕξομεν τὸ χωρίον. τοιοῦτον μὲν δή τι τὸ παραβάλλειν ἐστὶν ἄνωθεν ἀπὸ τῶν Πυθαγορείων παραδεδομένον. τρία δέ ἐστιν ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ τὰ δεδομένα, εὐθεῖα, παρ' ἣν δεῖ παραβάλλειν, ὡς ὅλην αὐτὴν τοῦ χωρίου γενέσθαι πλευράν, καὶ τρίγωνον ᾧ ἴσον ἐστὶ δεῖ τὸ παραβαλλόμενον, καὶ γωνία, ᾗ ἴσην ἐστὶ τὴν τοῦ χωρίου γωνίαν. καὶ δῆλον πάλιν ὡς ὀρθῆς μὲν οὔσης τῆς γωνίας τὸ παραβαλλόμενον, ἢ τετράγωνον ἢ ἑτερόμηκες ἔσται. ὀξείας δὲ ἢ ἀμβλείας ἢ ῥόμβος τὸ χωρίον ἢ ῥομβοειδές. ὅτι γε μὴν καὶ τὴν εὐθεῖαν ἐστὶ δεῖ πεπερασμένην φανερόν. οὐ γὰρ δυνατὸν παρὰ τὴν ἄπειρον. ἅμα οὖν τῷ φάναι παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, ἐδήλωσεν ὅτι καὶ πεπεράνθαι ἀνάγκη τὴν εὐθεῖαν. χρῆται δὲ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ προβλήματος τούτου, τῇ συστάσει τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ἴσου τῷ δοθέντι τριγώνῳ. οὐ γὰρ ταὐτὸν παραβολὴ καὶ σύστασις. καὶ ὡς εἴπομεν ἡ μὲν ὅλον ὑφίστησι τὸ χωρίον καὶ αὐτὸ καὶ τὰς πλευρὰς ἁπάσας. μίαν δὲ ἔχουσα πλευρὰν δεδομένην, παρὰ ταύτην ὑφίστησι τὸ χωρίον, οὔτε ἐλλείπουσα κατὰ τὴν ἔκτασιν ταύτην, οὔτε ὑπερβάλλουσα, ἀλλὰ μιᾷ πλευρᾷ ταύτῃ χρωμένη, περιεχούσῃ τὸ ἐμβαδόν. διὰ τί δὲ οὖν φαίης ἂν ὅτι μὲν τρίγωνα τριγώνοις ἴσα ἐδείκνυ θεωρήμασιν ἐχρῆτο, ὅτι δὲ τρίγωνα παραλληλογράμμοις, προβλήμασιν; ὅτι φημὶ μὲν ἡ ἰσότης ὁμοιοειδῶν ὄντων, αὐτοφυής ἐστι καὶ ἀπ-ελέγξεως δεομένη μόνης, τῶν δὲ διὰ τὴν κατ' εἶδος ἐξαλλαγὴν ἡ ἰσότης τῆς γενέσεως δεῖται, καὶ μηχανῆς ὡς καθ' ἑαυτὴν οὐκ εὐσύνοπτος.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.)

Δύο προβλημάτων ἐν οἷς τήν τε σύστασιν εὕρισκε καὶ τὴν παραβολὴν τῶν ἴσων τῷ δοθέντι τριγώνῳ παραλληλογράμμων, τοῦτο καθολικώτερόν ἐστιν. εἴτε γὰρ τρίγωνον ἢ τετράγωνον, ἢ ὅλως τετράπλευρον, εἴτε ἄλλο τι πολύπλευρον ἐὰν δεδόμενον, διὰ τούτου τοῦ προβλήματος ἴσον αὐτῷ παραλληλόγραμμον συστήσομεν. πᾶν γὰρ εὐθύγραμμον ὡς καὶ πρότερον εἴπομεν καθ' αὑτὸ εἰς τρίγωνα διαλύεται, καὶ τὴν μέθοδον τῆς εὑρέσεως τοῦ πλήθους τῶν τριγώνων παραδεδώκαμεν. ἀναλύσαντες οὖν τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον εἰς τρίγωνα, καὶ ἑνὶ μὲν αὐτῶν ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι. τοῖς δὲ λοιποῖς παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσα παραλληλόγραμμα. λαμβάνοντες ἐκείνην παρ' ἣν ἐποιησάμεθα τὴν πρώτην παραβολήν, ἕξομεν τὸ ἐκ τούτων παραλληλόγραμμον, ἴσον τῷ ἐξ ἐκείνων τῶν τριγώνων εὐθυγράμμῳ, καὶ ἔσται γεγονὸς τὸ ἐπιταχθέν. κἂν δεκάπλευρον οὖν ᾖ τὸ εὐθύγραμμον, εἰς ὀκτὼ μὲν τρίγωνα διαλύσωμεν. ἑνὶ δὲ ἴσον συστήσωμεν παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπτάκις παραβάλλοντες, ἴσα τοῖς λοιποῖς ἕξομεν τὸ ζητούμενον. ἐκ τούτου δὲ οἶμαι τοῦ προβλήματος ἐπα-

χθέντων οἱ παλαιοί, καὶ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἐζήτησαν. εἰ γὰρ παραλληλόγραμμον ἴσον εὑρίσκεται παντὶ εὐθυγράμμῳ, ζητήσεως ἄξιον. μὴ καὶ τὰ εὐθύγραμμα τοῖς περιφερογράμμοις ἴσα δεικνύναι δυνατόν, καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἀλλὰ ταῦτα ἐν ἄλλοις. ἐπὶ τὰ ἑξῆς ἴωμεν.

μϛ



Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.)

Δεῖται μὲν τοῦ προβλήματος τούτου διαφερόντως εἰς τὴν τοῦ ἑξῆς θεωρήματος κατασκευήν, ἔοικε δὲ τῶν δύο γενέσεις ἐθελῆσαι παραδοῦναι τῶν ἐν εὐθυγράμμοις ἀρίστων, ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ τετραγώνου. διό τι δὴ καὶ πρὸς τὴν σύστασιν τῶν κοσμικῶν σχημάτων καὶ μάλιστα τῶν τεττάρων ὧν καὶ γένεσις ἐστὶ καὶ ἀνάλυσις τούτων χρεία τῶν εὐθυγράμμων. τὸ μὲν γὰρ εἰκοσάεδρον, καὶ ὀκτάεδρον, καὶ ἡ πυραμὶς ἐκ τῶν ἰσοπλεύρων σύγκειται τριγώνων. διό μοι δοκεῖ πεφυλαγμένως τὸ μὲν συστήσασθαι, τὸ δὲ ἀναγράψαι. πρέποντα γὰρ δὴ ταῦτα τὰ ὀνόματα αὐτοῖς τοῖς σχήμασιν. τὸ μὲν γὰρ ὡς ἐκ πολλῶν συγκροτούμενον, συστάσεως δεῖται, τὸ δὲ ὡς ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς ἀπογεννώμενον ἀναγραφῆς. οὐ γὰρ ὥσπερ τὸ τετράγωνον ἔχομεν πολλαπλασιάσαντες τὸν τῆς δοθείσης εὐθείας ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτόν, οὕτως καὶ τὸ τρίγωνον, ἀλλαχόθεν ἐπιζεύξαντες ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας συγκροτοῦμεν ἐκ τούτων τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον. καὶ ἡ τῶν κύκλων καταγραφὴ συντελεῖ πρὸς τὸ ἀνευρεῖν ἐκεῖνο τὸ σημεῖον ἀφ' οὗ δεῖ τὰς εὐθείας εἰς τὰ πέρατα τῆς ἐκκειμένης εὐθείας ἐπιζεῦξαι. ταῦτα μὲν οὖν δῆλα. λεκτέον δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἴσων ἀφ' ὧν ἀναγράφεται τὰ τετράγωνα, καὶ αὐτὰ ἴσα ἐστίν. ἔστωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ γδ. καὶ ἀπὸ μὲν τῆς αβ ἀναγεγράφθω τὸ αβεη, ἀπὸ δὲ τῆς γδ τὸ γδθζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηβ θδ. ἐπεὶ οὖν αἱ αβ γδ ἴσαι, καὶ αἱ αη, δθ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ ἡ ηβ τῇ θδ ἴση, καὶ τὸ αβη τρίγωνον τῷ γδθ τριγώνῳ καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν. τὸ ἄρα αε τῷ γζ ἴσον. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ἀντιστρέφον ἀληθές. εἰ γὰρ τὰ τετράγωνα ἴσα καὶ αἱ εὐθεῖαι ἀφ' ὧν ἀναγέγραπται ἴσαι ἔσονται. ἔστω γὰρ τετράγωνα ἴσα τὰ αζ γη, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν αβ τῇ βγ. ὀρθῶν ἄρα οὐσῶν τῶν γωνιῶν ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ ζβ τῇ βη ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ αη. ἐπεὶ οὖν ἴσον τὸ αζ τετράγωνον τῷ γη, καὶ τὸ αζβ τρίγωνον ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ γβη. κοινὸν προσκείσθω τὸ βγζ. ὅλον ἄρα τὸ αγζ ἴσον τῷ γζη. παράλληλος ἄρα ἡ αη τῇ ζγ. πάλιν ἐπεὶ ἡμισείας ὀρθῆς ἥ τε ὑπὸ αζη, καὶ ὑπὸ γηβ, παράλληλος ἡ αζ τῇ γη. ἴση ἄρα ἡ αζ τῇ γη. παραλληλόγραμμα γάρ εἰσιν ἀπεναντίον. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ αβζ βγη τὰς ἐναλλὰξ ἔχοντα γωνίας ἴσας, παραλλήλων οὐσῶν τῶν αζ γη, καὶ μίαν πλευρὰν τὴν αζ τῇ γη, ἴση ἔσται ἡ αβ τῇ βγ, ἴση καὶ ἡ βζ τῇ βη. δέδεικται ἄρα ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ ἀφ' ὧν ἀναγέγραπται τὰ αζ γη τετράγωνα ἴσαι εἰσὶν ἐκείνων ἴσων ὄντων.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις.)

Τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντας τὸ θεώρημα τοῦτο, εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἔστιν εὑρεῖν, καὶ βουθυτεῖν λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὑρέσει. ἐγὼ δὲ θαυμάζω μὲν καὶ τοὺς πρώτους ἐπιστάντας τῇ τοῦ θεωρήματος τοῦδε ἀληθείᾳ. μειζόνως δὲ ἄγαμαι τὸν στοιχειωτήν, οὐ μόνον ὅτι δι' ἀποδείξεως ἐναργεστάτης τοῦτο κατεδήσατο, ἀλλ' ὅτι καὶ τὸ καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀνελέγκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπίεσεν, ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ. δείκνυσι γὰρ ἐν ἐκείνῳ καθολικῶς ὅτι ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. πᾶν γὰρ τετράγωνον ὅμοιόν ἐστι τετραγώνῳ παντί. οὐ πάντα δὲ τὰ ὅμοια ἀλλήλοις εὐθύγραμμα τετράγωνά ἐστι. καὶ γὰρ ἐν τριγώνοις καὶ ἐν ἄλλοις ἐστὶ πολυγώνοις ὁμοιότης. ὁ τοίνυν ἀποδεικνὺς λόγος τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν εἶδος, ἢ τετραγωνικόν, εἴτε ἄλλο ὁποιονοῦν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένοις εἴδεσι, καθολικώτερον δείκνυσι καὶ ἐπιστημονικώτερον τοῦ τὸ τετράγωνον μόνον ἴσον τοῖς τετραγώνοις ἀποφαίνοντος. ἐντεῦθεν γὰρ καὶ ἡ αἰτία φανερὰ γίνεται τοῦ καθολικοῦ δειχθέντος, ὅτι ἡ ὀρθότης τῆς γωνίας τὴν ἰσότητα παρέχεται τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης αὐτὴν εἴδει πρὸς πάντα τὰ ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν

αὐτὴν

ἐπὶ τῶν τε ὁμοίων καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένων. ὥσπερ ἡ μὲν ἀμβλύτης ὑπεροχῆς, ἡ δὲ ὀξύτης τῆς ἐλαττώσεως. ὅπως μὲν οὖν δείκνυται τὸ ἐν τῷ ἕκτῳ θεώρημα, ἐν ἐκείνοις ἔσται δῆλον. ὅπως δὲ τὸ προκείμενον ἀληθές, νῦν σκοπῶμεν, τοσοῦτον προσθέντες ὅτι ἐνταῦθα τὸ καθολικὸν δεικνῦναι, μηδὲν διδάξαντα περὶ ὁμοιότητος εὐθυγράμμων σχημάτων, μηδὲ ὅλως περὶ ἀναλογίας ἐνδειξάμενον. πολλὰ γὰρ τῶν ἐνταῦθα μερικώτερον ὑποδέδεικται, καθολικώτερον διὰ τῆς ταύτης μεθόδου. δείκνυσι δὲ οὖν ὁ στοιχειωτὴς ἐν τούτοις ἀπὸ τῆς περὶ τῶν παραλληλογράμμων κοινῆς θεωρίας τὸ ζητούμενον. διττῶν δὲ ὄντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν μὲν ἰσοσκελῶν, τῶν δὲ σκαληνῶν, ἐν μὲν τοῖς ἰσοσκελέσιν, οὐκ ἄν ποτε εὕροιμεν ἀριθμοὺς ἐφαρμόσαι ταῖς πλευραῖς. οὐ γάρ ἐστι τετράγωνος ἀριθμὸς τετραγώνου διπλάσιος. εἰ μὴ λέγοιμεν τὸν σύνεγγυς. ὁ γὰρ ἀπὸ τοῦ ζ τοῦ ἀπὸ τοῦ ε διπλάσιός ἐστιν α δέοντος. ἐν δὲ τοῖς σκαληνοῖς δυνατὸν λαβεῖν, ἐναργῶς ἡμῖν δείκνυται, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. τοιοῦτον γάρ ἐστι τὸ ἐν Πολιτείᾳ τρίγωνον, οὗ τὴν ὀρθὴν περιέχουσιν ὅ τε τρία καὶ ὁ τέσσαρα, ὑποτείνει δὲ αὐτὴν ὁ ε. τὸ γοῦν ἀπὸ τοῦ ε τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπ' ἐκείνων. τοῦτο μὲν γάρ ἐστιν εἰκοσιπέντε, τἀπ' ἐκείνων δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ γ θ, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ δ ἑκκαίδεκα. σαφὲς οὖν τὸ λεγόμενον ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν. παραδέδονται δὲ καὶ μέθοδοι τινὲς τῆς εὑρέσεως τῶν τοιούτων τριγώνων, ὧν τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν, ἡ ἀπὸ τῶν περιττῶν ἐστιν ἀριθμῶν. τίθησι γὰρ τὸν δοθέντα περιττὸν ὡς ἐλάσσονα τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. καὶ λαβοῦσα τὸν ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον, καὶ τούτου μονάδα ἀφελοῦσα, τοῦ λοιποῦ τὸν ἥμισυ τίθησι τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν τὸν μείζονα. προσθεῖσα δὲ καὶ τούτῳ μονάδα, τὴν λοιπὴν ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν. οἷον τὸν τρία λαβοῦσα καὶ τετραγωνίσασα καὶ ἀφελοῦσα τοῦ ἐννέα μονάδα, τοῦ η λαμβάνει τὸ ἥμισυ τὸν δ, καὶ τούτῳ προστίθησι πάλιν μονάδα καὶ ποιεῖ τὸν ε, καὶ εὕρηται τρίγωνον ὀρθογώνιον, ἔχον τὴν μὲν τριῶν, τὴν τεσσάρων, τὴν δὲ ε. ἡ δὲ Πλατωνικὴ, ἀπὸ τῶν ἀρτίων ἐπιχειρεῖ. λαβοῦσα γὰρ τὸν δοθέντα ἄρτιον, τίθησιν αὐτὸν ὡς μίαν πλευρὰν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, καὶ τοῦτον διελοῦσα δίχα καὶ τετραγωνίσασα τὸ ἥμισυ, μονάδα μὲν τῷ τετραγώνῳ προσθεῖσα, ποιεῖ τὴν ὑποτείνουσαν, μονάδα δὲ ἀφελοῦσα τοῦ τετραγώνου, ποιεῖ τὴν ἑτέραν τῶν περὶ τὴν ὀρθήν. οἷον τὸν τέσσαρα λαβοῦσα, καὶ τούτου τὸν ἥμισυ τὸν β τετραγωνίσασα καὶ ποιήσασα αὐτὸν δ, ἀφελοῦσα μὲν μονάδα ποιεῖ τὸν γ, προσθεῖσα δὲ, ποιεῖ τὸν ε, καὶ ἔχει τὸ αὐτὸ γινόμενον τρίγωνον, ὃ καὶ ἐκ τῆς ἑτέρας ἀπετελεῖτο μεθόδου. τὸ γὰρ ἀπὸ τούτου ἴσον, τῷ ἀπὸ τοῦ γ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δ συντεθεῖσι. ταῦτα μὲν οὖν ἔξωθεν προσιστορήσθω. τῆς δὲ τοῦ στοιχειωτοῦ ἀποδείξεως οὔσης φανερᾶς, οὐδὲν ἡγοῦμαι δεῖν προσθεῖναι περιττὸν, ἀλλ' ἀρκεῖσθαι τοῖς γεγραμμένοις. ἐπεὶ καὶ ὅσοι προσέθεσαν πλέον, ὡς οἱ περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον, ἠναγκάσθησαν προσλαβεῖν τι τῶν ἐν τῷ ἕκτῳ δεδειγμένων, οὐδενὸς ἕνεκα πραγματειώδους. ὥστε τὰ ἑξῆς δὴ μελετῶμεν ἡμεῖς.

Ἐὰν τριγώνου, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.) μη

Ἀντιστρέφει μὲν τοῦτο τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι, καὶ ὅλον πρὸς ὅλον ἀντιστρέφει. εἰ γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν, καὶ εἰ τὸ ἀπὸ ταύτης ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν, ὀρθογώνιόν ἐστι τὸ τρίγωνον ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ τῶν λοιπῶν περιεχομένην. καὶ ἡ μὲν ἀπόδειξις τοῦ στοιχειωτοῦ φανερά. ὄντος δὲ τριγώνου τοῦ αβγ, καὶ ἔχοντος τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βγ, ἀγομένης ἀπ' αὐτοῦ τῇ βγ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ β σημείου, ἐὰν λέγῃ τις ὅτι ὧδε τὰ ἕτερα μέρη τὴν πρὸς ὀρθὰς ἄγειν δεῖ, καὶ μὴ ἐφ' ἃ ὁ στοιχειωτὴς ἤγαγεν, ἐροῦμεν ὅτι ἀδύνατος ὁ λόγος. οὔτε γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτειν αὐτὴν δυνατόν, οὔτε ἐκτός ἀλλ' αὐτή ἐστιν ἡ αβ. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ βε. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ εβγ. ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ γζβ. ὥστε ἡ λοιπὴ ἀμβλεῖα ἡ ὑπὸ αζβ μείζων ἄρα ἡ αβ τῆς βζ. κείσθω οὖν τῇ αβ ἴση ἡ βε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. ἐπεὶ δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εβγ, τὸ ἀπὸ τῆς εγ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν εβ βγ. ἀλλὰ ἡ εβ, τῇ βα ἐστὶν ἴση. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εγ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βγ. τοῖς δὲ αὐτοῖς ἴσον ἦν καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς εγ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἡ εγ ἄρα ἴση τῇ αγ. ἦν δὲ καὶ ἡ εβ ἴση τῇ αβ. αἱ ἄρα βε εγ δυσὶ ταῖς βα αγ ἴσαι συνίστανται ἐπὶ τῆς βγ ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐντὸς πε-

σεῖται ἡ πρὸς ὀρθάς. ἀλλὰ μὴν οὐδὲ ἐκτὸς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ βη, καὶ ἴση ἔστω τῇ αβ ἡ βη. ἴση ἡ β καὶ ἴση καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γε. ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εβγ, τὸ ἀπὸ τῆς εγ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν εβ βγ. ἦν δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ βγ. ἴση ἄρα ἡ εγ τῇ αγ. ἀλλὰ καὶ ἡ εβ τῇ βα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τῆς βγ, ὅπερ ἀδύνατον. οὔτε ἄρα ἐντὸς, οὐδὲ ἐκτὸς πεσεῖται ἡ ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ βγ. ἐπ' αὐτῆς ἄρα πεσεῖται τῆς αβ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ. λέλυται ἄρα ἡ ἔνστασις. τὸ μὲν οὖν πρῶτον βιβλίον ἄχρι τούτων ὁ στοιχειωτὴς συνεπλήρωσεν, πολλὰ μὲν ἀντιστροφῶν εἴδη παραδούς. καὶ γὰρ ὅλα πολλάκις ἀντιστρέψας πρὸς ὅλα, καὶ ὅλα πρὸς μέρη, καὶ μέρη πρὸς μέρη θεωρημάτων. πολλὴν δὲ ποικιλίαν προβλημάτων ἐπινοήσας. καὶ γὰρ εὐθειῶν τομὰς, καὶ γωνιῶν καὶ θέσεις καὶ συστάσεις παραδέδωκεν. ἐφαψάμενος δὲ καὶ τῶν παραδόξων λεγομένων τόπων τῶν μαθημάτων, καὶ τῶν τοπικῶν αὐτῶν θεωρημάτων, ἱκανῶς ἡμᾶς ἀναμνήσας, τῶν τε καθολικῶν καὶ τῶν ἐπὶ μέρους, τὴν στοιχείωσιν ἐκφῆναι, καὶ τῶν ἀδιορίστων καὶ διωρισμένων προβλημάτων τὴν διαφορὰν ἐνδειξάμενος. ἃ δὴ πάντα καὶ ἡμεῖς αὐτῷ συνεπόμενοι διηρθρώσαμεν. ὅλον δὲ τὸ βιβλίον εἰς ἕνα σκοπὸν ἀνενεγκὼν τὴν στοιχείωσιν τὴν πρὸς τὴν τῶν ἁπλουστάτων εὐθυγράμμων θεωρίας, καὶ τάς τε συστάσεις αὐτῶν ἐξευρὼν καὶ τὰ καθ' αὐτὰ ὑπάρχοντα αὐτοῖς ἀνασκεψάμενος. ἡμεῖς γε εἰ μὲν δυνηθείημεν καὶ τοῖς λοιποῖς τὸν αὐτὸν διελθεῖν τρόπον, τοῖς θεοῖς ἂν χάριν ὁμολογήσαιμεν. εἰ δὲ ἄλλαι φροντίδες ἡμᾶς περιάξουσιν, τοὺς φιλοθεάμονας τῆς θεωρίας ταύτης ἀξιοῦμεν κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον καὶ τῶν ἑξῆς ποιεῖσθαι βιβλίων τὴν ἐξήγησιν, τὸ πραγματειῶδες πανταχοῦ καὶ εὐδιαίρετον μεταδιώκοντας. ὡς τά γε φερόμενα νῦν ὑπομνήματα πολλὴν καὶ παντοδαπὴν ἔχει τὴν σύγχυσιν, αἰτίας ἀπόδοσιν οὐδὲ μίαν συνεισφέροντα, οὐδὲ κρίσιν διαλεκτικὴν, οὐδὲ θεωρίαν φιλόσοφον.

Τέλος Πρόκλου εἰς τὸ α' Εὐκλείδου βιβλ.

Ἀδήλου σχόλιον εἰς τὸ κδ' θεώρημα Εὐκλείδου στοιχείου πρώτου.

Hoc scholion adiecimus in exemplari quodam ueteri repertū.

Εἰ δεῖ τὸ ἐμοὶ δοκοῦν ἀποφήνασθαι, ἔσφαλται ὁ φιλόσοφος. οὐ γὰρ δυνατὸν ἐπ' αὐτῆς τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὕστερον ἐκβληθεῖσαν εὐθεῖαν πεσεῖν, ἀλλ' ἐξ ἀνάγκης ἀνωτέρω πεσεῖται καθάπερ καὶ ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο. ὥσπερ δὲ ἐλέγομεν δείξομεν οὕτως. ἔστω δύο ἰσοσκελῆ τὰ αβγ δεζ. τὰς δύο πλευρὰς τὰς βα αγ ταῖς δύο ταῖς εδ δζ ἴσας ἔχοντα, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ α γωνίας τῆς πρὸς τῷ δ μείζων ἔστω. ἐκκείσθω ἴσην αὐτῇ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδη. καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ δη ἔστω ἴση τῇ εδ. ἐὰν γε βουλόμεθα ἐπιζεῦξαι τὴν εη, οὐ δυνατὸν ταύτην τὴν ἐπιζευγνῦσαν ἐπ' εὐθείας εἶναι τῇ εζ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω αὐτῇ ἐπ' εὐθείας, τουτέστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πιπτέτω ἡ εη, καθάπερ φαίνεται χρησάμενος ὁ Πρόκλος ἐν τῇ δευτέρᾳ αὐτοῦ ὑποθέσει. ἐπεὶ οὖν ἰσοσκελῆ ὑπόκειται τὰ δύο, ἴση ἂν εἴη ἡ πρὸς τῷ ε γωνία τῇ πρὸς τῷ η. ἀλλὰ μὴν καὶ τῇ ὑπὸ δζε ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ πρὸς τῷ η ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε γωνίᾳ. τὰ γὰρ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. εἰ δὲ τοῦτο ἀληθές ἐστι, τοῦ δζη ἡ ἐκτὸς γωνία τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα δυνατὸν ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν εη εὐθεῖαν τῇ εζ. εἰ δὲ τοῦτο οὐκ ἐνδέχεται, πολλῷ μᾶλλον οὐδὲ ἐκτὸς πεσεῖται. ἐντὸς ἄρα, οὐκ ἄρα ὀρθῶς εἴρηκεν ὁ φιλόσοφος. καὶ ἄλλως δὲ τοῦτο δείξομεν ἀδύνατον ἀπὸ τῆς καταγραφῆς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ὑπόκειται ἡ δε τῇ δζ, καὶ τῇ δη, καὶ ἡ δζ ἄρα τῇ δη ἴση ἂν εἴη. ὥστε ἰσοσκελῆ εἶναι τὰ τρία τρίγωνα, ἤγουν τὸ δεζ, καὶ τὸ δζη, καὶ ἔτι τὸ δεη. ἴσαι γὰρ ἐδείχθησαν ἀλλήλαις αἱ τρεῖς πλευραί. οὐκοῦν καὶ αἱ πρὸς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. τουτέστιν ἡ πρὸς τῷ ε τῇ πρὸς τῷ η, καὶ ἔτι τῇ ὑπὸ δζε. καὶ ἡ πρὸς τῷ η τῇ ὑπὸ δζη. αἱ τέσσαρες ἄρα γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ μίαν. ὥστε καὶ δύο αὐτῶν, τῶν λοιπῶν δύο ἴσαι ἔσονται. ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς ε καὶ η δύο, ταῖς ὑπὸ δζε δζη δυσὶν ἴσαι, ὅπερ συναμφότεραι συναμφοτέραις. αἱ δὲ ὑπὸ δζε δζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἴπερ εὐθεῖα ἡ δζ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν εη ἐφέστηκεν. ὥστε καὶ αἱ ὑπὸ δεζ δηζ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰ δὲ τοῦτο ἀληθές, ἀνῄρηται τὸ ιζ' θεώρημα. ἀλλὰ μὴν ἐκεῖνο ἀληθές, ἀδύνατον ἄρα τοῦτο. οὐκ ἄρα ἡ ἐκβαλλομένη

εὐθεῖα

ὁ σχολιαστὴς καταπίπτει τοῦ Πρόκλου, αὐτὸς μέγιστα ἁμαρτάνει [illegible]

εὐθεῖα ἡ δὴ διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐκβληθήσεται τῆς εζ. εἰ δὲ τοῦτο οὐχ οἷόν τε, πολλῷ μᾶλλον ὡς εἴρηται οὐδὲ ἐκτός. μεῖζον γὰρ τοῦτο ἐπ' ἐκείνου τὸ συμβαῖνον ἄτοπον. ῥητέον οὖν ὑπὲρ τοῦ φιλοσόφου ὅτι πρὸς εἰσαγομένους διαλεγόμενος οὐ πάνυ ἐμμελῶς ἐξέθετο. ἢ γυμνασίας χάριν τῶν εὐφυῶς διακειμένων καὶ προθυμοποιίας, ἢ καὶ ἴσως ἐπελάθετο. καὶ οὐδὲν θαυμαστόν, καὶ ἄλλως. ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθησαν αἱ τέσσαρες γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις κατὰ μίαν, τουτέστιν ἥτε ὑπὸ δζε, καὶ ἡ ὑπὸ δζη, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ ε καὶ πρὸς τῷ η, ὅτ' ἂν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα, ὥστε ὀρθὴ ἂν εἴη ἑκατέρα τῶν ὑπὸ δζε. εἰ δὲ τοῦτο καὶ ἡ πρὸς τὸ η ὀρθὴ ἂν εἴη. εἰ δὲ τοῦτο ἀνῄρηται πάλιν τὸ ιζ θεώρημα. παντὸς γὰρ φησὶ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἡ δὲ ὑπόθεσις ἡμῶν δείκνυσιν αὐτὰς δύο ὀρθαῖς ἴσας, ὅπερ ἄτοπον.

Περὶ δεδομένων συντόμως.

Πρῶτον δεῖ θεάσασθαι τί τὸ δεδομένον, ἔπειτα τί τὸ χρήσιμον τῆς περὶ τούτου πραγματείας εἰπεῖν, καὶ τρίτον ὑπὸ τίνα τῶν ἐπιστημῶν ἀνάγεται. ὁρίζονται δὴ τὸ δεδομένον πολλαχῶς, καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι. διὸ καὶ συνέβη χαλεπὴν εἶναι τὴν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. καὶ ἔνιοι μὲν, οὐδὲ ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀποδεδώκασιν, ἴδιον δέ τινα δεδομένου εὑρίσκειν ἐπειράθησαν. ἕτεροι δὲ συμπλέξαντες ἤδη τὰ παρ' ἐκείνων, ὁρίζεσθαι αὐτὸ ἐπεχείρησαν, καὶ οὐδὲ οὗτοι συμφωνοῦσιν ἑαυτοῖς. ἐοίκασι δὲ πάντες ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐννοίας καὶ ὑπολήψεως ὁρμηθέντες, λέγειν τι περὶ αὐτοῦ, καταληπτὸν γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον. διὸ τῶν ἁπλούστερον καὶ μιᾷ τινὶ διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον πειρωμένων, οἱ μὲν τεταγμένον, ὡς Ἀπολλώνιος, ἐν τῇ περὶ νεύσεων, καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ. οἱ δὲ γνώριμον, ὡς ὁ Διόδωρος. οὗτος γὰρ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει, καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσιν ἀγαγόν τινα. καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον, ἢ πρὸς ἀκρίβειαν, ἢ τὸ σύνεγγυς. καὶ τὸ ἐν ὑποθέσει δὲ παρὰ τοῦ προβάλλοντος ἐκκείμενον, δεδομένον εἶναί τινες ὑπόληψιν λέγουσι. καὶ ἄλλον τρόπον, ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθέν, καὶ τῇ δοθείσῃ, τουτέστιν ἡλίκην αὐτὶς ἀφορίσῃ καὶ δὸς εὐθεῖαν. ταῦτα δὲ πάντα κατάληψίν τινα βούλεται σημαίνειν. ὅθεν καὶ μάλιστα τῶν ὅρων ἐκεῖνοι εὐδοκιμοῦσιν, ὅσοι μάλιστα, τὸ καταληπτὸν, ἐμφανίζουσιν. ὡς προϊοῦσιν ἡμῖν, ἔσται καταφανές. γυμνὸν δὲ καὶ τῶν μὴ μόνον ψιλῶς, καὶ ἔν τινι χαρακτηριζόντων τὰς διαφορὰς ἐκθώμεθα, συγκεφαλαιούμενοι δὲ καὶ τούτων οἱ τρόποι, δυαριθμητοὶ γίνονται. οἱ μὲν γὰρ τεταγμένον ἅμα καὶ πόριστον τὸ δεδομένον εἶναι ἀφώρισαντο, ἕτεροι δὲ τὸ τεταγμένον ἅμα καὶ πόριμον, τινὲς δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον. φαίνονται δὲ καὶ οὗτοι πάντες πρὸς τὴν κατάληψιν, ἤτοι λῆψιν καὶ εὕρεσιν τοῦ δεδομένου ἀφεωρακότες, τὸν εἰρημένον τρόπον ὁρίζεσθαι. ἵνα δὲ, ταύτην τε αὐτὴν τὴν ἔννοιαν κατεδησώμεθα, ἔτι γε μὴν καὶ τὰ ἀληθῆ τοῦ προκειμένου ὅρου, ἐκ πολλῶν τῶν προειρημένων ἕλωμεν, ἐπισκεπτέον πρότερον ἑκάστου τὸ ἁπλῶς τὸ σημαινόμενον, καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων, τοῦτ' ἐστὶ ἀτάκτου λέγω, καὶ ἀγνώστου, καὶ ἀπόρου καὶ ἀλόγου, ὡς πρὸς τὴν ἐνεστῶσαν γεωμετρικὴν ὕλην. ἐπεκτείνεται γὰρ τὰ τοιαῦτα, καὶ ἐπὶ τὰ φυσικὰ πράγματα, καὶ τὰς ἄλλας δὲ μαθηματικὰς ἐπιστήμας. ὑπογράφουσι τοίνυν τὸ τεταγμένον, τὸ διὰ ἀποτεθὲν σωζόμενον, καθὸ τετάχθαι λέγεται. ἤτοι κατὰ μέγεθος ἢ εἶδος ἢ ἄλλο τι τῶν τοιούτων. ἢ καὶ ἑτέρως, ὅπερ μὴ ἐνδέχεται ἄλλοτε ἄλλως γίγνεσθαι, ἀλλὰ μοναχῶς ἐν ἀφωρισμένῳ τινὶ τόπῳ, οἷον ὡς τύπῳ εἰπεῖν, ἡ διὰ δύο σημείων ἐστηκότων γραφομένη εὐθεῖα, τετάχθαι λέγεται, τῷ μὴ ἄλλως καὶ ἀστάτως ἄγεσθαι. ἄτακτος δέ ἐστιν ἡ διὰ δυοῖν περιφέρεια. πολλαχῶς γὰρ καὶ ἀστάτως γράφεται, καὶ μείζονος καὶ ἐλάττονος κύκλου, ἐπ' ἄπειρον γραφομένων, διὰ τῶν δύο σημείων. πάλιν δὲ τεταγμένη ἐστὶν ἡ διὰ τριῶν περιφέρεια. ἔστι δὲ καὶ τὰ τοιαῦτα τῶν τεταγμένων, ὡς τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ γὰρ καὶ διχῶς γίγνεται, ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον μέρος τῆς εὐθείας μοναχῶς καὶ ἀμεταπτώτως, καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν μοναχῶς γὰρ αὖ καὶ τοῦτο λέγεται ἐπὶ ἑκάτερα τῆς διχοτομίας. ἄτακτα δέ ἐστι τὰ τούτοις ἀντικείμενα ἔχοντα, ὡς τὸ σκαληνὸν

Hic in ueteri exemplari reperta sunt adiecimus.

συστήσασθαι, καὶ τὴν εὐθεῖαν ἀορίστως τεμεῖν. πρόσκειται δὲ τῷ ὅρῳ, τὸ καθὸ τέτακται. ἐπεὶ δύναταί τι γνωστὸν καὶ τακτὸν ὄν, πῇ μὲν τεταγμένον, ἄλλως δὲ ἄτακτον εἶναι. οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, ᾗ μὲν ἰσόπλευρόν ἐστι, τέτακται, μεγέθει δὲ οὐχ ὥρισται, ὡρισμένον δέ ἐστι. τὸ γινωσκόμενον ὡς τὸ δῆλον ἡμῖν καὶ ὑπὸ ἡμῶν καταλαμβανόμενον. ἄγνωστον δὲ τὸ μὴ γινωσκόμενον οὐδὲ καταλαμβανόμενον ὑφ᾽ ἡμῶν. οἷον τὸ μῆκος τῆς γῆς γνώριμον εἶναι λέγεται, καθὸ πόσων ἐστὶ σταδίων κατέλαβον. καὶ τοῦ τριγώνου ὅτι ἔχοντος δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, καὶ ὅτι ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἄλογος. ἔτι μὴν καὶ τὰ τοιάδε, γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ εἶναι τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος ἀπὸ τοῦ διαβάντος σημείου ἐπὶ θάτερα μέρη. εἰ γὰρ καὶ ἄλλα εἴη, δύο εὐθειῶν χωρίον περιέξουσιν ὅπερ ἀδύνατον. ἄγνωστα δὲ, οὐ τὰ ἄλογά ἐστιν, ἀλλὰ τὰ μὴ γινωσκόμενα, μηδὲ καταλαμβανόμενα ὑφ᾽ ἡμῶν. πόριμον δὲ ἐστὶν ὃ δυνατόν ἐστι μὲν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον, ἤτοι τὸ διὰ ἀποδείξεως πορίζομενον, ἢ ὅταν τι φαινόμενον ᾖ, καὶ χωρὶς ἀποδείξεως. οἷον δεῖ τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι, κύκλον γράψαι, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι, οὐ μόνον ἰσόπλευρον ἀλλὰ καὶ σκαληνόν. καὶ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεῖν. καὶ ῥητὰς εὐθείας ἑπτὰς, δυνάμει μόνον συμμέτρους. καὶ τὰ ἀπειραχῶς δὲ γινόμενα πόριμά ἐστι, ὥσπερ τὸ διὰ δύο σημείων κύκλον γράψαι. ἄπορον δὲ ἐστι, τὸ ἀντικείμενον ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός, οὔπω γὰρ ἐν πόρῳ. εἰ καὶ οἷόν τε αὐτὸ πορισθῆναι, καὶ ἔστιν ἐπιστητόν, οὐκ ἔστι τις κατείληφε. νῦν δὲ πόρου τοῦ ἤδη ὄντος χωρὶς ὁ λόγος ἀποδέδοται. ὅπερ καὶ κυρίως πόριμον ἐπονομάζουσιν. τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ πορισθῆναι, πορευτὸν ἰδίως προσαγορεύουσιν. ἄπορον δέ ἐστιν ὡς εἴρηται, τὸ τῷ πορίμῳ ἀντικείμενον, ὅπερ ἐστὶν οὐ ἡ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστι. ῥητὸν δὲ ἐστὶν οὗ τινος ἔχομεν εἰπεῖν, μέγεθος ἢ εἶδος ἢ θέσιν. ἀλλ᾽ οὗτος μὲν ὁ ὅρος, κοινότερός ἐστι. ἰδίως δὲ, καὶ καθ᾽ αὑτὸ ῥητόν ἐστιν, ὃ κατά τινα γινωσκόμενον ἀριθμὸν πρὸς τὸ ὑποτεθὲν μέτρον, παλαιστὴν εἰ τύχοι, ἢ δάκτυλον. οὕτω δὴ προδιωρισμένων, ῥᾷον ἤδη λοιπὸν ἐπισκοπεῖν, τήν τε κοινωνίαν τῶν εἰρημένων καὶ τὴν διαφοράν, καὶ πρῶτον ὅπως ἔχει τὸ τεταγμένον πρὸς τὸ γνώριμον, καὶ τὰ τούτοις ἀντικείμενα πρὸς ἄλληλα. οὐκ ἔστι διὰ τῶν ἀντιστρεφόντων τὰ τοιαῦτα. οὐδὲ μὴν ἐκείνων, ὧν εἰς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπὶ πλέον ἐστίν. εἰ γὰρ καὶ κοινὰ αὐτοῖς πολλὰ ὑπάρχει, ὡς τὸ, διὰ δύο σημείων εὐθεῖαν γράψαι, καὶ διὰ τριῶν, κύκλον, καὶ ἰσόπλευρον συστήσασθαι, ἀλλὰ τὸ τετραγωνίζειν τὸν κύκλον, τεταγμένον μὲν, ἄγνωστον δέ. καὶ ὅτι μία τῆς ἕλικος, ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφάπτεται, τῶν τεταγμένων, καὶ μὴ ἐνδεχομένων ἄλλως ἔχειν ἐστί, οὐ μὴν καὶ ἐγνώσθη αὐτοῦ ἡ ἀπόδειξις. ἥ τε κατασκευὴ πάλιν δ᾽ αὖ ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον τομή, καὶ ἡ τοῦ σκαληνοῦ σύστασις, ἔγνωσται μὲν, οὐκ ἔτι δὲ καὶ τέτακται. ὥστε φανερὸν, ὅτι ἕξει ἃ τοῦ τεταγμένου, τὸ μὲν γνώριμον τὸ δὲ ἄγνωστον, καὶ ἀνάπαλιν δὲ τοῦ γνωρίμου, τὸ μὲν τεταγμένον, τὸ δὲ ἄτακτον. καὶ οὕτως ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα. ὥσπερ γὰρ τὸ λογικὸν πρὸς τὸ πεζὸν ἐξισάζει τὰ τοιαῦτα, οὔτε μὴν τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπὶ πλέον ἐστι, ὁμοίως δὲ ἔχει τὸ τεταγμένον καὶ τὸ ἄτακτον πρὸς τε πόριμον καὶ τὸ ἄπορον. κοινωνία τε γὰρ αὐτοῖς ἐστι πλείστη, καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν εἰρημένον τρόπον. ἡ γὰρ ἕλιξ, τέτακται μὲν, ἀλλ᾽ οὐχ ἕως τοῖς πρὸ Ἀρχιμήδους πόριμη. καὶ τὰ ἀπειραχῶς δὲ γινόμενα καὶ ἀτάκτως, πόριμά ἐστιν, ἐὰν τὴν κατασκευὴν ἐπινοῇ τις αὐτῶν καὶ τὴν σύστασιν, οὐκέτι δὲ καὶ τεταγμένα. οἷον σκαληνὸν τρίγωνον ἐπινοῆσαι, καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ ἀναγαγεῖν τὴν διάνοιαν ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου, οὐ χαλεπὸν, ἀλλ᾽ εὐπόριστόν ἐστιν καὶ τοι τῶν ἀτάκτων ὂν καὶ ἀπείρων. οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον, τὸ τεταγμένον τε καὶ τὸ ἄτακτον. κοινωνοῦντα γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ καὶ διενήνοχε τὸν εἰρημένον τρόπον. οὐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει ἀλλήλοις, οὐδὲ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐστὶ περιληπτικόν. ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ οὕτως καταλελειμμέναι ἄλογοι, τεταγμέναι μὲν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί. καὶ ὁ τῆς διαμέτρου λόγος πρὸς τὴν πλευράν. πολλαὶ δὲ καὶ τῶν ῥητῶν, ἄτακτά ἐστιν, ὡς τὰ πολλαχῶς καὶ ἀορίστως γινόμενα. δυνατὸν γὰρ καὶ σκαληνῶν τριγώνων μεγέθους ὑποτεθέντος καὶ ὁρισθέντος ῥητῶν μέρους, καίτοι ἄτακτα ὑπάρχει. τῶν δὲ γνωρίμων πρὸς τὸ πόριμον, τὴν μὲν ὁμοιότητα, παντί γε δήπου εἰδέναι ῥᾴδιον, τὴν δὲ διαφορὰν χαλεπὸν ἐλεῖν. σύνεγγυς γάρ εἰσι τὴν φύσιν ἀλλήλων. ὥστε καὶ ἐξισάζειν δοκεῖν. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τούτοις ἀκριβῶς ἐπιβλέψαι εὑρεθήσεταί τις ἐνοῦσα διαφορά. ὅτι μὲν γὰρ μία ἐστὶν ἡ τῆς ἕλικος ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφαπτομένη, σύμφωνός ἐστι καὶ γνώριμον, ἀλλ᾽ οὐ διὰ τοῦτο μὴν καὶ πόριμόν ἐστι τὸ πρόβλημα μήπω καταληφθέν.

ὥστε

ἐστὶ πᾶν ὃ γνώριμον, οὐκέτι ἐστὶ πόριμον. τὸ μέντοι πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, ἐπὶ πλέον ἄρα τὸ γνώριμον τοῦ ποςίμου. πάλιν δὲ αὖ τὸ γνώριμον καὶ τὸ ῥητόν, πῇ μὲν κοινωνεῖ, πῇ δὲ καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν προειρημένον τρόπον. αἱ γὰρ εἰρημέναι ἄλογοι, γνώριμοι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί. ὁ δὲ ἀριθμὸς πᾶς ῥητὸς μέν ἐστιν οὐκέτι δὲ καὶ γνώριμος πᾶς, καὶ τὸ μὲν ῥητὸν τοῖς κατὰ ταυτὸν εἶναι, ὁμοίως ῥητόν ἐστι. τὸ οὕτως μὲν ἔσται τὶ μῆκος, τὸ δ᾽ οὔ. ἐπὶ γὰρ ταυτὸν ἄγνωστον μέτρον. γνώριμον δὲ τὸ μὴ γίνεται ταυτὸν μῆκος, τὸ δὲ οὔ, κἂν ἐν τῇ αὐτῇ συνηθείᾳ ὦσιν. ἴσως δὲ καὶ ταῦθα χαλεπόν ἐστιν εὑρεῖν, ῥητὸν μὲν, ἄγνωστον δέ. δοκεῖ γὰρ ἡ τοῦ ῥητοῦ ἐπὶ πλέον εἶναι τὸ γνώριμον. ὅτι δὲ καὶ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον διαφέρει τοῦ τε ῥητοῦ καὶ ἀλόγου, φανερὸν ἐκ τούτων. πόριμα γὰρ ἐστι δυνατόν, καὶ τῶν ἀλόγων τινά. οὐδὲν δὲ τῶν ῥητῶν ἄλογον. ἡ δὲ συγγένεια τούτων αὐτῶν, καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων παντὶ καταφανής. ὅτι μέντοι καὶ ταῦτα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὥστε τὸ πόριμον ἐπὶ πλέον εἶναι δοκεῖν τοῦ ῥητοῦ. ἔξεστι δὲ τῶν προειρημένων τὴν διαφορὰν ἐπισκοπεῖν καὶ ταῦθα. ῥητὸν μὲν γὰρ καὶ ἄλογον, κατὰ τὴν ἐπὶ τὸ μέτρον ἀναφορὰν λέγεται, οὐ πρὸς τὴν ἡμετέραν γνῶσιν, [illegible] εἴρηται, τὸ δεδομένον, καὶ ὑπὸ ποίαν ἐπιστήμην ἀνάγεται, καὶ ὅτι χρησιμωτάτη ἐστὶν ἡ περὶ αὐτοῦ θεωρία. προσκείσθω δὲ τοῖς εἰρημένοις καὶ ἡ περιγραφὴ τῆς περὶ αὐτοῦ ἐπιστήμης. ἔσται δὴ αὕτη, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων φανερόν, κατάληψις τῶν δεδομένων κατὰ πάντα τρόπον, καὶ τῶν περὶ αὐτὰ συμβαινόντων. ἰδίως δὲ καὶ ὡς πρὸς τὸ προκείμενον βιβλίον, λεγέσθω εἶναι, μέθοδος, στοιχείωσις περιέχουσα τῆς ὅλης περὶ τῶν δεδομένων ἐπιστήμης. ἔξει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ χρήσιμον ἀκολούθως, καὶ τὰ ἄλλα κατὰ τὴν ἀναφορὰν τὴν πρὸς τὸ δεδομένον. διαιρεῖται δὲ τὸ β΄ πρὸς τὰ τοῦ δεδομένου εἴδη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον αὐτοῦ τμῆμα, περιέχει τὰ κατὰ λόγον δεδομένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ τῇ θέσει. ἐπὶ δὲ τάξεις τὰ τῷ εἴδει, ἁπλῶς γὰρ ἦν τὸ περὶ τῶν μεγέθει δεδομένων. κατατάσσεται δὲ καὶ ταῦτα μερικῶς ἐν τοῖς ἄλλοις, καὶ μάλιστα ἐν τοῖς κατὰ τὸ εἶδος δεδομένοις. ἤρξατο δὲ ἀπὸ τῶν λόγῳ καὶ θέσει δεδομένων. ἐπεὶ καὶ ἐκ τούτων συνίστασθαι τὰ τῷ εἴδει δεδομένα. καὶ ἄλλως δὲ ἡ διαίρεσις αὐτοῦ τοῦ β΄ γεγένηται εἴς τε τὰ καθόλου μεγέθη, καὶ εἰς γραμμὰς, καὶ εἰς ἐπίπεδα, καὶ κυκλικὰ θεωρήματα. τῇ δὲ ὁμοίᾳ τάξει ἐχρήσατο καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων, ἤτοι ὑποθέσεων τοῦ β΄. τρόπῳ δὲ τῆς διδασκαλίας οὐ τῷ κατὰ σύνθεσιν ἐν ταῦθα ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ἱκανῶς ἀπεδείξαμεν ἐν τοῖς εἰς τὸ β΄ ὑπομνήμασιν.

Τέλος περὶ δεδομένων.

Euclidis.
α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ terniones omnes præter θ & ψ duerniones. Procli. Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ Ι terniones & Κ duernio.

B[illegible] ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

